19º ΜΑΘΗΜΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΜΠΔ

Σημειώσεις για τον Γιώργο Βαβετσίδη κ' τον Σπύρο Μαραγγέλη. Πάρης Στρατής 2020.

Θέμα 2 / Ιούνιος 2017

$\boxed{f(x)=x^3-3x-1}$, $D_f=\mathbb{R}$

(α). Για να αποδείξουμε ότι η f έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3, με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$, χρησιμοποιούμε:

- Το Θεώρημα Bolzano σε 3 διαφορετικά διαστήματα της επιλογής μας, για την ύπαρξη των ριζών
- τη μονοτονία της $f(x)$ στα διαστήματα αυτά (ή το Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας) για τη μοναδικότητα των ριζών.

1º βήμα

Παρατηρούμε ότι:

$f(-2)=-3<0$
$f(-1)=1>0$
$f(0)=-1<0$
$f(1)=-3<0$
$f(2)=1>0$
$f(3)=17>0$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano σε καθε ένα από τα διαστήματα $[-2,-1]$, $[-1,0]$ κ' $[1,2]$. Γνωρίζουμε έτσι ότι υπάρχουν ρίζες $\rho_1\in(-2,-1)$, $\rho_2\in(-1,0)$ κ' $\rho_3\in(1,2)$ τέτοιες ώστε: $f(\rho_1)=0$, $f(\rho_2)=0$ κ' $f(\rho_3)=0$.

2º βήμα.

1ος τρόπος: Εφαρμόζεται μονάχα σε πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (ή "από την Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι") ισχύει ότι κάθε πολυώνυμο n-οστού βαθμού έχει ακριβώς n ρίζες, πραγματικές ή μιγαδικές. Άρα, το $f(x)=x^3-3x-1$ ως πολυώνυμο 3ου βαθμού έχει ακριβώς 3 ρίζες, οι οποίες δείξαμε προηγουμένως ότι ανήκουν σε 3 διαδοχικά πραγματικά διαστήματα. Δηλ. πρόκειται για 3 ακριβώς πραγματικές ρίζες.

2ος τρόπος: Εφαρμόζεται πάντοτε.

Μελετάμε τη μονοτονία της $f(x)$ ως εξής:

$f(x)=x^3-3x-1$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2-3$ κ' $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow 3\cdot(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

κ' έτσι:

x	$-\infty$ … -2	-2 … ρ_1 … -1	-1 … ρ_2 … 0	0 … 1	1 … ρ_3 … 2	2 … $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗	↘	↘	↗	↗

Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[-2,-1]$, $[-1,0]$ κ' $[1,2]$. Άρα, οι ρίζες της $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ που εμφανίζονται στα διαστήματα αυτά είναι μοναδικές.

(β). $x_0=3$, $x_1=2.5$: αρχικές προσεγγίσεις της μεθόδου της τέμνουσας

$$\begin{cases} f(x)=x^3-3x-1 \\ f'(x)=3x^2-3 \\ f''(x)=6x \end{cases}$$

Διάστημα στο οποίο ανήκουν οι αρχικές προσεγγίσεις x_0 κ' x_1.

Θεωρούμε το διάστημα $(2,4)$ στο οποίο ισχύουν τα εξής:

$f'(x)\neq 0 \ \forall x\in(2,4)$

$f''(x)\neq 0 \ \forall x\in(2,4)$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου της τέμνουσας γνωρίζουμε ότι η ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x^*\in(\alpha,\beta)$.

Τέλος, έχουμε ότι:

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)\cdot(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}}, \text{ για } n\in\{1,2,3,4,\ldots\}$$

$$\xRightarrow{\text{για } n=1} x_2=x_1-\frac{f(x_1)\cdot(x_1-x_0)}{f(x_1)-f(x_0)} \Leftrightarrow x_2=2.5-\frac{f(2.5)(2.5-3)}{f(2.5)-f(3)} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \boxed{x_2\cong 2.1}$$

(γ).

$$\boxed{x_{n+1}=\frac{x_n^3-1}{3}} \Leftrightarrow x_{n+1}=\phi(x_n), \text{ για } n\in\{0,1,2,\ldots\}$$

με $\boxed{\phi(x)=\frac{x^3-1}{3}}$

Ζητούμενο είναι η εύρεση ενός διαστήματος $[a,b]$, στο οποίο να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος σύγκλισης της μεθόδου του Σταθερού σημείου. Πρέπει δηλ. να ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \phi([a,b]) \subseteq [a,b] \quad ① \\ \text{κ'} \\ \text{Η } \phi \text{ είναι συστολή με σταθερά } L<1, \text{ δηλ. να ισχύει ότι:} \\ \triangle\ \phi \in C^1([a,b]) \Leftrightarrow \text{Η } \phi'(x) \text{ είναι συνεχής συνάρτηση στο } [a,b] \quad ② \\ \triangle\ L = \max\limits_{x\in[a,b]} |\phi'(x)| < 1 \quad ③ \end{cases}$$

$\phi(x) = \frac{x^3-1}{3}$

$\Rightarrow \phi'(x) = x^2$ κ' $\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Προσοχή!

Επιλέγουμε ως διάστημα $[a,b] = [-0.5, 0]$ με $p_2 \in [-0.5, 0]$.

x	$-\infty$	-0.5	0	$+\infty$
$\phi'(x)$	$+$	$+$	0	$+$
$\phi(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\nearrow$

Η $\phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-0.5, 0]$.
Άρα, για το σύνολο τιμών της ϕ ισχύει ότι:

$$\boxed{\phi([-0.5,0]) = [\phi(-0.5), \phi(0)] = [-0.375, -0.33] \subseteq [-0.5, 0]} \quad ①$$

Επίσης, η $\phi'(x) = x^2$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[-0.5, 0]$.
Δηλ. ισχύει ότι $\boxed{\phi \in C^1([-0.5,0])}$ ②

Ακόμη, έχουμε ότι:
$\phi'(x) = x^2 \Rightarrow \phi''(x) = 2x < 0 \quad \forall x \in [-0.5, 0]$.

x	$-\infty$	-0.5	0	$+\infty$
$\phi''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$\phi'(x)$	$\searrow$	$\searrow$		$\nearrow$

Δηλ. η $\phi'(x)$ είναι γν. φθίνουσα στο $[-0.5, 0]$ κ' έτσι ισχύει ότι:

$$\boxed{L = \max\limits_{-0.5 \le x \le 0} |\phi'(x)| = |\phi'(-0.5)| = 0.25 < 1} \quad ③$$

Επομένως, η ακολουθία σημείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $[-0.5, 0]$ ∎

Θέμα 2 | Αύγουστος 2018

(γ).
$$\begin{cases} \overbrace{x_1^3+x_2-1}^{f_1(x_1,x_2)}=0 \\ \underbrace{x_2^3-x_1+1}_{f_2(x_1,x_2)}=0 \end{cases} \quad \text{μ.} \quad X^{(0)}=\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1,x_2)=0 \\ f_2(x_1,x_2)=0 \end{cases} \quad \text{με} \quad F_1(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^3+x_2-1 \\ x_2^3-x_1+1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία επίλυσης συστήματος εξισώσεων με την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson.

1ο βήμα. Κατασκευάζουμε τον Jacobian matrix $J(x_1,x_2)$, με:

$$J(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ -1 & 3x_2^2 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

Για $\boxed{n=0}$:

2ο βήμα. Υπολογίζουμε τον πίνακα $J(X^{(0)})$ ως εξής:

$$J(X^{(0)})=J\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=J(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

3ο βήμα. Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του $J(X^{(0)})$ ως εξής:

$$J^{-1}(X^{(0)})=\frac{1}{\underbrace{\cancel{0\cdot 0-1\cdot(-1)}}_{1}}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

4ο βήμα. Υπολογίζουμε το διάνυσμα $F(X^{(0)})$ ως εξής:

$$F(X^{(0)})=F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=F(0,0)=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 1}$$

5ο βήμα. Υπολογίζουμε το διάνυσμα $X^{(1)}$ ως εξής:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - J^{-1}(X^{(0)}) \cdot F(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

Για $\boxed{n=1}$:

2ο βήμα. Υπολογίζουμε τον πίνακα $J(X^{(1)})$ ως εξής:

$$J(X^{(1)}) = J\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = J(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

3ο βήμα Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του $J(X^{(1)})$ ως εξής:

$$J^{-1}(X^{(0)}) = \frac{1}{\cancelto{10}{3\cdot 3 - 1\cdot(-1)}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

4ο βήμα Υπολογίζουμε το διάνυσμα $F(X^{(1)})$ ως εξής:

$$F(X^{(1)}) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

5ο βήμα. Υπολογίζουμε το διάνυσμα $X^{(2)}$ ως εξής:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - J^{-1}(X^{(1)}) \cdot F(X^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$