

Σημειώσεις για τον Γιώργο Βαβελίδη
ε' των Σπύρο Μαργαχέτη.
Γιώργος Στρατός 2020

- 1 -

Δείγμα 2 / Μάιος 2018

(α). $f(x) = \ln(x+1) - x$. Πρέπει $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Άρα $D_f = (-1, +\infty)$ ^{π.δ. f}

1^ο βήμα: Για να αποδείξουμε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0.5, 1]$ χρησιμοποιούμε:
 • το Θ. Βολζανο για την ύπαρξη της ρίζας στο διάστημα αυτό ή παρουσιάζουμε μια προφανή ρίζα της f στο $[0.5, 1]$. ↑ Προσοχή!
 • τη μονotonία της $f(x)$ στο $[0.5, 1]$ για τη μοναδικότητα.

Πρώτη φάση:

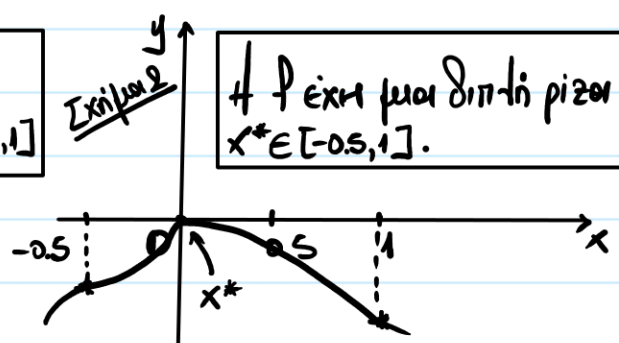
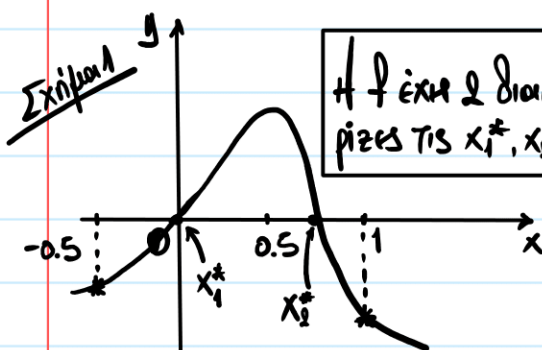
Η $f(x)$ είναι συνεχής ως αθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $[0.5, 1]$

$$f(-0.5) = \ln(-0.5+1) + 0.5 = -0.1931 < 0$$

$$f(1) = \ln(2) - 1 = -0.307 < 0$$

Παρατηρούμε ότι στο $[0.5, 1]$ ΔΕΝ εφαρμόζεται το Θ. Βολζανο. Άρα, η συνάρτηση f είτε δεν έχει καμία ρίζα μέσα στο συγκεκριμένο διάστημα, είτε έχει άρτιο αριθμό ριζών εντός του $[0.5, 1]$.

Όμως, μια προφανής ρίζα της $f(x)$ στο $[0.5, 1]$ είναι το $x^* = 0$, αφού $f(0) = 0$.
 Δηλαδή η f έχει άρτιο αριθμό ριζών μέσα στο συγκεκριμένο διάστημα. Δηλαδή διακρίνουμε τις περιπτώσεις:



-2-

Έπεται:

$$f(x) = \ln(x+1) - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1$$

Εί:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow 1 = x+1 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	-∞	-1	-0.5	0	1	+∞
f'(x)	///	///	+	+	-	-
f(x)	///	///	↗	↗	↘	↘

Δηλ. η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο [-0.5, 0] και γνησίως φθίνουσα στο [0, 1].

Οπότε, η f(x) παρουσιάζει μοναδική διπλή ρίζα, των $x^* = 0$, στο [-0.5, 1], όπως αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 2.

Στόχος μας:

Στόχος μας είναι η προσέγγιση της παραπάνω διπλής ρίζας της f(x) με την επαναληπτική μέθοδο των Newton-Raphson, για την οποία γνωρίζουμε ότι έχει τετραγωνική ταχύτητα σύγκλισης στο [-0.5, 1]. Επειδή γνωρίζουμε ότι η f(x) έχει διπλή ρίζα στο [-0.5, 1] χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο επαναληπτικό τύπο:

$$x_{n+1} = x_n - 2 \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ για } n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων, δηλ. το κριτήριο τερματισμού της NR είναι το $\epsilon_{n+1} < 5 \cdot 10^{-5}$

Starting point της NR

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - 2 \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\epsilon_{n+1} = x_{n+1} - x_n $
0	0.5				
1					
2					
3					

Finishing point της NR $< 5 \cdot 10^{-5}$

(b).

✂