

Σημειώσεις για τον Γιώργο Μοιραγέτη  
Ε' του Γιώργου Βαβελήδη.  
Πάρις Σπάρτης 2020.

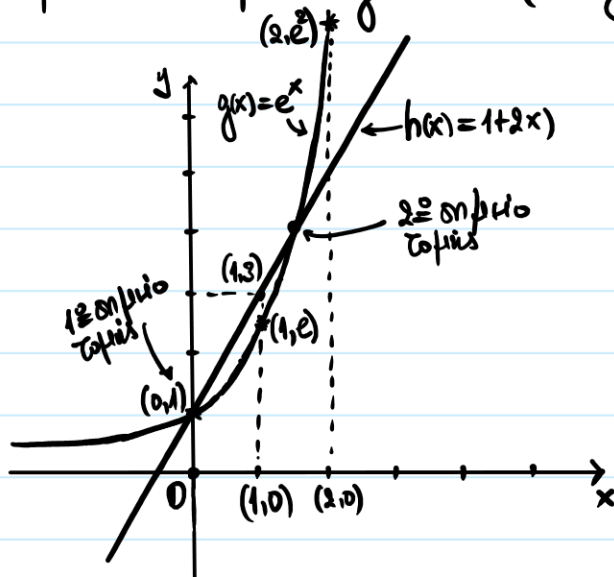
-1-

Θέμα 2 / Ιούνιος 2019

1ος τρόπος με  
χρήση θεωρημάτων  
παραγώγων

$$f(x) = e^x - 1 - 2x = \underbrace{e^x}_{g(x)} - \underbrace{(1+2x)}_{h(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) - h(x)$$

Επομένως, οι ρίζες της συνάρτησης  $f(x)$  (δηλαδή  $f(x)=0$ ) είναι στην ουσία τα κοινά σημεία των συναρτήσεων  $g(x)$  &  $h(x)$  (δηλ.  $g(x)=h(x) \Leftrightarrow g(x)-h(x)=0$ )



$$h(x) = 1 + 2x$$

|                                 |
|---------------------------------|
| $x=0, h(0)=1 \rightarrow (0,1)$ |
| $x=1, h(1)=3 \rightarrow (1,3)$ |
| $x=2, h(2)=5 \rightarrow (2,5)$ |

$$g(x) = e^x$$

|                                     |
|-------------------------------------|
| $x=0, g(0)=1 \rightarrow (0,1)$     |
| $x=1, g(1)=e \rightarrow (1,e)$     |
| $x=2, g(2)=e^2 \rightarrow (2,e^2)$ |

Η  $f(x)$  όπως μπορούμε να δούμε από το παραπάνω διαγράμμι, έχει μοναίκα δύο ρίζες, αφού οι συναρτήσεις  $g(x)$  &  $h(x)$  τέμνονται μοναίκα σε δύο σημεία. Το 1ο σημείο τομής είναι προφανώς το σημείο  $(0,1)$ , ενώ το 2ο σημείο τομής έχει τετμημένη  $x \in [1,2]$ .

2ος τρόπος με  
χρήση θεωρημάτων

Μια προφανής ρίζα της  $f(x) = e^x - 1 - 2x$  είναι το  $x=0$ , αφού  $f(0)=0$ .  
Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Βολζενο στο  $[1,2]$ .

• Η  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $[1,2]$  ως πρός τις εκθετικές & πολυωνυμικές, οι οποίες συνεχείς συναρτήσεις στο ίδιο διάστημα  $[1,2]$ .

$$\begin{aligned} \Delta & f(1) = e^1 - 1 - 2 \cdot 1 = e - 3 < 0 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \\ & f(2) = e^2 - 1 - 4 = e^2 - 5 > 0 \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα  $x^*$  της  $f(x)$  στο  $(1,2)$ .

**Hint:** Με Βολζενο δίνουμε την ύπαρξη & με μονοτονία την μοναδικότητα της ρίζας

-2-

Παρατηρούμε όπως ότι:

$$f(x) = e^x - 1 - 2x$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x - 2$$

$$\text{ε: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \Leftrightarrow x \approx 0.693$$

| x       | $-\infty$  | 0.693 | 1          | 2          | $+\infty$  |
|---------|------------|-------|------------|------------|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0     | +          | +          | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |       | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |

Δηλ. η  $f(x)$  είναι γι. αύξουσα στο  $[1, 2]$ .

Άρα η  $f(x)$  έχει μοναδική ρίζα  $x^* \in [1, 2]$ .

(b) Εφαρμόζουμε 3 βήματα της μεθόδου της Διχοτόμησης στο διάστημα  $[1, 2]$

| n | $a_n$        | $b_n$       | $f(a_n)$          | $f(b_n)$         | $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$        | $f(x_n)$         |
|---|--------------|-------------|-------------------|------------------|------------------------------------|------------------|
| 0 | $a_0 = 1$    | $b_0 = 2$   | $f(a_0) = -0.282$ | $f(b_0) = 2.289$ | $x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$        | $f(x_0) = 0.482$ |
| 1 | $a_1 = 1$    | $b_1 = 1.5$ | $f(a_1) = -0.282$ | $f(b_1) = 0.482$ | $x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$     | $f(x_1) = -0.01$ |
| 2 | $a_2 = 1.25$ | $b_2 = 1.5$ | $f(a_2) = -0.01$  | $f(b_2) = 0.482$ | $x_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$ | $f(x_2) = 0.205$ |

Δ για  $n=0$ :

$$a_0 = 1, b_0 = 2, f(1) = e^1 - 1 - 2 = e - 3 = -0.282, f(2) = e^2 - 1 - 4 = e^2 - 5 = 2.289$$

$$x_0 = 1.5, f(1.5) = e^{1.5} - 1 - 3 = e^{1.5} - 4 = 0.482$$

Δ για  $n=1$ :

$$f(1.25) = e^{1.25} - 1 - 2.5 = e^{1.25} - 3.5 = -9.657 \cdot 10^{-3} = -0.009657 \approx -0.01$$

Δ για  $n=2$ :

$$x_2 = 1.375$$

Finishing point  $\rightarrow$

$\leftarrow$  Η τελευταία προσέγγιση της διχοτόμησης

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο Newton-Raphson με ανοχή σφάλματος  $10^{-3}$ .

Starting point

| $n$ | $x_n$         | $f(x_n)$          | $f'(x_n)$         | $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ | $\epsilon_{n+1} =  x_{n+1} - x_n $  |
|-----|---------------|-------------------|-------------------|------------------------------------------|-------------------------------------|
| 0   | $x_0 = 1.375$ | $f(x_0) = 0.205$  | $f'(x_0) = 1.955$ | $x_1 = 1.270$                            | $\epsilon_1 =  x_1 - x_0  = 0.105$  |
| 1   | $x_1 = 1.270$ | $f(x_1) = 0.020$  | $f'(x_1) = 1.560$ | $x_2 = 1.257$                            | $\epsilon_2 =  x_2 - x_1  = 0.013$  |
| 2   | $x_2 = 1.257$ | $f(x_2) = 0.001$  | $f'(x_2) = 1.515$ | $x_3 = 1.256$                            | $\epsilon_3 =  x_3 - x_2  = 0.001$  |
| 3   | $x_3 = 1.256$ | $f(x_3) = -0.001$ | $f'(x_3) = 1.511$ | $x_4 = 1.2561$                           | $\epsilon_4 =  x_4 - x_3  = 0.0001$ |

Finishing point

Δ Για  $n=0$ :

$$x_0 = 1.375, f(1.375) = e^{1.375} - 1 - 2 \cdot 1.375 = 0.205, f'(1.375) = e^{1.375} - 2 = 1.955$$

$$x_1 = 1.375 - \frac{0.205}{1.955} = 1.270$$

$$f(x) = e^x - 1 - 2x$$

$$f'(x) = e^x - 2$$

Δ Για  $n=1$

$$f(1.270) = 0.020$$

Επομένως, δείχνεται ότι με ανοχή  $< 10^{-3}$  ότι η προσέγγιση της ρίζας  $x^*$  της  $f(x)$  βρίσκεται στο  $[1, 2]$  είναι η εφής:  $x = 1.251$

(b).

(i)  $x_{n+1} = \phi_1(x_n) = \frac{e^{x_n} - 1}{2}$  με  $\phi(x) = \frac{e^x - 1}{2}$ , για  $x \in [1, 2]$

Για να ελέγξουμε τη σύγκλιση της παραπάνω επαναληπτικής μεθόδου (b), ελέγχουμε την ισχύ του κριτηρίου σύγκλισης της μεθόδου του σταθερού σημείου, ελέγχοντας τις παρακάτω συνθήκες:

Συνθήκη 1.  
 $\phi([1, 2]) \subseteq [1, 2]$

ε

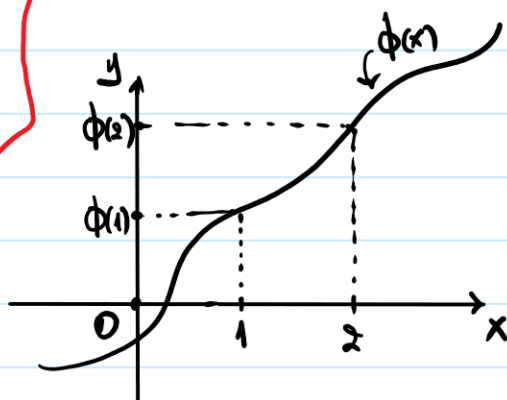
Η  $\phi$  είναι συστολή με σταθερά  $L < 1$ , δηλ. ισχύουν τρι εφής:

$$\phi \in C^1[1, 2] \Leftrightarrow \phi' \text{ είναι συνεχής στο } [1, 2]$$

$$L = \max_{x \in [1, 2]} |\phi'(x)| < 1$$

Συνθήκη 2.

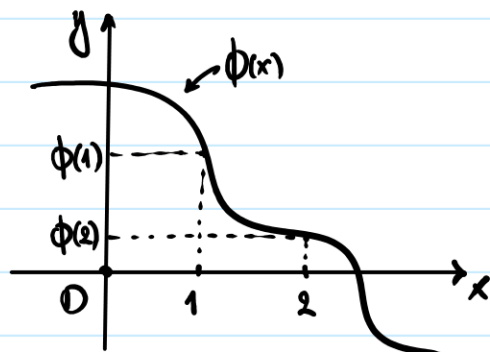
-4-



$$\text{π.ο.}\phi = [1, 2]$$

$\phi: \nearrow$

$$\sigma.\tau.\phi = \phi([1, 2]) = [\phi(1), \phi(2)]$$



$$\text{π.ο.}\phi = [1, 2]$$

$\phi: \searrow$

$$\sigma.\tau.\phi = \phi([1, 2]) = [\phi(2), \phi(1)]$$

$$\Delta \quad \boxed{\phi(x) = \frac{e^x - 1}{2}}, \text{ για } x \in [1, 2]$$

$$\boxed{\phi'(x) = \frac{e^x}{2}}, \text{ για } x \in [1, 2]$$

| $x$        | 0          | 1          | 2          |
|------------|------------|------------|------------|
| $\phi'(x)$ | +          | +          | +          |
| $\phi(x)$  | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |

Δηλ. η  $\phi(x) = \frac{e^x - 1}{2}$  είναι γν. αύξουσα στο  $[1, 2]$ .  
Οπότε, ισχύει ότι  $\phi([1, 2]) = [\phi(1), \phi(2)]$   
 $= \left[\frac{e^1 - 1}{2}, \frac{e^2 - 1}{2}\right]$

Όμως, παρατηρούμε ότι:

$$\phi([1, 2]) = \left[\frac{e-1}{2}, \frac{e^2-1}{2}\right] \cong [0.859, 2.985] \not\subset [1, 2]$$

Δηλαδή, δεν ισχύει η Σωστή 1 ε'έτσι η μέθοδος 10κ) δεν συζητιέται για  $x \in [1, 2]$ .

(ii). Οφέλη.

~~1~~