

05-06-20

Σημειώσεις για τον Πύργο Βαβυλίων
ε' του Σπύρο Μπαράζδη.Επίλυση μη-γραμμικών συστημάτων με NRΜεθοδολογία επίλυσηςΔιαθέτουμε προς επίλυση το παρακάτω σύστημα (μη γραμμικών)
εξισώσεων:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

1^ο βήμα. Κατασκευάζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα $J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f_{1,x_1} & f_{1,x_2} \\ f_{2,x_1} & f_{2,x_2} \end{bmatrix}$ 2^ο βήμα. Υπολογίζουμε τον J^{-1} κατά τα γνωστά3^ο βήμα. Υπολογίζουμε τον $J_n^{-1} = J^{-1}(x^{(n)})$ 4^ο βήμα. Χρησιμοποιώντας το επαναληπτικό σχήμα:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - J^{-1}(x^{(n)}) \cdot F(x^{(n)}), \text{ για } n \in \mathbb{N}_0$$

για κατάλληλη αρχική προσέγγιση $x^{(0)}$, οδηγούμαστε στη λύση x^*
του συγκεκριμένου (μη-γραμμικού) συστήματος.

Κριτήριο τερματισμού της παραπάνω μεθοδολογίας είναι το ακόλουθο.

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\|_{\infty} \leq \delta = 10^{-k}$$

Άσκηση. Να εφαρμοστεί ένα βήμα της μεθόδου NR για την επίλυση
του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 1 = 0 \\ 3xy^2 - y^3 = 0 \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας ως αρχική προσέγγιση $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Απάντηση.

-2-

Διαθέτουμε προς επίλυση τα παρακάτω συστήματα:

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 1 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases}$$

1^ο βήμα Κατασκευάζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα $J(x,y)$ ως εξής:

$$J = \begin{bmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

2^ο βήμα Υπολογίζουμε τον J^{-1} ως εξής:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 6xy \\ -6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \det(J) &= (3x^2 - 3y^2)^2 + 36x^2y^2 \\ &= 9x^4 - 18x^2y^2 + 9y^4 + 36x^2y^2 \\ &= 9x^4 + 18x^2y^2 + 9y^4 \\ &= (3x^2 + 3y^2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ε'τσι: } J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3x^2 - 3y^2}{(3x^2 + 3y^2)^2} & \frac{6xy}{(3x^2 + 3y^2)^2} \\ \frac{-6xy}{(3x^2 + 3y^2)^2} & \frac{3x^2 - 3y^2}{(3x^2 + 3y^2)^2} \end{bmatrix}$$

3^ο βήμα Υπολογίζουμε τον πίνακα $J_0^{-1} = J^{-1}(x^{(0)})$ ως εξής:

$$J_0^{-1} = J^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ -1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

~~Δεδομένα~~

Υπολογίζουμε τον όρο $F_0 = F(X^{(0)})$ ως εξής

$$F(X^{(0)}) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1-3+1 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ε' έτσι για $n=0$ έχουμε το παρακάτω επαναληπτικό σχήμα:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - J^{-1}(X^{(0)}) \cdot F(X^{(0)}) \quad , \quad J^{-1}(X^{(0)}) = J_0^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ -1/6 & 0 \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{2 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1/6 \cdot 2 \\ -1/6 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$



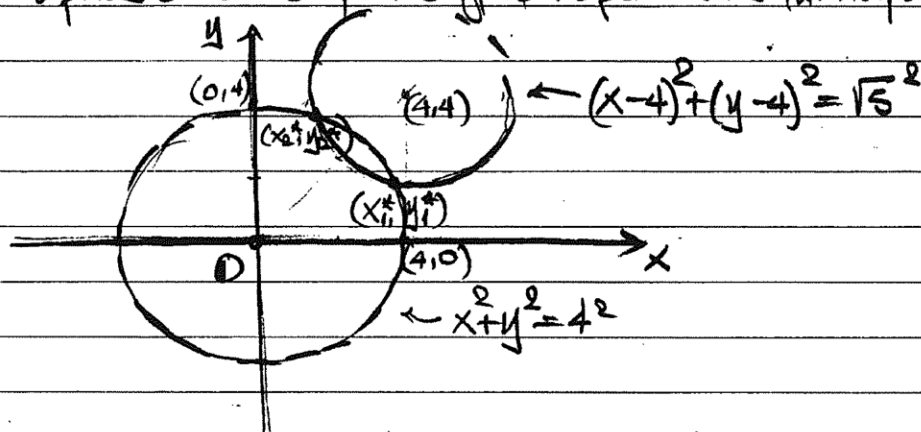
Άσκηση, Να εντοπιστεί γραφικά τις λύσεις του παρακάτω συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων ε' στη συνέχεια με χρήση της μεθόδου NR να γίνει η πρώτη επανάληψη με στόχο τον εντοπισμό των ριζών αυτών.

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-4)^2 &= 5 \\ x^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

Απάντηση

-4-

Κατ' αρχάς σχεδιάζουμε τις γραφ. παραστάσεις των παραπάνω εξισώσεων.



Με τη μέθοδο NR θα υπολογίσουμε επαναληπτικά τις 2 παραπάνω ρίζες $\begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{bmatrix}$ & $\begin{bmatrix} x_2^* \\ y_2^* \end{bmatrix}$, ξεκινώντας με την πρώτη εφ' αυτών.

Ως αρχική προσέγγιση για την $\begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{bmatrix}$ επιλέγουμε (μειντώντας τη γραφική παράσταση) την $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{bmatrix}$ επιλέγουμε (μειντώντας τη γραφική παράσταση) την $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Έχουμε το παραπάνω σύστημα:

$$F(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας ως αρχική προσέγγιση $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

1^ο Βήμα

Κατασκευάζουμε τον Ιακωβιανό πίνακα $J(x, y)$ ως εξής:

$$J = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-8 & 2y-8 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

2^ο Βήμα

Υπολογίζουμε τον J^{-1} ως εξής:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} 2y & 8-2y \\ -2x & 2x-8 \end{bmatrix}, \text{ όπου } \det(J) = (2x-8)(2y-8) - 2x(2y-8) \\ = 4xy - 16y - 4xy + 16x \\ = 16x - 16y$$

$$\text{Κ' ΕΤΟΙ: } J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2y}{16(x-y)} & \frac{8-2y}{16(x-y)} \\ \frac{-2x}{16(x-y)} & \frac{2x-8}{16(x-y)} \end{bmatrix}$$

3^ο βήμα Υπολογίζουμε τον πίνακα $J_0 = J^{-1}(X^{(0)})$ ως εξής:

$$J_0^{-1} = J^{-1}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ -\frac{6}{16} & -\frac{2}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 \\ -3/8 & -1/8 \end{bmatrix}$$

4^ο βήμα Υπολογίζουμε τον όρο $F_0 = F(X^{(0)})$ ως εξής:

$$F(X^{(0)}) = F\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 4 - 5 \\ 9 + 4 - 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Κ' έτσι για $n=0$ έχουμε το παραπάνω επαναληπτικό σχήμα:

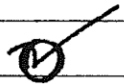
$$X^{(1)} = X^{(0)} - J^{-1}(X^{(0)}) \cdot F(X^{(0)})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 \\ -3/8 & -1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2 \qquad \qquad 2 \times 1$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3/4 \\ 3/8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 1.625 \end{bmatrix}$$

2×1



-6-