

Επίλυση εξισώσεων με χρήση επαναληπτικών μεθόδων

Διακρίνουμε τις παρακάτω μεθοδολογίες παρουσιάζοντας ταυτόχρονα κρίσιμες πληροφορίες χ' αυτές. Σημειώνουμε ότι βασικό εργαλείο αποτελεί σε όλες αυτές τις μεθοδολογίες το ακριβές δείκτη.

Λήμμα Bolzano.

Διατίθουμε συνάρτηση $f = f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

• f είναι συνεχής στο $[a, b]$

• $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Τότε, υπάρχει ~~τουλάχιστον ένα~~ $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
 Περαιτέρω αριθμός ριζών x_i της $f(x)$ στο (a, b) , τέτοιες ώστε $f(x_i) = 0$.

A. Μέθοδος της Διχοτόμησης

$$i) \quad x_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

ii) Για το σφάλμα των υπολογισμών σε κάθε βήμα η χωρίζεται τα έξης:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \iff \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \xLeftrightarrow[\text{για } \varepsilon > 0] b-a \leq \varepsilon \cdot 2^n \iff$$

$$\iff 2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \iff \ln 2^n \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

$$\iff n \cdot \ln 2 \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

: Το ελάχιστο πλήθος βημάτων για να επανέλθει η συγκεκριμένη ανοχή ε .

Υπ' όψιν ότι:

x^* : 4 αλφριθμικά
ρίζα-δύο

iii) Ταχύτητα σύγκλισης = 1 ("γραμμική" σύγκλιση)



B. Μέθοδος Εσθαρμένους Θρόνους (Regular Falsi)

i)
$$x_{n+1} = \frac{a_n \cdot f(b_n) - b_n \cdot f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

ii) Ταχύτητα σύγκλισης =



Γ. Μέθοδος Σταθερού σημείου

δηλ. μπορούμε να επιλύσουμε ως προς τη μεταβλητή x .

i) Ορισμός. Διαθέτουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$ για κάποιο σημείο $x = x^*$. Το σημείο αυτό χαρακτηρίζεται ως σταθερό σημείο της εξίσωσης $f(x) = 0$ κ' αποτελεί ρίζα της, δηλ. ισχύει ότι $f(x^*) = 0$.

ii)
$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

iii) Θεώρημα - κριτήριο σύγκλισης

Διαθέτουμε τη συνάρτηση $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

Δ $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$

Δ η ϕ είναι συστολή με σταθερά $L < 1$, δηλαδή ισχύουν τα εξής:

$$\begin{cases} \phi \in C^1[a, b] \Leftrightarrow \text{η συνάρτηση } \phi'(x) \text{ είναι συνεχής στο } [a, b] \\ L = \max_{a \leq x \leq b} |\phi'(x)| < 1 \end{cases}$$

Τότε, η ϕ έχει εντός του $[a, b]$ μοναδικό σταθερό σημείο x^* τέτοιο ώστε: $x^* = \phi(x^*)$. Επομένως, για τυχαία επιλεγμένη αρχική τιμή $x_0 \in [a, b]$ η ακολουθία σημείων $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_{n+1} = \phi(x_n)$ είναι καλά ορισμένη κ' συχλίνει στο x^* .

iv) Ταχύτητα σύγκλισης =



Δ. Μέθοδος της Τέμνουσας (Secant)

$$i) \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

ii) Θεώρημα - κριτήριο σύγκλισης.

Διαθέτουμε τη συνάρτηση $f \in C^2(a, b)$, τέτοια ώστε x^* : ρίζα της $f(x)$ στο (a, b) &

$$\Delta f'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$$

$$\Delta f''(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$$

Τότε, εντός του (a, b) (ή ενός υποδιαστήματος αυτού) για κατάλληλη επιλογή x_1, x_0 η ακολουθία προσεγγίσεων $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγεται με τη μέθοδο της Τέμνουσας είναι καλά ορισμένη & συχνηνύει στο x^* .

iii) Παρατηρήσεις.

i) Η μέθοδος απαιτεί μόνο τη γνώση της f & όχι της f' .

ii) Απαιτείται μια καλή επιλογή των x_1, x_0 για να συχνηνύει.

iii) Ακόμη & αν η f' είναι γνωστή είναι οικονομικότερη της NR, διότι απαιτεί μόνο τον υπολογισμό της $f(x_n)$ ανά βήμα.

α) Ταχύτητα σύγκλισης $\cong 1.62$



Ε. Μέθοδος των Newton-Raphson (NR)

$$i) \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Ο επαναληπτικός τύπος αυτός χρησιμοποιείται στη περίπτωση που η ποσότητα που ζητούμεως ρίζας της συνάρτησης $f(x)$ ισούται με 1. Σε περίπτωση ρίζας x^* με διαφορετική ποσότητα $m \geq 2$, χρησιμοποιούμε τους

τύπους:

$$\Delta \quad x_{n+1} = x_n - m \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

για γνωστή πολλαπλότητα $m \geq 2$.

$$\Delta \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) \cdot f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n) \cdot f''(x_n)}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

για άγνωστη πολλαπλότητα $m \geq 2$.

ii) Θεώρημα - κριτήριο σύγκλισης

Εάν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$\Delta f(x) \in C^2[a, b]$$

$$\Delta f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$\Delta f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\Delta \text{ η } f'(x) \text{ δώ αληθινή πρόσημο στο } [a, b]$$

$$\Delta \text{ Εάν } c \text{ είναι το άκρο του } [a, b] \text{ για το οποίο η } |f(x)| \text{ είναι μικρότερη} \\ \text{ε' ισχύει ταυτόχρονα ότι } \left| \frac{f(c)}{f'(c)} \right| \leq b-a$$

τότε, για κάθε $x_0 \in [a, b]$ η μέθοδος NR συγκλίνει ταχύτητα στη μοναδική ρίζα x^* της $f(x)$ στο $[a, b]$

iii) Ταχύτητα σύγκλισης = 2

