$\boxed{13^{\text{ο}}\ \text{ΜΑΘΗΜΑ}}$

$\boxed{\text{ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΠΔ}}$

Σημειώσεις για τον Σπύρο Μαραγκάκη
κ' τον Γιώργο Βασιλείδη. Πάρης Στράτης 2020

Θέμα 4 / Σεπτέμβριος 2018

(α). $\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b R^2(x)dx}$: όγκος εκ' περιστροφής ενός στερεού χωρίου

Διαθέτουμε τα δεδομένα:

x	0 (x_0)	0.6 (x_1)	1.2 (x_2)	1.4 (x_3)	1.6 (x_4)	2 (x_5)	4 (x_6)	6 (x_7)	8 (x_8)	8.5 (x_9)
$R(x)$	6.2 ($R(x_0)$)	5.8 ($R(x_1)$)	4.0	3.8	4.4	5.8	7.6	8.2	9.8	10.0 ($R(x_9)$)

Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος V με χρήση κατάλληλου συνδυασμού αριθμητικών μεθόδων.

Παρατηρούμε ότι μεταξύ των παραπάνω δεδομένων κόμβων δεν διατηρείται σταθερό βήμα. Επομένως, διακρίνουμε ομάδες κόμβων με ενιαίες τιμές βημάτων ως εξής:

- Ομάδα Α: $x_0=0, x_1=0.6, x_2=1.2$ με $h_A=0.6$ (Απλός Simpson 1/3)
- Ομάδα Β: $x_2=1.2, x_3=1.4, x_4=1.6$ με $h_B=0.2$ (Απλός Simpson 1/3)
- Ομάδα Γ: $x_4=1.6, x_5=2$ με $h_\Gamma=0.4$ (Απλός τραπεζίου)
- Ομάδα Δ: $x_5=2, x_6=4, x_7=6, x_8=8$ με $h_\Delta=2$ (Απλός Simpson 3/8)
- Ομάδα Ε: $x_8=8, x_9=8.5$ με $h_E=0.5$ (Απλός τραπεζίου).

Έτσι, έχουμε ότι:

$$V = \pi \cdot \int_0^{8.5} R^2(x)dx = \underbrace{\pi \cdot \int_0^{1.2} R^2(x)dx}_{V_1} + \underbrace{\pi \cdot \int_{1.2}^{1.6} R^2(x)\cdot dx}_{V_2} + \underbrace{\pi \cdot \int_{1.6}^{2} R^2(x)dx}_{V_3} + \underbrace{\pi \cdot \int_{2}^{8} R^2(x)\cdot dx}_{V_4} + \underbrace{\pi \cdot \int_{8}^{8.5} R^2(x)\cdot dx}_{V_5}$$

$$\Leftrightarrow V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

όπου:

$$V_{1_{\text{προσ.}}} = \pi \cdot \frac{h_A}{3}\left(R^2(x_0) + 4\cdot R^2(x_1) + R^2(x_2)\right) = \pi \cdot \frac{0.6}{3}\cdot\left(R^2(0) + 4\cdot R^2(0.6) + R^2(1.2)\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{1_{\text{προσ.}}} = 37.800 \cdot \pi}$$

$$V_{2_{προσ.}} = π \cdot \frac{h_{Β}}{3}\left(R^2(x_2) + 4R^2(x_3) + R^2(x_4)\right) = π \cdot \frac{0.2}{3} \cdot \left(R^2(1.2) + 4 \cdot R^2(1.4) + R^2(1.6)\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{2_{προσ.}} = 6.208\,π}$$

$$V_{3_{προσ.}} = π \cdot \frac{h_{Γ}}{1}\left(R^2(x_4) + R^2(x_5)\right) = π \cdot \frac{0.4}{1} \cdot \left(R^2(1.6) + R^2(2)\right) \Leftrightarrow \boxed{V_{3_{προσ.}} = 10.600\,π}$$

$$V_{4_{προσ.}} = π \cdot \frac{3h_{Δ}}{8} \cdot \left(R^2(x_5) + 3 \cdot R^2(x_6) + 3 \cdot R^2(x_7) + R^2(x_8)\right)$$

$$= π \cdot \frac{3 \cdot 2}{8} \cdot \left(R^2(2) + 3 \cdot R^2(4) + 3 \cdot R^2(6) + R^2(8)\right) \Leftrightarrow \boxed{V_{4_{προσ.}} = 358.510\,π}$$

$$V_{5_{προσ.}} = π \cdot \frac{h_{Ε}}{1}\left(R^2(x_8) + R^2(x_9)\right) = π \cdot \frac{0.5}{1} \cdot \left(R^2(8) + R^2(8.5)\right) \Leftrightarrow \boxed{V_{5_{προσ.}} = 49.010\,π}$$

Μην κοροϊδεύεις το "εννιά" μου...

Οπότε:

$$V_{προσ.} = V_{1_{προσ.}} + V_{2_{προσ.}} + V_{3_{προσ.}} + V_{4_{προσ.}} + V_{5_{προσ.}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_{προσ.} = 1451.7928}$$ ← Λίγο πριν την Άλωση της Πόλης

(β).

$$\boxed{S = 2π \cdot \int_a^b \underbrace{R(x) \cdot \sqrt{1 + (R'(x))^2}}_{f(x)} \cdot dx}$$: Εμβαδό της επιφάνειας ενός στερεού εκ περιστροφής

Διαθέτουμε τα δεδομένα:

x	0 (x_0)	2 (x_1)	4 (x_2)	6 (x_3)	8 (x_4)
$R(x)$	6.2 ($R(x_0)$)	5.5	4.3	5.6	6.9 ($R(x_4)$)

, με $h=2$

Ζητούμενο είναι ο αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος S. Επειδή για τους παραπάνω κόμβους το βήμα διατηρείται σταθερό, θα χρησιμοποιήσουμε το σύνθετο κανόνα του Simpson 1/3 ως εξής:

$$S = 2π \cdot \int_0^8 f(x)dx \cong 2π \cdot \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$$

$$= 2π \cdot \frac{2}{3}\left(f(0) + 4f(2) + 2f(4) + 4f(6) + f(8)\right)$$

όπου:

$$\begin{cases} f(0)=R(0)\cdot\sqrt{1+(R'(0))^2} \\ f(2)=R(2)\cdot\sqrt{1+(R'(2))^2} \\ f(4)=R(4)\cdot\sqrt{1+(R'(4))^2} \\ f(6)=R(6)\cdot\sqrt{1+(R'(6))^2} \\ f(8)=R(8)\cdot\sqrt{1+(R'(8))^2} \end{cases}$$

Όσον αφορά τις τιμές των $R'(x_i)$ χρησιμοποιούμε τους παρακάτω κανόνες αριθμητικής παραγώγισης ως εξής:

προς τα εμπρός $O(h^2)$

$$\begin{cases} R'(0)=\dfrac{-R(4)+4R(2)-3R(0)}{2\cdot 2}=-0.35 \\ R'(2)=\dfrac{-R(6)+4R(4)-3R(2)}{2\cdot 2}=-0.475 \\ R'(4)=\dfrac{R(6)-R(2)}{2\cdot 2}=0.025 \\ R'(6)=\dfrac{3\cdot R(6)-4R(4)+R(2)}{2\cdot 2}=0.650 \\ R'(8)=\dfrac{3R(8)-4R(6)+R(4)}{2\cdot 2}=0.650 \end{cases}$$

κεντρικός $O(h^2)$

προς τα πίσω $O(h^2)$

Επομένως, βλέπουμε ότι:

x	0	2	4	6	8
R(x)	6.2	5.5	4.3	5.6	6.9
R'(x)	-0.35	-0.475	0.025	0.650	0.650
f(x)	6.569	6.086	4.301	6.679	8.229

κ' έτσι: $S_{προσ.}=2\pi\cdot\frac{2}{3}(6.569+4\cdot 6.086+2\cdot 4.301+4\cdot 6.679+8.229)$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_{προσ.}=311.97}$$