02-06-20

ΠΑΡΗΣ ΣΤΡΑΤΗΣ 2020
Σημειώσεις για τον Γιώργο Βαβελίδη
κ' τον Σπύρο Μαραγγέλη

Αριθμητική παραγώγιση

Άσκηση. Χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές τάξεως $O(h^4)$ να υπολογίσετε το $f'(0.5)$ για τη συνάρτηση $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ για $h = 0.25$ κ' να το συγκρίνετε με την αντίστοιχη πραγματική τιμή.

Απάντηση.

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

1ος τρόπος

$$\Rightarrow f'(x) = -0.4 \cdot x^3 - 0.45x^2 - 1 \cdot x - 0.25$$

$$\xrightarrow{x=0.5} f'(0.5) = -0.4 \cdot 0.5^3 - 0.45 \cdot 0.5^2 - 1 \cdot 0.5 - 0.25$$

$$\Rightarrow f'(0.5) = -0.05 - 0.1125 - 0.5 - 0.25$$

η ακριβής τιμή

$$\Rightarrow \boxed{f'(0.5)_{ακρ} = -0.9125}$$

Αυτή είναι η πραγματική τιμή της $f'(x)$ στο $x = 0.5$

2ος τρόπος

Χρησιμοποιούμε κεντρικές διαφορές τάξεως $O(h^4)$ ως εξής:

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8 \cdot f(x_{i+1}) - 8 \cdot f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h} + O(h^4)$$

όπου

$$\begin{cases} x_i = 0.5 \\ x_{i+1} = x_i + h = 0.5 + 0.25 = 0.75 \\ x_{i+2} = x_i + 2h = 0.5 + 2 \cdot 0.25 = 1 \\ x_{i-1} = x_i - h = 0.5 - 0.25 = 0.25 \\ x_{i-2} = x_i - 2h = 0.5 - 2 \cdot 0.25 = 0 \\ h = 0.25 \end{cases}$$

Οπότε:

$$f'(0.5) = \frac{-f(1) + 8\cdot f(0.75) - 8\cdot f(0.25) + f(0)}{12\cdot 0.25}$$

όπου:

$$\begin{cases} f(1) = -0.1 - 0.15 - 0.5 - 0.25 + 1.2 = 0.2 \\ f(0.75) = -0.1\cdot(0.75)^4 - 0.15(0.75)^3 - 0.5(0.75)^2 - 0.25(0.75) + 1.2 \\ \qquad = 0.6117 \\ f(0.25) = -0.1\cdot(0.25)^4 - 0.15\cdot(0.25)^3 - 0.5\cdot(0.25)^2 - 0.25\cdot(0.25) + 1.2 \\ \qquad = 1.0977 \\ f(0) = 1.2 \end{cases}$$

Άρα:

$$f'(0.5) = \frac{-0.2 + 8\cdot 0.6117 - 8\cdot 1.0977 + 1.2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(0.5)_{\text{προσ.}} = -0.9627}$$

Επομένως, το σφάλμα της διαδικασίας αυτής είναι το εξής:

$$\left| f'(0.5)_{\text{ακρ.}} - f'(0.5)_{\text{προσ.}} \right| = \left| -0.9125 + 0.9627 \right| = 0.0502.$$

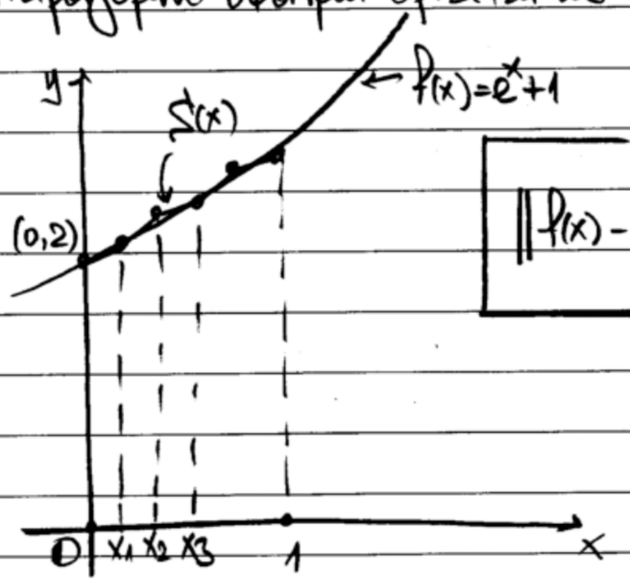
#

Θέμα 3/ 01-04-17 (Πρόοδος)

β) $f(x)=e^x+1$, $x\in[0,1]$

$$x_i = x_0 + ih,\quad i\in\{0,1,\dots,n\}$$

Γνωρίζουμε ότι εάν $S(x)$ είναι μια γραμμική Spline που παρεμβάλλεται στα σημεία της $f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$ με βήμα h, τότε το παραγόμενο σφάλμα ορίζεται ως εξής:



$$\boxed{\|f(x)-S(x)\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_\infty} \quad 1(*)$$

: απόλυτο σφάλμα της γραμμικής Spline

Οπότε:

$$\text{απόλυτο σφάλμα} \le 10^{-6} \overset{\text{από } 1(*)}{\Longleftrightarrow} \|f(x)-S(x)\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''(x)\|_\infty \le 10^{-6}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{h^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_\infty \le 10^{-6} \Longleftrightarrow h^2\cdot\|f''(x)\|_\infty \le 8\cdot 10^{-6}$$

$$\Longleftrightarrow h^2 \le \frac{8\cdot 10^{-6}}{\|f''(x)\|_\infty} \overset{h>0}{\Longleftrightarrow} h \le \sqrt{\frac{8\cdot 10^{-6}}{\|f''(x)\|_\infty}}$$

όπου: $f(x)=e^x+1 \Rightarrow f'(x)=e^x \Rightarrow f''(x)=e^x$.

$$\|f''(x)\|_\infty = \|e^x\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} e^x \overset{e^x\text{: ↗ για } x\in[0,1]}{=\!=\!=\!=\!=} e^1 = e$$

Άρα:

$$h \le \sqrt{\frac{8\cdot 10^{-6}}{e}} \Leftrightarrow \boxed{h \le 0.0017}$$

#

Τύποι προσέγγισης παραγώγων με προς τα **εμπρός** διαφορές

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \tag{8}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \tag{9}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \tag{10}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2} + O(h^2) \tag{11}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3} + O(h) \tag{12}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3} + O(h^2) \tag{13}$$

Τύποι προσέγγισης παραγώγων με **κεντρικές** διαφορές

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \tag{20}$$

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h} + O(h^4) \tag{21}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{22}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2} + O(h^4) \tag{23}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3} + O(h^2) \tag{24}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3} + O(h^4)$$

Τύποι προσέγγισης παραγώγων με προς τα **πίσω** διαφορές

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{14}$$

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h} + O(h^2) \tag{15}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h) \tag{16}$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2} + O(h^2) \tag{17}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3} + O(h) \tag{18}$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3} + O(h^2) \tag{19}$$