

Θέμα 4 | Σεπτέμβριος 2019

Διαδίδουμε τα παρακάτω δεδομένα:

x_i	$0 \leftarrow x_0$	$3/4 \leftarrow x_1$
$f(x_i)$	$f(0)$	$f(3/4)$
	$\uparrow f(x_0)$	$\uparrow f(x_1)$

12 διήγημα

Κατασκευάζουμε το πολυώνυμο παρεμβολής $P(x)$, το οποίο παρεμβάλλεται (πιο σωστά διέρχεται από) στα παραπάνω σημεία. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Lagrange (κλασική μορφή) ως εξής:

$$P(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x)$$

$$\text{όπου: } \begin{cases} L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-3/4}{0-3/4} = -\frac{4}{3} \cdot (x-3/4) \\ L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-0}{3/4-0} = \frac{4}{3} \cdot x \end{cases}$$

$$\text{Έτσι: } P(x) = f(0) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (x-3/4) + f(3/4) \cdot \frac{4}{3} \cdot x$$

$$\Rightarrow P(x) = f(0) \cdot \left(1 - \frac{4x}{3}\right) + \frac{4}{3} f(3/4) \cdot x$$

: Πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange στα παραπάνω δεδομένα σημεία.

2ο διήγημα

Θεωρούμε στη συνέχεια τον παρακάτω κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &\approx \int_0^1 P(x) dx \stackrel{\text{από 1α)}}{=} \int_0^1 \left(f(0) \cdot \left(1 - \frac{4x}{3}\right) + \frac{4}{3} f(3/4) \cdot x \right) dx \\ &= f(0) \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{4x}{3}\right) dx + \frac{4}{3} f(3/4) \int_0^1 x dx = f(0) \cdot \left[x - \frac{2x^2}{3} \right]_0^1 + \frac{4}{3} f(3/4) \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= f(0) \cdot \left(1 - \frac{2}{3} - 0\right) + \frac{4}{3} f(3/4) \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(3/4) \end{aligned}$$

-2-

Διαδίδουμε δηλαδή τον ακόλουθο κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$I = \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{I_{\text{ακρ.}}} \approx \underbrace{\frac{1}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(\frac{3}{4})}_{I_{\text{προς.}}} : 2(*)$$

$\nwarrow w_0 = 1/3 \quad \nearrow w_1 = 2/3$

3^{ος} βήμας

Ζητούμενο στη συνέχεια είναι η επέκταση του παραπάνω κανόνα στο τυχαίο διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$, δηλαδή ο υπολογισμός οποιοδήποτε ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$ αναιχώντας το στ' ολοκλήρωμα εντός του $[0, 1]$.

Χρησιμοποιούμε λοιπόν το μετασχηματισμό:

$$x = a + t(b-a) \Rightarrow (x)' dx = (a + t(b-a))' dt \Rightarrow dx = (b-a) dt$$

$$\begin{aligned} \text{όπου, } \int \text{για } x=a &\Rightarrow a + t(b-a) = a \Rightarrow t \cdot (b-a) = 0 \xrightarrow{b-a \neq 0} t=0 \\ \int \text{για } x=b &\Rightarrow a + t(b-a) = b \Rightarrow t \cdot (b-a) = b-a \Rightarrow t=1 \end{aligned}$$

Ε' έτσι βλέπουμε τελικά ότι:

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot \underbrace{\int_0^1 f(a + t(b-a)) dt}_{\substack{\uparrow \text{Προσχηχίζεται από} \\ \text{τον παραπάνω ολο-} \\ \text{κληρωτικό κανόνα 2(*)}}} \approx (b-a) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot f(a + \overset{0}{t \cdot (b-a)}) + \frac{2}{3} f(a + \overset{3/4}{t \cdot (b-a)}) \right)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \cdot \left(\frac{1}{3} f(a) + \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b\right) \right)$$

~~1~~

Θέμα 4 / Ιούνιος 2019

(6).

12 διψες: Διαδίδουμε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \alpha \cdot f(x_1) + \alpha \cdot f(x_2) \quad : 3(k)$$

Ζητούμενο είναι ο κανόνας αυτός να ολοκληρώνεται ακριβώς ποσώνουμε 2 σημεία.

Hint: Διαδίδουμε 3 αχλίστους: α, x_1, x_2 .

Άρα, θα χρησιμοποιήσουμε 3 ποσώνουμε ενός κ' 2 σημεία για τον υπολογισμό των παραπάνω αχλίστων.

$$\Delta \text{ Εἰν } f(x) = 1, \text{ τότε: } 3(k) \Leftrightarrow \int_{-1}^1 1 \cdot dx = \alpha \cdot 1 + \alpha \cdot 1 \Leftrightarrow [x]_{-1}^1 = 2\alpha \Leftrightarrow 1 - (-1) = 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\Delta \text{ Εἰν } f(x) = x, \text{ τότε: } 3(k) \Leftrightarrow \int_{-1}^1 x \cdot dx = \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 0}$$

$$\Delta \text{ Εἰν } f(x) = x^2, \text{ τότε: } 3(k) \Leftrightarrow \int_{-1}^1 x^2 \cdot dx = \alpha \cdot x_1^2 + \alpha \cdot x_2^2 \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}}$$

$$\text{Οπότε: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_1^2 + (-x_1)^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ 2x_1^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\text{Επιλέγουμε λοιπόν } \boxed{x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}} \text{ κ' } \boxed{x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Διαδίδουμε λοιπόν τον κανόνα:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad : 4(k)$$

που συνίσταται είναι ο κανόνας των Gauss-Legendre για 2 σημεία.

Λεξιμα.

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^4 (x-1)^3 dx$ με 3 τρόπους.

(i). Ακριβώς υπολογισμός

$$I = \int_{-2}^4 (x-1)^3 dx = \left[\frac{(x-1)^4}{4} \right]_{-2}^4 = \frac{1}{4} \cdot ((4-1)^4 - (-2-1)^4) = \frac{1}{4} (3^4 - (-3)^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_{\text{ακριβ.}} = 0}$$

(ii). Αριθμητικός υπολογισμός με την παραπάνω μέθοδο

$$I = \int_{-2}^4 (x-1)^3 dx \xrightarrow[\mu dx=3dt]{x=\frac{4-(-2)}{2}t+\frac{4-2}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=3t+1}} \int_{-1}^1 (3t+1-1)^3 \cdot 3 dt = 81 \int_{-1}^1 t^3 dt$$

$$\stackrel{\text{από 4(κ)}}{\cong} 81 \cdot \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{I_{\text{προς.}} = 0}$$

(iii). Αριθμητικός υπολογισμός με χρήση του κανόνα του Simpson 3/8

$$\begin{cases} h = \frac{b-a}{3} = \frac{4-(-2)}{3} = 2: \text{δύομα} \\ n = 3: \text{πλήθος υποδιαστημάτων} \\ n+1 = 4: \text{πλήθος κόμβων, με } x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4 \end{cases}$$

Οπότε:

$$I = \int_{-2}^4 (x-1)^3 dx \cong \frac{3 \cdot 2}{8} (f(-2) + 3f(0) + 3f(2) + f(4)) = \dots \Leftrightarrow \boxed{I_{\text{προς.}} = 0}$$

Παρατήρηση. Και οι δύο παραπάνω αριθμητικές μέθοδοι υπολογίζουν επακριβώς την τιμή του I , διότα ολοκληρώνεται ακριβώς ποτυύνηται μέχρι 3^{ου} βαθμού.

??



Θέμα 5 / Ιούνιος 2019

(α). Διαθέτουμε το παρακάτω ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' = r \cdot y, & \text{με } r < 0 \\ y(0) = y^{(0)} = 1 \end{cases}$$

Ε' τω αριθμητική μέθοδο (θ-μέθοδος):

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + h \cdot \left((1-\theta) \cdot f(t^{(n)}, y^{(n)}) + \theta \cdot f(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) \right), \text{ με } \theta \in [0, 1]$$

Εφαρμόζουμε την απόλυτη ευσυνείδηση της μεθόδου αυτής ως εξής:

$$5(*) \Rightarrow y^{(n+1)} = y^{(n)} + h \cdot \left((1-\theta) \cdot r \cdot y^{(n)} + \theta \cdot r \cdot y^{(n+1)} \right)$$

$$\Rightarrow y^{(n+1)} = y^{(n)} + h \cdot (1-\theta) \cdot r \cdot y^{(n)} + h \cdot \theta \cdot r \cdot y^{(n+1)}$$

$$\Rightarrow (1 - h\theta r) \cdot y^{(n+1)} = (1 + h(1-\theta)r) \cdot y^{(n)}$$

$$\stackrel{:(1-h\theta r) \neq 0}{\Rightarrow} \boxed{y^{(n+1)} = \frac{1 + h(1-\theta)r}{1 - h\theta r} \cdot y^{(n)}} \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{1 + h(1-\theta)r}{1 - h\theta r} \cdot y^{(n-1)} \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{1 + h(1-\theta)r}{1 - h\theta r} \cdot \frac{1 + h(1-\theta)r}{1 - h\theta r} \cdot y^{(n-2)} = \left(\frac{1 + h(1-\theta)r}{1 - h\theta r} \right)^2 \cdot y^{(n-2)}$$

$$\Rightarrow y^{(n)} = \left(\frac{1 + h(1-\theta)r}{1 - h\theta r} \right)^3 \cdot y^{(n-3)}$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow \boxed{y^{(n)} = \left(\frac{1 + h(1-\theta)r}{1 - h\theta r} \right)^n \cdot y^{(0)}} \quad \forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

1

-6-

Τυπρίζουμε από τη θεωρία, ότι μια επαναληπτική (δηλ. αριθμητική) μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής, όταν ισχύει ότι:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} y^{(n)} = 0}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ιδιότητα στον τύπο (6*) πρέπει να ισχύει ότι:

$$\left| \frac{1+h \cdot (1-\theta) \cdot n}{1-h \cdot \theta \cdot n} \right| < 1 \Leftrightarrow |1+h \cdot (1-\theta) \cdot n| < |1-h \cdot \theta \cdot n|$$

$$\begin{array}{l} \xleftrightarrow[n < 0 \text{ ή } h, \theta > 0]{\text{Άρα } 1-h\theta n > 0} \\ |1+h(1-\theta) \cdot n| < 1-h\theta n \Leftrightarrow -(1-h\theta n) < 1+h(1-\theta) \cdot n < 1-h\theta n \end{array}$$

$$\xleftrightarrow{+(-)} -2+h\theta n < h \cdot (1-\theta) \cdot n < -h\theta n$$

↑ Ισχύει ταυτότητα, διότι:

$$h \cdot (1-\theta) \cdot n < -h \cdot \theta \cdot n \xleftrightarrow[n < 0]{\begin{array}{l} \cdot h \cdot n \\ \text{από} \\ 0 < \theta < 1 \end{array}} 1-\theta > -\theta \Leftrightarrow 1 > 0 \quad \text{Ισχύει}$$

$$\Leftrightarrow -2+h\theta n < h \cdot (1-\theta) \cdot n$$

$$\Leftrightarrow -2+h\theta n - h n + h\theta n < 0 \Leftrightarrow \boxed{h n \cdot (2\theta - 1) < 2} : \text{Συνθήκη ευσταθειας}$$

Παρατήρηση.

$$\Delta \text{ Εάν } \theta \in [0.5, 1], \text{ τότε } (2\theta - 1) \geq 0 \xrightarrow[n < 0]{\begin{array}{l} \cdot h n < 0 \\ \text{από} \end{array}} h \cdot n \cdot (2\theta - 1) \leq 0 < 2.$$

Δηλαδή, για κάθε επιλογή του $h > 0$ η συγκεκριμένη μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής.

$$\Delta \text{ Εάν } \theta \in [0, 0.5), \text{ τότε } h n \cdot (2\theta - 1) < 2 \Leftrightarrow \boxed{h < \frac{2}{n \cdot (2\theta - 1)}} : \text{συνθήκη ευσταθειας}$$

Δηλαδή, για συγκεκριμένες μονάδες τής του h η συγκεκριμένη μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής.

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + h \cdot \left((1-\theta) \cdot f(t^{(n)}, y^{(n)}) + \theta \cdot f(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) \right)$$

- 7 -

Σημείωση

(i). Για $\theta=0$, έχουμε την άμεση Ειλετ, με συνθήκη ευσταθίας: $h < -\frac{2}{\lambda}$

(ii). Για $\theta=1$, έχουμε την πεπληχμένη Ειλετ, η οποία είναι ευσταθής $\forall h > 0$.

(iii). Για $\theta=\frac{1}{2}$, έχουμε την πεπληχμένη μέθοδο του τραπεζίου:

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + \frac{h}{2} \left(f(t^{(n)}, y^{(n)}) + f(t^{(n+1)}, y^{(n+1)}) \right)$$

όπου αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος την $y^{(n+1)}$ με $\tilde{y}^{(n+1)} = y^{(n)} + h f(t^{(n)}, y^{(n)})$ προκύπτει η μέθοδος πρόβλεψης-διόρθωσης του Heun.

(b). Διαθέτουμε το παιτ

$$\begin{cases} y' = -2ty^2, & \text{για } t \in [0, 1.5] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

το οποίο ε' επιλύουμε κατά τη γνωστή με τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης του Heun.

~~1~~

Εκτίμηση σφάλματος πολυωνυμικής παρεμβολής

Πρόταση. Αν $f(x)$ είναι η παρεμβαλλόμενη συνάρτηση ε' $p(x)$ το πολυώνυμο παρεμβολής αυτής, στα σημεία $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, τότε μια εκτίμηση του σφάλματος στο σημείο $\hat{x}$ είναι η εξής:

$$\|f(x) - p(x)\|_{\infty} \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=0}^n (\hat{x} - x_i) \right| \cdot \frac{\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

~~1~~

Θέμα 3 / Ιουνίος 2019

(α).

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1, x_1 = 2.25$ & $x_2 = 4$, με $n=2 \Rightarrow n+1=3$: πλήθος κόμβων

$p(x) = -0.0381x^2 + 0.5238x + 0.5142$: Πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange.

Δ Πραγματικό (απόλυτο) σφάλμα στο $x=2$:

$$|f(2) - p(2)| = 0.00469$$

Δ Μια εκτίμηση του σφάλματος για $\hat{x}=2$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|f(2) - p(2)\|_2 &\leq \max_{1 \leq x \leq 4} \left| \prod_{i=0}^2 (2 - x_i) \right| \cdot \frac{\max_{1 \leq x \leq 4} |f^{(3)}(x)|}{(2+1)!} \\ &= \max_{1 \leq x \leq 4} |(2-1) \cdot (2-2.25) \cdot (2-4)| \cdot \frac{\max_{1 \leq x \leq 4} \left| \frac{3}{8} \cdot x^{-5/2} \right|}{3!} \\ &= \frac{|2-1| \cdot |2-2.25| \cdot |2-4|}{3!} \cdot \frac{3}{8} \cdot \max_{1 \leq x \leq 4} |x^{-5/2}| \rightarrow 1 \\ &= 0.03125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} x^{-3/2} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8} x^{-5/2} \end{aligned}$$



Θέμα 5 / Μάιος 2018

(α). Δίνεται το παρακάτω ΠΔΤ

$$\begin{cases} y' = -5y, & t \in [0, 2] \text{ με } h = -5 \text{ & } h = 0.5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η άριστη Euler είναι απολύτως ευσταδής όταν $h < -\frac{2}{\lambda}$, ενώ αντίθετα η πεπλεγμένη Euler είναι απολύτως ευσταδής $\forall h > 0$.

Οπότε, βλέπουμε ότι:

$$h < -\frac{2}{\lambda} \Leftrightarrow 0.5 < -\frac{2}{-5} \Leftrightarrow 0.5 < 0.4 \text{ Δείχνει.}$$

Άρα, η άριστη Euler δει είναι απολύτως ευσταδής για το συγκεκριμένο βήμα $h=0.5$, πρόβλημα που προφανώς δει παρουσιάζει η πεπλεγμένη Euler. Επιδιόκνουμε το συγκεκριμένο ΠΔΤ με την πεπλεγμένη Euler.

