

Θέμα 1

Έστω η εξίσωση $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$.

(α) [8] Κάντε πρόχειρα τη γραφική της παράσταση και δείξτε (και θεωρητικά) ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες, $-\rho, 0$ και ρ , στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και μάλιστα $\rho \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$.

(β) [10] Υπολογίστε τις 3 πρώτες προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης με αρχικό διάστημα το $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. Πόσο πολύ απέχει η τρίτη προσέγγιση από την ρ ;

(γ) [10] Θεωρείστε την ακολουθία $(x_n)_{n=0,1,\dots}$ με $x_{n+1} = \phi(x_n)$ με $\phi(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$. Δείξτε ότι η $x_n \rightarrow \rho$, για κάθε $x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Θέμα 2

Τα παρακάτω δεδομένα αποτελούν μετρήσεις μίας ποσότητας y στο χρόνο t

t	10	20	30	40
y	20	60	120	200

(α) [9] Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange που παρεμβάλλει στα παραπάνω δεδομένα.

(β) [15] Γνωρίζοντας ότι τα παραπάνω δεδομένα μπορούν να προσομοιωθούν από το ακόλουθο μοντέλο $y = at + bt^2$ υπολογίστε τις τιμές των a και b (δείχνοντας αναλυτικά τη μεθοδολογία και τον τρόπο υπολογισμού τους).

Θέμα 3

(α) [12] Υπολογίστε το πλήθος των κόμβων που χρειάζονται για την προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(f) = \int_1^2 x \ln(x) dx$ με ακρίβεια 10^{-4} χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 και για τα σημεία (κόμβους) που βρήκατε προσεγγίστε το ολοκλήρωμα. (Δίνεται ότι ο τύπος του σφάλματος για το σύνθετο τύπο του Simpson 1/3 είναι $R_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$.)

(β) [14] Θεωρείστε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης στο διάστημα $[0, 1]$ ο οποίος παράγεται ως εξής: $\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 P(x) dx$, όπου $P(x)$ το γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλλει την $f(x)$ στο $x_0 = 0$ και $x_1 = 3/4$. Υπολογίστε αυτόν το κανόνα στη συνήθη μορφή, $Q_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$, και μετασχηματίστε τον για να κατασκευάσετε έναν απλό κανόνα ολοκλήρωσης που προσεγγίζει το $\int_a^b f(x) dx$, δηλ. για τυχαίο διάστημα $[a, b]$.

Θέμα 4

(α)[10] Για το Π.Α.Τ. $y' = -5y$, $y(0) = 1$, θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή $y(2)$ με βήμα ολοκλήρωσης $h = 0.5$. Εξηγείστε ποιά από τις δύο μεθόδους, την (άμεση) Euler ή την πεπλεγμένη Euler πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, και επιλέξτε την για να δώσετε μια προσέγγιση της $y(2)$.

(β)[12] Για το Π.Α.Τ. του (α) ερωτήματος και με το ίδιο βήμα $h = 0.5$ εφαρμόστε την μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης του Heun: $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, \tilde{y}^{n+1})]$, για την προσέγγιση του $y(2)$. Σχολιάστε και εξηγείστε το αποτέλεσμα σας και σε σχέση με αυτό που πήρατε από το (α) ερώτημα αλλά και με την αναλυτική λύση του Π.Α.Τ.

Στο γραπτό σας να εμφανίζεται αναλυτικά όλη η δουλειά σας, διαφορετικά δεν θα βαθμολογηθεί.
 Η ακρίβεια και πληρότητα των διατυπώσεών, υπολογισμών και των τελικών αποτελεσμάτων σας είναι σημαντική.
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!