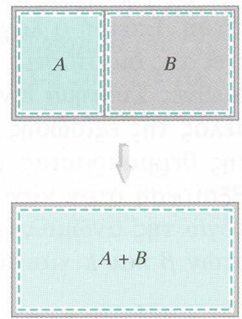
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2-1

Σκοπός: Η εφαρμογή των εξισώσεων ορισμού της πυκνότητας και του ειδικού όγκου.

Το πρόβλημα: *Μια δεξαμενή αερίου, όγκου $V = 10\ m^3$, χωρίζεται με μια μεμβράνη σε δύο άνισα τμήματα Α και Β (Σχήμα Π2-1). Η μάζα του αερίου στο τμήμα Α της δεξαμενής είναι $m_A = 7\ kg$ και η πυκνότητά του στο τμήμα Β είναι $\rho_B = 1{,}5\ kg/m^3$. Κάποια στιγμή η διαχωριστική μεμβράνη καταστρέφεται, με αποτέλεσμα την ανάμειξη των δύο επιμέρους ποσοτήτων του αερίου που περιέχονται στη δεξαμενή. Στη νέα αυτή κατάσταση, ο ειδικός όγκος του αερίου είναι $v = 0{,}625\ m^3/kg$. Να ευρεθεί η αρχική πυκνότητα του αερίου στο τμήμα Α της δεξαμενής.*



Σχήμα Π2-1

Λύση: Η πυκνότητα του αερίου στο τμήμα *Α* της δεξαμενής υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\rho_A = \frac{m_A}{V_A} = \frac{m_A}{V - V_B} \qquad (1)$$

όπου V_B είναι ο όγκος του αερίου στο τμήμα *Β* της δεξαμενής, ο οποίος υπολογίζεται από την εξίσωση:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2-2

Σκοπός: Η εφαρμογή των εξισώσεων ορισμού του μέτρου συμπιεστότητας και του συντελεστή κυβικής διαστολής μιας ουσίας.

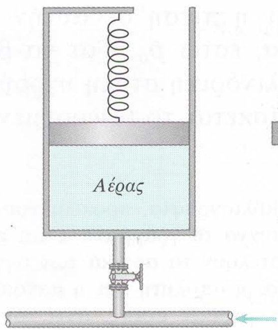
Το πρόβλημα: (α) *Να εκφραστούν το μέτρο συμπιεστότητας, k, και ο συντελεστής κυβικής διαστολής, β, μιας ουσίας συναρτήσει του ειδικού όγκου, v.*
(β) *Η θερμοκρασία ενός τεμαχίου χαλκού αυξάνεται από 395 K στους 400 K. Σε αυτή την περιοχή θερμοκρασίας, το μέτρο* $k = 7{,}6 \times 10^{-12}\ Pa^{-1}$ *και ο συντελεστής* $\beta = 5{,}2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$. *Ποιά μεταβολή πίεσης (σε bar) είναι απαραίτητη για να διατηρηθεί ο όγκος του χαλκού σταθερός;*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2-3

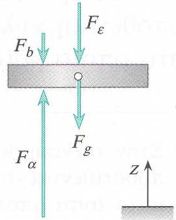
Σκοπός: Ο υπολογισμός της πίεσης ενός ρευστού που περιέχεται σε μια διάταξη κυλίνδρου – εμβόλου.

Το πρόβλημα: *Ένας κύλινδρος είναι εφοδιασμένος με ένα έμβολο, διαμέτρου d = 10 cm και μάζας m = 6 kg, το οποίο κρατιέται από ένα αβαρές ελατήριο, όπως φαίνεται στο Σχήμα Π2-3α. Το ελατήριο είναι πλήρως εκταμένο (χωρίς να ασκεί δύναμη) όταν το έμβολο ακουμπά στον πυθμένα του κυλίνδρου. Ο κύλινδρος είναι συνδεδεμένος με μια γραμμή μεταφοράς αέρα υπό υψηλή πίεση. Κάποια στιγμή, η βαλβίδα ανοίγει για λίγο, επιτρέποντας έτσι την εισροή ποσότητας αέρα στον κύλινδρο, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση του εμβόλου προς τα άνω και, ως εκ τούτου, τη συμπίεση του ελατηρίου. Όταν το όλο σύστημα ισορροπήσει, η πίεση του αέρα στον κύλινδρο είναι* p_1 *= 250 kPa και η απόσταση της βάσης του εμβόλου από τον πυθμένα του κυλίνδρου* x_1 *= 6,5 cm. Η πίεση περιβάλλοντος, έξω από τον κύλινδρο, είναι* p_b *= 100 kPa. Με νέο άνοιγμα της βαλβίδας επιτρέπεται να εισέλθει στον κύλινδρο μια πρόσθετη ποσότητα αέρα, η οποία προκαλεί νέα μετατόπιση του εμβόλου προς τα άνω κατά Δx = 1,5 cm. Να υπολογιστούν: (α) η σταθερά k του ελατηρίου και (β) η τελική πίεση,* p_2*, του αέρα στον κύλινδρο.*

Λύση: **α** Θεωρούμε τις *κατακόρυφες* δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο όταν αυτό ισορροπεί σε απόσταση x_1 από τον πυθμένα του κυλίνδρου. Αυτές είναι: (i) η δύναμη βαρύτητας $F_g = mg$, η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας του εμβόλου, (ii) η δύναμη $F_\varepsilon = kx_1$, την οποία ασκεί το συμπιεσμένο ελατήριο στην επάνω βάση του εμβόλου, (iii) η δύναμη $F_b = p_b A$, την οποία



Σχήμα Π2-3α



Σχήμα Π2-3β

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-1

Σκοπός: Η εφαρμογή του μοντέλου ιδανικού αερίου για τη μελέτη πραγματικού αερίου.

Το πρόβλημα: *Στον νοειδή ισοδιαμετρικό σωλήνα που φαίνεται στο Σχήμα Π4-1α περιέχεται υδράργυρος μέχρι ύψος $h_1 = 50$ cm. Το ανοιχτό άκρο του αριστερού σκέλους του σωλήνα κλείνεται αεροστεγώς και εκείνο του δεξιού σκέλους του συνδέεται με μια αντλία κενού, με τη βοήθεια της οποίας αφαιρείται όλη η ποσότητα του αέρα από το σκέλος αυτό. Ο αέρας που περιέχεται αρχικά στα δύο σκέλη του σωλήνα βρίσκεται στις συνθήκες του περιβάλλοντος, πίεση 750 mmHg και θερμοκρασία 20 °C. Να υπολογιστεί η πτώση της στάθμης του υδραργύρου στο αριστερό σκέλος του σωλήνα και η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα στην τελική κατάσταση ισορροπίας.*

Λύση: Έστω x cm η πτώση της στάθμης του υδραργύρου στο αριστερό σκέλος του σωλήνα (Σχήμα Π4-1β). Λόγω της πτώσης αυτής, ο εγκλωβισμένος αέρας, ο οποίος υπό τις συνθήκες αυτές θεωρείται ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο, υφίσταται ισόθερμη εκτόνωση, η οποία περιγράφεται από το *νόμο Boyle*, [Εξ. (4-12)]:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \qquad \text{ή} \qquad p_1 A h_1 = p_2 A (h_1 + x) \tag{1}$$

όπου A είναι η εγκάρσια διατομή του σωλήνα και $(h_1 + x)$ το ύψος της στήλης του αέρα στην τελική κατάσταση. Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς την πίεση p_2 προκύπτει η σχέση:

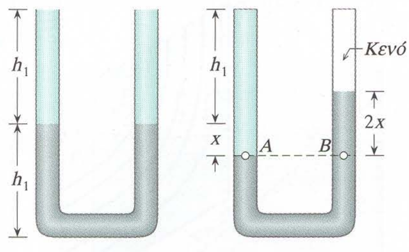
$$p_2 = p_1 \left(\frac{h_1}{h_1 + x} \right) \tag{2}$$

Επειδή η στήλη του υδραργύρου είναι σε στατική ισορροπία, η πίεση στα σημεία A και B (τα οποία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο) είναι η ίδια:

$$p_A = p_B \qquad \text{ή} \qquad p_2 = 2x \ \ \text{(cmHg)} \tag{3}$$

Εξισώνοντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις της πίεσης p_2, προκύπτει η σχέση:

$$p_1 \left(\frac{h_1}{h_1 + x} \right) = 2x \tag{4}$$



Σχήμα Π4-1α **Σχήμα Π4-1β**

Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση τις τιμές της πίεσης $p_1 = 75$ cmHg και του ύψους $h_1 = 50$ cm, καταλήγουμε στην ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$x^2 + 50x - 1875 = 0 \tag{5}$$

Από τις δύο ρίζες της εξίσωσης αυτής αποδεκτή από φυσική άποψη είναι μόνο η $x = 25$ cm. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του x στην εξίσωση (3), προκύπτει ότι η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα στο αριστερό σκέλος του σωλήνα στην τελική κατάσταση ισορροπίας είναι $p_2 = 500$ mmHg.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-1

Σκοπός: Η εφαρμογή του μοντέλου ιδανικού αερίου για τη μελέτη πραγματικού αερίου.

Το πρόβλημα: *Στον νοειδή ισοδιαμετρικό σωλήνα που φαίνεται στο Σχήμα Π4-1α περιέχεται υδράργυρος μέχρι ύψος $h_1 = 50$ cm. Το ανοιχτό άκρο του αριστερού σκέλους του σωλήνα κλείνεται αεροστεγώς και εκείνο του δεξιού σκέλους του συνδέεται με μια αντλία κενού, με τη βοήθεια της οποίας αφαιρείται όλη η ποσότητα του αέρα από το σκέλος αυτό. Ο αέρας που περιέχεται αρχικά στα δύο σκέλη του σωλήνα βρίσκεται στις συνθήκες του περιβάλλοντος, πίεση 750 mmHg και θερμοκρασία 20 °C. Να υπολογιστεί η πτώση της στάθμης του υδραργύρου στο αριστερό σκέλος του σωλήνα και η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα στην τελική κατάσταση ισορροπίας.*

Λύση: Έστω x cm η πτώση της στάθμης του υδραργύρου στο αριστερό σκέλος του σωλήνα (Σχήμα Π4-1β). Λόγω της πτώσης αυτής, ο εγκλωβισμένος αέρας, ο οποίος υπό τις συνθήκες αυτές θεωρείται ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο, υφίσταται ισόθερμη εκτόνωση, η οποία περιγράφεται από το *νόμο Boyle*, [Εξ. (4-12)]:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \qquad \text{ή} \qquad p_1 A h_1 = p_2 A\,(h_1 + x) \tag{1}$$

όπου A είναι η εγκάρσια διατομή του σωλήνα και $(h_1 + x)$ το ύψος της στήλης του αέρα στην τελική κατάσταση. Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς την πίεση p_2 προκύπτει η σχέση:

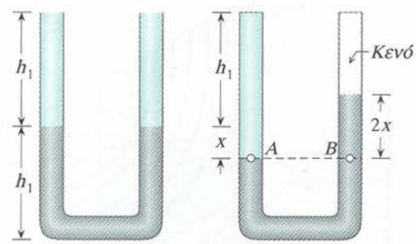
$$p_2 = p_1 \left(\frac{h_1}{h_1 + x} \right) \tag{2}$$

Επειδή η στήλη του υδραργύρου είναι σε στατική ισορροπία, η πίεση στα σημεία A και B (τα οποία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο) είναι η ίδια:

$$p_A = p_B \qquad \text{ή} \qquad p_2 = 2x \ \ (\text{cmHg}) \tag{3}$$

Εξισώνοντας τις δύο παραπάνω εκφράσεις της πίεσης p_2, προκύπτει η σχέση:

$$p_1 \left(\frac{h_1}{h_1 + x} \right) = 2x \tag{4}$$



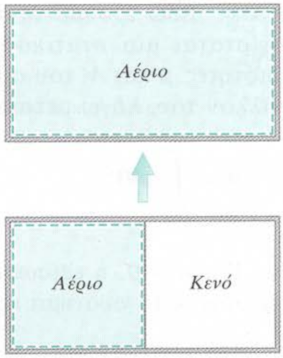
Σχήμα Π4-1α **Σχήμα Π4-1β**

Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση τις τιμές της πίεσης $p_1 = 75$ cmHg και του ύψους $h_1 = 50$ cm, καταλήγουμε στην ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$x^2 + 50x - 1875 = 0 \tag{5}$$

Από τις δύο ρίζες της εξίσωσης αυτής αποδεκτή από φυσική άποψη είναι μόνο η $x = 25$ cm. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του x στην εξίσωση (3), προκύπτει ότι η πίεση του εγκλωβισμένου αέρα στο αριστερό σκέλος του σωλήνα στην τελική κατάσταση ισορροπίας είναι $p_2 = 500$ mmHg.

συστήματος και του περιβάλλοντός του. Ένα τυπικό παράδειγμα διεργασίας στην οποία το έργο που εκτελείται από το σύστημα είναι μηδέν είναι η ***ελεύθερη εκτόνωση***. Για την περιγραφή της διεργασίας αυτής θεωρούμε ένα κλειστό δοχείο το οποίο χωρίζεται με μια μεμβράνη σε δύο ίσα τμήματα (Σχήμα 5-11). Το αριστερό τμήμα του δοχείου περιέχει ένα αέριο (σύστημα) και το δεξιό είναι κενό ($p_0 = 0$). Έστω ότι η μεμβράνη καταστρέφεται και το αέριο εκτονώνεται στην κενή περιοχή, γεμίζοντας όλο το δοχείο. Επειδή η διεργασία αυτή δεν είναι στατικότροπη, το έργο εκτόνωσης δεν μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (5-17), αλλά από την εξίσωση (5-21). Όμως, στη συγκεκριμένη διεργασία εκτόνωσης του αερίου, δεν υπάρχει καμία εξωτερική δύναμη που να αντιδρά στη μετατόπιση των ορίων του συστήματος ($F_0 = 0$). Επομένως, το έργο που εκτελείται από το σύστημα είναι μηδέν.



Σχήμα 5-11 *Ελεύθερη εκτόνωση αερίου.*

Πολυτροπική Διεργασία: Για πολλές στατικότροπες διεργασίες εκτόνωσης και συμπίεσης ιδανικών αερίων, η πίεση p και ο όγκος V του αερίου συνδέονται με τη σχέση:

$$pV^n = C \tag{5-22}$$

όπου C και n είναι σταθερές για κάθε διεργασία. Η αλλαγή της κατάστασης του συστήματος για την οποία ισχύει η εξίσωση (5-22) ονομάζεται ***πολυτροπική διεργασία***. Η σταθερά n στην εξίσωση (5-22) είναι γνωστή ως *πολυτροπικός εκθέτης*. Η τιμή του n εξαρτάται από τη συγκεκριμένη διεργασία και *δε* σχετίζεται με το είδος του αερίου. Αν και ο πολυτροπικός εκθέτης μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από $-\infty$ έως $+\infty$, η πολυτροπική σχέση (5-22) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν $1 \leqslant n \leqslant 5/3$. Με την πολυτροπική διεργασία θα ασχοληθούμε και στην § 9-12.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-4

Σκοπός: Ο υπολογισμός του έργου μετατόπισης για τρείς διαφορετικές στατικότροπες διεργασίες.

Το πρόβλημα: *Θεωρούμε ως σύστημα ένα αέριο περιεχόμενο σε μια διάταξη κυλίνδρου–εμβόλου, το οποίο εκτονώνεται έτσι ώστε να ισχύει κάθε στιγμή η πολυτροπική σχέση (5-22):*

$$pV^n = C \tag{1}$$

Η αρχική πίεση του αερίου είναι $p_1 = 650$ kPa, ο αρχικός όγκος $V_1 = 0{,}02$ m^3 και ο τελικός όγκος $V_2 = 0{,}06$ m^3. Να υπολογιστεί το έργο που εκτελείται από το σύστημα στο περιβάλλον του κατά τη διάρκεια της διεργασίας εκτόνωσης του αερίου από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2, αν ο πολυτροπικός εκθέτης n έχει τιμή: (α) $n = 0$, (β) $n = 1$ και (γ) $n = 1{,}5$.

Λύση: Εδώ έχουμε την περίπτωση ενός *κλειστού, απλού συμπιεστού συστήματος*, το οποίο υφίσταται μια *στατικότροπη διεργασία*, καθόσον ισχύει η εξίσωση (1), η οποία συνδέει τις ιδιότητες p και V του συστήματος. Έτσι, το έργο W που εκτελείται από το σύστημα στο περιβάλλον του, λόγω μετατόπισης των ορίων του, υπολογίζεται από την εξίσωση (5-18):

$$W = \int_1^2 p dV \tag{2}$$

α Για $n = 0$, η εξίσωση (1) απλοποιείται στη σχέση $p = C$. Δηλαδή, η διεργασία 1–2α που υφίσταται το σύστημα είναι *ισοβαρής* (Σχήμα Π5-4α). Επομένως, η εξίσωση (2) γράφεται:

$$W_{1\text{-}2\alpha} = p_1(V_2 - V_1) = (650\ \text{kPa})\,[(0{,}06 - 0{,}02)\ \text{m}^3] = 26\ \text{kJ} \tag{α-1}$$

β Για $n = 1$, η εξίσωση (1) απλοποιείται στη σχέση $pV = C$. Δηλαδή, η διεργασία 1–2β που υφίσταται το σύστημα είναι *ισόθερμη* (Σχήμα Π5-4β). Επομένως, η εξίσωση (2) γράφεται:

$$W_{1\text{-}2\beta} = C\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = (p_1 V_1) \ln \frac{V_2}{V_1} = (650\ \text{kPa})\,(0{,}02\ \text{m}^3) \ln\left(\frac{0{,}06}{0{,}02}\right) = 14{,}3\ \text{kJ} \tag{β-1}$$

γ Για $n = 1{,}5$, η διεργασία 1–2γ που υφίσταται το σύστημα είναι *πολυτροπική* (Σχήμα Π5-4γ). Εισάγοντας τη σχέση $p = C/V^n$ στην εξίσωση (2) και εκτελώντας την ολοκλήρωση, προκύπτει:

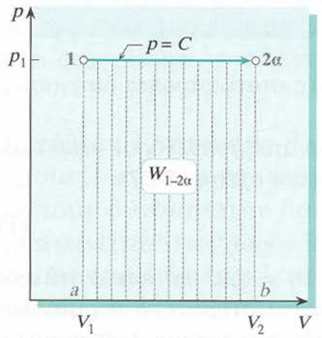
$$W_{1\text{-}2\gamma} = C\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = C\left(\frac{V_2^{1-n} - V_1^{1-n}}{1 - n}\right) \tag{γ-1}$$

Η έκφραση αυτή ισχύει για όλες τις τιμές του n, εκτός από την $n = 1$. Η σταθερά C στη σχέση (γ-1) μπορεί να υπολογιστεί σε οποιαδήποτε από τις δύο οριακές καταστάσεις του συστήματος:

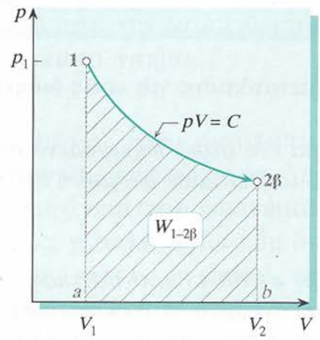
$$C = p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \tag{γ-2}$$

Έτσι, η παραπάνω έκφραση του έργου $W_{1\text{-}2\gamma}$ λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

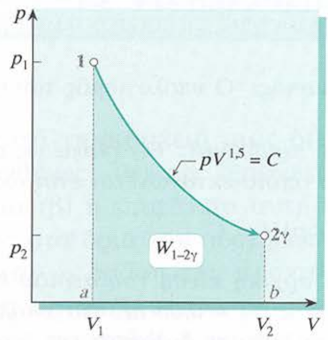
$$W_{1\text{-}2\gamma} = \frac{(p_2 V_2^n)\, V_2^{1-n} - (p_1 V_1^n)\, V_1^{1-n}}{1 - n} = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1 - n} \tag{γ-3}$$



Σχήμα Π5-4α



Σχήμα Π5-4β



Σχήμα Π5-4γ

Για την εύρεση της τιμής της πίεσης p_2, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (γ-2):

$$p_2 = p_1\,(V_1\,/\,V_2)^{\,n} = (650\ \text{kPa})\,(0{,}02\,/\,0{,}06)^{\,1{,}5} = 125\ \text{kPa} \tag{γ-4}$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (γ-3):

$$W_{1\text{-}2\gamma} = \frac{(125\ \text{kPa})\,(0{,}06\ \text{m}^3) - (650\ \text{kPa})\,(0{,}02\ \text{m}^3)}{1 - 1{,}5} = 11\ \text{kJ} \tag{γ-5}$$

Επισημάνσεις

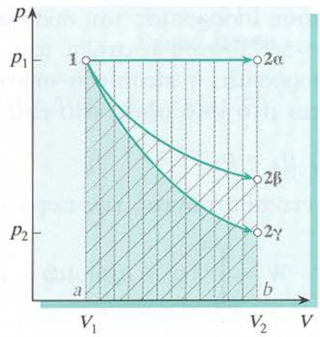
- Σε κάθε περίπτωση, το έργο που εκτελείται από το σύστημα στο περιβάλλον του ισούται με το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη που παριστάνει την αντίστοιχη στατικότροπη διεργασία στο διάγραμμα $p-V$ (Σχήμα Π5-4δ):

  $$W_{1\text{-}2\alpha} = \varepsilon\mu\beta\,(a\text{-}1\text{-}2\alpha\text{-}b\text{-}a) \tag{ε-1}$$

  $$W_{1\text{-}2\beta} = \varepsilon\mu\beta\,(a\text{-}1\text{-}2\beta\text{-}b\text{-}a) \tag{ε-2}$$

  $$W_{1\text{-}2\gamma} = \varepsilon\mu\beta\,(a\text{-}1\text{-}2\gamma\text{-}b\text{-}a) \tag{ε-3}$$

  Παρατηρούμε ότι το μέγεθος των σχετικών επιφανειών στο διάγραμμα $p-V$ είναι σε συμφωνία με τα ληφθέντα αριθμητικά αποτελέσματα ($W_{1\text{-}2\alpha} > W_{1\text{-}2\beta} > W_{1\text{-}2\gamma}$).



Σχήμα Π5-4δ

- Οι τιμές για το έργο W υπολογίστηκαν γνωρίζοντας μόνο την πορεία της στατικότροπης διεργασίας και τις οριακές καταστάσεις ισορροπίας του συστήματος, χωρίς να ενδιαφέρει ποιό είναι το αέριο (ή υγρό) που περιέχεται στον κύλινδρο. Όμως, αν θέλαμε να υπολογίσουμε τιμές ιδιοτήτων, π.χ. της θερμοκρασίας, έπρεπε να γνωρίζουμε και το είδος και την ποσότητα της ουσίας, επειδή στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητη η χρησιμοποίηση κατάλληλων σχέσεων μεταξύ των ιδιοτήτων της συγκεκριμένης ουσίας.

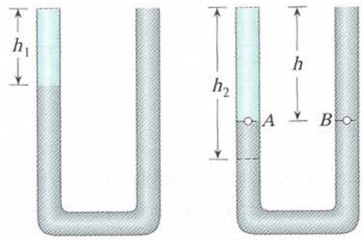
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-5

Σκοπός: Ο υπολογισμός του έργου μετατόπισης για συγκεκριμένη στατικότροπη διεργασία.

Το πρόβλημα: *Ένας κατακόρυφος υοειδής σωλήνας έχει εσωτερική διάμετρο d = 1,5 cm. Το αριστερό σκέλος του σωλήνα είναι κλειστό, ενώ το δεξιό του είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα. Υδράργυρος ρίχνεται στο σωλήνα από το ανοιχτό άκρο, παγιδεύοντας ποσότητα αέρα στο αριστερό σκέλος. Η ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου στο αριστερό σκέλος απέχει από το κλειστό άκρο* $h_1 = 20$ cm *και στο δεξιό σκέλος είναι στο ανοιχτό άκρο (Σχήμα Π5-5α). Έτσι, η αύξηση της πίεσης του εγκλωβισμένου αέρα προκαλεί υπερχείλιση του υδραργύρου. Ο αέρας θερμαίνεται με αργό ρυθμό έως ότου η ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου στο αριστερό σκέλος του σωλήνα απέχει από το κλειστό άκρο* $h_2 = 40$ cm. *Η επίδραση της μεταβολής της θερμοκρασίας στην υδραργυρική στήλη κοντά στον αέρα θεωρείται αμελητέα. Να υπολογιστεί το έργο που εκτελείται από τον αέρα (σύστημα) κατά τη διάρκεια της διαστολής του. Ο υδράργυρος έχει πυκνότητα* $\rho = 13600\ \text{kg/m}^3$ *και η ατμοσφαιρική πίεση είναι* $p_b = 98{,}5$ kPa.

Λύση: Στη συγκεκριμένη περίπτωση, έχουμε ένα *κλειστό* σύστημα το οποίο υφίσταται *στατικότροπη* εκτόνωση και αυτό, λόγω της βραδείας θέρμανσης του αέρα. Έτσι, το έργο μετατόπισης που εκτελείται από το σύστημα στο περιβάλλον του υπολογίζεται από την εξίσωση (5-18):

$$W = \int_1^2 p dV \qquad (1)$$



Σχήμα Π5-5α **Σχήμα Π5-5β**

Αν αμελήσουμε την επίδραση της βαρύτητας στον αέρα, η πίεση p του συστήματος είναι παντού η ίδια. Για την εύρεση της έκφρασης της πίεσης p, θεωρούμε την *ενδιάμεση* κατάσταση ισορροπίας του συστήματος που φαίνεται στο Σχήμα Π5-5β. Επειδή η στήλη του υδραργύρου είναι σε στατική ισορροπία, η πίεση στα σημεία A και B, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, είναι η ίδια, δηλαδή:

$$p_A = p_B \qquad \text{ή} \qquad p = p_b + \rho g h \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή της πίεσης του αέρα στην εξίσωση (1), προκύπτει:

$$W = \int_{h_1}^{h_2} (p_b + \rho g h)\, A dh = p_b\, A\,(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\rho g A\,(h_2^2 - h_1^2) \qquad (3)$$

όπου A είναι η εγκάρσια διατομή του σωλήνα, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A = \pi d^2/4 = (\pi/4)\,(0{,}015 \text{ m})^2 = 1{,}767 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \qquad (4)$$

Ο πρώτος όρος στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3) παριστάνει το έργο που εκτελείται από το σύστημα για την υπερνίκηση της ατμοσφαιρικής πίεσης:

$$W_{\alpha\tau\mu} = (98{,}5 \times 10^3 \text{ Pa})\,(1{,}767 \times 10^{-4} \text{ m}^2)\,(0{,}4 - 0{,}2) \text{ m} = 3{,}48 \text{ J} \qquad (5)$$

και ο δεύτερος όρος το έργο που εκτελείται για την υπερνίκηση της υδροστατικής πίεσης:

$$W_{\upsilon\delta\varrho} = \frac{1}{2}\,(13\,600 \text{ kg/m}^3)(9{,}81 \text{ m/s}^2)\,(1{,}767 \times 10^{-4} \text{ m}^2)\,[(0{,}4 \text{ m})^2 - (0{,}2 \text{ m})^2] = 1{,}41 \text{ J} \qquad (6)$$

Άρα, το ολικό έργο που εκτελείται από το σύστημα κατά την εκτόνωση του αέρα είναι:

$$W = W_{\alpha\tau\mu} + W_{\upsilon\delta\varrho} = (3{,}48 \text{ J}) + (1{,}41 \text{ J}) = 4{,}89 \text{ J}$$

διαβασα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-6

Σκοπός: Ο υπολογισμός του μηχανικού έργου που εκτελείται από διάφορες δυνάμεις.

Το πρόβλημα: *2,5 kg ενός αερίου, με μοριακή μάζα 40, περιέχεται σε μια διάταξη κυλίνδρου–εμβόλου (Σχήμα Π5-6α). Το αέριο συμπιέζεται από όγκο 0,15 σε 0,05 m³, υπό σταθερή θερμοκρασία 27 °C. Η μετατόπιση Δs του εμβόλου είναι ίση με 40 cm και η ατμοσφαιρική πίεση 100 kPa. Η pvT συμπεριφορά του αερίου περιγράφεται από την καταστατική εξίσωση:*

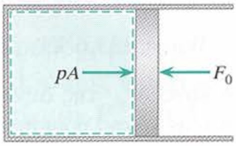
$$pv = RT\,[1 + (b/v)] \qquad (1)$$

όπου ο συντελεστής $b = 0{,}012$ m³/kg. Να υπολογιστούν:

α. Το έργο που εκτελείται από το περιβάλλον στο σύστημα, αν η διεργασία συμπίεσης του αερίου είναι στατικότροπη.

β. Το απαιτούμενο έργο για τη συμπίεση του αερίου, αν η δύναμη τριβής μεταξύ εμβόλου και κυλίνδρου είναι 12 kN.

Λύση: **α** Εδώ έχουμε την περίπτωση ενός *κλειστού* συστήματος, το οποίο υφίσταται μια *στατικότροπη* διεργασία. Έτσι, το εκτελούμενο έργο μετατόπισης υπολογίζεται από την εξίσωση (5-18):



Σχήμα Π5-6α

$$W = \int_1^2 p dV \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Θέτοντας στην εξίσωση (1) $v = V/m$ και $R = \bar{R}/M$, προκύπτει για την πίεση p η έκφραση:

$$p = \frac{m\bar{R}T}{MV}\left(1 + m\frac{b}{V}\right) \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Λόγω της έκφρασης αυτής της πίεσης p, η εξίσωση (α-1) γράφεται:

$$W = \frac{m\bar{R}T}{M}\left(\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} + bm\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^2}\right) = \frac{m\bar{R}T}{M}\left[\ln\frac{V_2}{V_1} + bm\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\right] \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (α-3), προκύπτει:

$$W = \frac{(2{,}5\text{ kg})\,[8{,}3145\text{ kJ}/(\text{kmol}\cdot\text{K})]\,(300\text{ K})}{40\text{ kg}/\text{kmol}}\left[\ln\frac{0{,}05}{0{,}15} + (0{,}012\text{ m}^3/\text{kg})\,(2{,}5\text{ kg})\left(\frac{1}{0{,}15} - \frac{1}{0{,}05}\right)\frac{1}{\text{m}^3}\right]$$

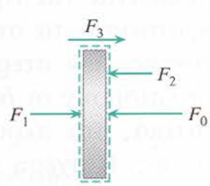
και μετά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων:

$$W = -\,233{,}6\text{ kJ} \qquad (\alpha\text{-}4)$$

Η αρνητική τιμή του W δείχνει ότι η μεταφορά έργου γίνεται από το περιβάλλον στο σύστημα.

β Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο έργο, θεωρούμε ως σύστημα το *έμβολο*. Επάνω στο έμβολο εξασκούνται τέσσερις δυνάμεις: η δύναμη πίεσης του αερίου, F_1, η δύναμη ατμοσφαιρικής πίεσης, F_2, η δύναμη τριβής, F_3 και η εφαρμοζόμενη εξωτερική δύναμη, F_0 (Σχήμα Π5-6β). Σύμφωνα με το *δεύτερο νόμο κίνησης του Newton*, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που εξασκούνται επάνω σε ένα σύστημα από το περιβάλλον του είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της γραμμικής ορμής του συστήματος:

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (\beta\text{-}1)$$



Για τη συγκεκριμένη περίπτωση, η επιτάχυνση $d\mathbf{v}/dt$ του συστήματος μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, οπότε η συνισταμένη των τεσσάρων δυνάμεων που εξασκούνται επάνω στο έμβολο είναι μηδέν, δηλαδή:

$$F_1 + F_3 - F_2 - F_0 = 0 \qquad \text{ή} \qquad F_0 = F_1 + F_3 - F_2 \qquad (\beta\text{-}2)$$

Σχήμα Π5-6β

Επομένως, το έργο που εκτελείται από τη δύναμη F_0 ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των ποσοτήτων έργου που εκτελούνται από τις δυνάμεις F_1, F_2 και F_3, δηλαδή:

$$W_{F_0} = W_{F_1} + W_{F_3} - W_{F_2} \qquad (\beta\text{-}3)$$

Το έργο W_{F_1} που εκτελείται από τη δύναμη πίεσης έχει υπολογιστεί στο πρώτο ερώτημα:

$$W_{F_1} = 233{,}6 \text{ kJ} \qquad (\beta\text{-}4)$$

Το έργο W_{F_2} της δύναμης ατμοσφαιρικής πίεσης και το έργο W_{F_3} της δύναμης τριβής υπολογίζονται με ολοκλήρωση των γινομένων $F_2\,ds$ και $F_3\,ds$, αντίστοιχα, μεταξύ των καταστάσεων 1 και 2:

$$W_{F_2} = \int_1^2 F_2\,ds = \int_1^2 p_b\,A\,ds = p_b\,A\Delta s = p_b\,\Delta V = (100\,\text{kPa})\,(0{,}10\,\text{m}^3) = 10\,\text{kJ} \qquad (\beta\text{-}5)$$

$$W_{F_3} = \int_1^2 F_3\,ds = F_3\,\Delta s = (12\,\text{kN})\,(0{,}4\,\text{m}) = 4{,}8\,\text{kJ} \qquad (\beta\text{-}6)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών W_{F_1}, W_{F_2} και W_{F_3} στην εξίσωση (β-3), προκύπτει:

$$W_{F_0} = (233{,}6 \text{ kJ}) + (4{,}8 \text{ kJ}) - (10 \text{ kJ}) = 228{,}4 \text{ kJ} \qquad (\beta\text{-}7)$$

Άρα, το έργο που μεταφέρεται στο αέριο είναι 233,6 kJ, το έργο που απαιτείται για την υπερνίκηση των τριβών είναι 4,8 kJ, το έργο που μεταφέρεται από την ατμόσφαιρα είναι 10 kJ και το απαιτούμενο έργο από κάποια εξωτερική πηγή είναι 228,4 kJ.

Επισημάνσεις

- Σύμφωνα με τη σύμβαση για το πρόσημο του μηχανικού έργου, το έργο των δυνάμεων F_0 και F_2 είναι θετικό, ενώ το έργο των δυνάμεων F_1 και F_3 είναι αρνητικό.
- Αν δεν υπήρχαν τριβές, το απαιτούμενο έργο για τη συμπίεση του αερίου θα ήταν μόνο 223,6 kJ. Το υπόλοιπο έργο μέχρι τα 233,6 kJ, είναι το έργο που εκτελείται από την ατμόσφαιρα. Δηλαδή, στις διεργασίες συμπίεσης, το έργο που εκτελείται από την ατμόσφαιρα βοηθάει να μειωθεί το απαιτούμενο έργο από μια εξωτερική πηγή.

Έργο Ελαστικής Παραμόρφωσης

Πρόκειται για τη μορφή έργου που σχετίζεται με τις *ελαστικές παραμορφώσεις* που υφίστανται τα στερεά σώματα υπό την επίδραση δυνάμεων (ή ροπών). Οι παραμορφώσεις των στερεών χαρακτηρίζονται ως ***ελαστικές***, όταν αίρονται μόλις παύσουν να επιδρούν οι δυνάμεις (ή ροπές) που τις προκάλεσαν. Όπως διαπιστώνεται πειραματικά, στα περισσότερα στερεά οι παραμορφώσεις είναι ελαστικές, εφόσουν είναι μικρές. Η σχέση που συνδέει τις ελαστικές παραμορφώσεις των στερεών με τις δυνάμεις (ή ροπές) που τις προκαλούν είναι γνωστή ως ***νόμος του Hooke***. Σύμφωνα με το νόμο αυτό, το μέγεθος της ελαστικής παραμόρφωσης ενός στερεού είναι ανάλογο δεδομένη αρχική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος με πίεση p, το μέγεθος της p στη διαφορική έκφραση pdV είναι το ίδιο είτε το V αυξάνεται είτε ελαττώνεται. Μετά από μια απειροστή αύξηση του όγκου V, το σύστημα μπορεί να επιστρέψει στην αρχική του κατάσταση με αντιστροφή της κατεύθυνσης κίνησης του εμβόλου. Τέλος, ανεξάρτητα από τον αν η μεταβολή της κατάστασης του συστήματος είναι απειροστή ή πεπερασμένη, η τιμή της πίεσης p παραμένει πεπερασμένη και πλήρως ορισμένη υπό τον όρο ότι η διεργασία είναι στατικότροπη.

- Αν και θα ασχοληθούμε με συστήματα στα οποία υπάρχει μόνο μία μορφή στατικότροπου έργου (κυρίως pdV), είναι πιθανόν σε κάποια διεργασία να έχουμε περισσότερες από μία μορφές έργου. Γενικά, το έργο δW που εκτελείται κατά τη διάρκεια μιας στατικότροπης διεργασίας δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα:

$$\delta W = \sum_i \mathcal{F}_i \, d\mathcal{X}_i = p dV - \sigma_n d(A_0 x) - \sigma dA - \mathcal{E} dQ_e - \mathcal{E} d(V\mathcal{P}) + \cdots \tag{5-36}$$

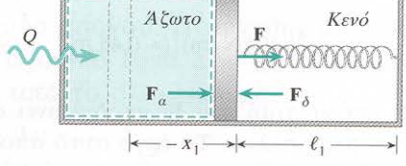
όπου οι τελευταίες τρείς τελείες παριστάνουν άλλα γινόμενα μιας εντατικής ιδιότητας και του διαφορικού κάποιας σχετικής εκτατικής ιδιότητας που συνιστούν πρόσθετες μορφές στατικότροπου έργου.

- Στην § 2-3 είχαμε διατυπώσει την *καταστατική αρχή* για ένα *απλό σύστημα* σταθερής μάζας. Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στη γενική διατύπωση της καταστατικής αρχής για κάθε κλειστό σύστημα, σταθερής σύστασης, η οποία αναφέρει ότι: *Η εντατική κατάσταση ισορροπίας ενός κλειστού συστήματος, σταθερής σύστασης, μπορεί να καθοριστεί πλήρως από 1 + λ ανεξάρτητες εντατικές ιδιότητες, όπου λ είναι ο αριθμός των διαφορετικών μορφών στατικότροπου έργου που μπορεί να εκτελούνται από ή στο σύστημα.* Για παράδειγμα, αν το έργο που μπορεί να εκτελεστεί από ένα κλειστό σύστημα, το οποίο αποτελείται από μια καθαρή ουσία σταθερής σύστασης, είναι έργο μετατόπισης και έργο επιφανειακής τάσης, ο αριθμός $\lambda = 2$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των ανεξάρτητων εντατικών ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό της εντατικής κατάστασης του συγκεκριμένου συστήματος είναι τρείς, π.χ. η πίεση, ο ειδικός όγκος και η επιφανειακή τάση (p, v, σ).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5-7

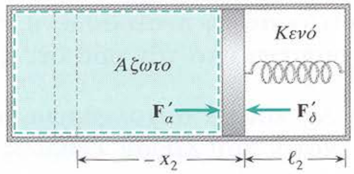
Σκοπός: Ο υπολογισμός του στατικότροπου έργου που απαιτείται για τη συμπίεση ενός ελαστικού ελατηρίου.

Το πρόβλημα: *Θεωρούμε ένα κλειστό κυλινδρικό δοχείο, το οποίο χωρίζεται σε δύο ίσα τμήματα με ένα αβαρές έμβολο, η εγκάρσια διατομή του οποίου είναι $A = 0{,}03\ m^2$ (Σχήμα Π5-7α). Το αριστερό τμήμα του δοχείου περιέχει αέριο άζωτο σε πίεση $p_1 = 200\ kPa$, ενώ το δεξιό*



Σχήμα Π5-7α

τμήμα περιέχει ένα ελαστικό ελατήριο σε κενό. Η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 40$ kN/m. Το άζωτο θερμαίνεται με αργό ρυθμό έως ότου η πίεση στο αριστερό τμήμα του δοχείου γίνει ίση με $p_2 = 600$ kPa. Να υπολογιστούν: (α) η μεταβολή του όγκου και (β) το έργο μετατόπισης που εκτελείται από το άζωτο.



Σχήμα Π5-7β

Λύση: **α** Το έμβολο ισορροπεί σε κάθε θέση υπό την επίδραση δύο αντίθετων δυνάμεων $\mathbf{F}_\alpha$ και $\mathbf{F}_\delta$ (Σχήμα Π5-7α) όπου $\mathbf{F}_\alpha$ είναι η δύναμη πίεσης που ασκείται από το αέριο ($F_\alpha = pA$) και $\mathbf{F}_\delta$ η αντίδραση της δύναμης συμπίεσης του ελαστικού ελατηρίου ($F_\delta = -F$), η οποία δίνεται από το νόμο του Hooke ($F = kx$). Δηλαδή,

$$pA = -kx \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση (α-1) για την αρχική (1) και την τελική (2) κατάσταση ισορροπίας του αζώτου και του ελατηρίου (Σχήμα Π5-7α και Σχήμα Π5-7β):

$$p_1 A = -kx_1 \quad \text{ή} \quad (200\ \text{kPa})(0{,}03\ \text{m}^2) = -(40\ \text{kN/m})\,x_1 \quad \text{ή} \quad x_1 = -0{,}15\ \text{m} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

$$p_2 A = -kx_2 \quad \text{ή} \quad (600\ \text{kPa})(0{,}03\ \text{m}^2) = -(40\ \text{kN/m})\,x_2 \quad \text{ή} \quad x_2 = -0{,}45\ \text{m} \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Το αρχικό και το τελικό μήκος του ελατηρίου (ℓ_1 και ℓ_2, αντίστοιχα), δίνονται από τις σχέσεις:

$$\ell_1 = \ell_0 + x_1 \qquad \text{και} \qquad \ell_2 = \ell_0 + x_2 \qquad (\alpha\text{-}4)$$

όπου ℓ_0 είναι το μήκος του μη παραμορφωμένου ελατηρίου. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις αυτές των ℓ_1 και ℓ_2, υπολογίζουμε τη μεταβολή του όγκου του δεξιού τμήματος του κυλίνδρου:

$$\Delta V_\delta = A\Delta\ell = A(\ell_2 - \ell_1) = A[(\ell_0 + x_2) - (\ell_0 + x_1)] = A(x_2 - x_1) \qquad (\alpha\text{-}5)$$

Η μεταβολή $-\Delta V_\delta$ είναι ίση με τη ζητούμενη μεταβολή του όγκου αζώτου, δηλαδή:

$$\Delta V_{N_2} = -\Delta V_\delta = A(x_1 - x_2) = (0{,}03\ \text{m}^2)[(-0{,}15\ \text{m}) - (-0{,}45\ \text{m})] = 0{,}009\ \text{m}^3 \qquad (\alpha\text{-}6)$$

β Επειδή η διεργασία αύξησης του όγκου του N_2 είναι στατικότροπη και η μάζα του παραμένει η ίδια (συνεπώς, είναι κλειστό σύστημα), το εκτελούμενο έργο δίνεται από την εξίσωση:

$$W = \int_1^2 p\,dV_{N_2} = \int_1^2 p(-dV_\delta) = -\int_1^2 pA\,dx = -\int_1^2 (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) \qquad (\beta\text{-}1)$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των k, x_1 και x_2 στην εξίσωση (β-1), προκύπτει:

$$W = \tfrac{1}{2}(40\,\text{kN/m})\left[(-0{,}45\ \text{m})^2 - (-0{,}15\ \text{m})^2\right] = 3{,}6\ \text{kJ} \qquad (\beta\text{-}2)$$

Η θετική τιμή του W υποδηλώνει ότι η μεταφορά του έργου γίνεται από το σύστημα (άζωτο) στο περιβάλλον. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο συμπιεσμένο ελατήριο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6-1

Σκοπός: Ο υπολογισμός των καθαρών ποσών έργου και θερμότητας που ανταλλάσσει ένα κλειστό σύστημα με το περιβάλλον του κατά τη διάρκεια δεδομένης κυκλικής διεργασίας.

Το πρόβλημα: *Θεωρούμε ως σύστημα ένα αέριο που περιέχεται σε μια διάταξη κυλίνδρου–εμβόλου. Οι αρχικές συνθήκες του αερίου είναι* $p_1 = 200$ kPa, $V_1 = 0{,}50$ m^3 *και* $T_1 = 300$ K. *Το αέριο υφίσταται την ακόλουθη σειρά στατικότροπων διεργασιών που συνιστούν κύκλο: Πολυτροπική συμπίεση από την κατάσταση 1 στη 2 (όπου η* $p_2 = 500$ kPa), *τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:*

$$pV^{1,25} = C \tag{1}$$

Ισόχωρη ψύξη από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 3 (όπου η $p_3 = 200$ kPa), *με απόρριψη θερμότητας 108 kJ. Τέλος, ισοβαρή θέρμανση από την κατάσταση 2 στην αρχική κατάσταση, με απορρόφηση θερμότητας 130 kJ. Να υπολογιστούν:*

α. *Το καθαρό έργο που εκτελείται κατά τη διάρκεια της κυκλικής διεργασίας.*

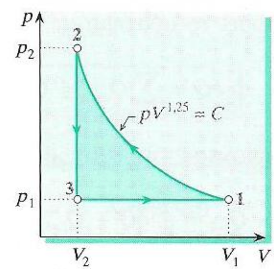
β. *Η θερμότητα που εισέρχεται ή εξέρχεται από το σύστημα κατά τη διεργασία 1–2.*

Λύση: **α** Το καθαρό έργο που εκτελείται κατά τη διάρκεια της κυκλικής διεργασίας 1-2-3-1 είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων W_{1-2}, W_{2-3} και W_{3-1} που εκτελούνται κατά τη διάρκεια των διεργασιών 1–2, 2–3 και 3–1, αντίστοιχα:

$$\oint \delta W = \sum W_{i-j} = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-1} \tag{α-1}$$

Επειδή εδώ έχουμε την περίπτωση ενός *κλειστού, απλού συμπιεστού συστήματος* που υφίσταται *στατικότροπες διεργασίες*, το έργο W_{i-j} είναι της μορφής pdV και υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$W_{i-j} = \int_i^j pdV \tag{α-2}$$



Σχήμα Π6-1

Για την *πολυτροπική διεργασία* 1–2 (με εκθέτη $n = 1{,}25$), η εξίσωση (α-2) γράφεται:

$$W_{1-2} = \int_1^2 pdV = \int_1^2 (C/V^n)\,dV = C\left(\frac{V_2^{1-n} - V_1^{1-n}}{1-n}\right) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{1-n} \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Για την εύρεση της τιμής του όγκου V_2 χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$V_2 = V_1(p_1/p_2)^{1/n} = (0{,}50\ \mathrm{m^3})\,(200/500)^{1/1{,}25} = 0{,}24\ \mathrm{m^3} \qquad (\alpha\text{-}4)$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (α-3):

$$W_{1-2} = \frac{(500\,\mathrm{kPa})\,(0{,}24\,\mathrm{m^3}) - (200\,\mathrm{kPa})\,(0{,}50\,\mathrm{m^3})}{1 - 1{,}25} = -80\,\mathrm{kJ} \qquad (\alpha\text{-}5)$$

Για την *ισόχωρη* διεργασία 2–3, το εκτελούμενο έργο είναι προφανώς μηδέν:

$$W_{2-3} = 0 \qquad (\alpha\text{-}6)$$

Για την *ισοβαρή* διεργασία 3–1, η εξίσωση (α-2) γράφεται:

$$W_{3-1} = \int_3^1 pdV = p_1(V_1 - V_3) = p_1(V_1 - V_2) = (200\,\mathrm{kPa})\,[(0{,}50 - 0{,}24)\,\mathrm{m^3}] = 52\,\mathrm{kJ} \qquad (\alpha\text{-}7)$$

Αντικαθιστώντας τις ευρεθείσες τιμές των W_{1-2}, W_{2-3} και W_{3-1} στην εξίσωση (α-1), προκύπτει:

$$\oint \delta W = (-\,80\,\mathrm{kJ}) + (0) + (520\,\mathrm{kJ}) = -28\,\mathrm{kJ} \qquad (\alpha\text{-}8)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι το καθαρό έργο εκτελείται από το περιβάλλον *στο* σύστημα, κάτι που αναμενόταν, αφού η φορά διαγραφής του δοθέντος κύκλου είναι αριστερόστροφη.

β Για κυκλική διεργασία κλειστού συστήματος, το ΑΘΑ εκφράζεται με την εξίσωση (6-1):

$$\oint \delta Q = \oint \delta W \qquad (\beta\text{-}1)$$

Λόγω της εξίσωσης (α-8), η εξίσωση (β-1) γράφεται:

$$\oint \delta Q = -28\,\mathrm{kJ} \qquad (\beta\text{-}2)$$

Το ποσό αυτό είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των θερμοτήτων Q_{1-2}, Q_{2-3} και Q_{3-1} που ανταλλάσσει το σύστημα με το περιβάλλον του κατά τη διάρκεια των αντίστοιχων διεργασιών:

$$\oint \delta Q = \sum Q_{i-j} = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-1} \qquad (\beta\text{-}3)$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς τη θερμότητα Q_{1-2}, προκύπτει:

$$Q_{1-2} = \oint \delta Q - Q_{2-3} - Q_{3-1} = (-\,28\,\mathrm{kJ}) - (-\,108\,\mathrm{kJ}) - (130\,\mathrm{kJ}) = -50\,\mathrm{kJ} \qquad (\beta\text{-}4)$$

Άρα, κατά τη διεργασία 1–2, η θερμότητα μεταφέρεται από το σύστημα στο περιβάλον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6-2

Σκοπός: Η εφαρμογή του ΑΘΑ με τη μορφή ρυθμών μεταβολής και μεταφοράς ενέργειας.

Το πρόβλημα: *Θεωρούμε ως σύστημα τον ηλεκτροκινητήρα του Παραδείγματος 5-8 (Σχήμα Π5-8). Ο κινητήρας τροφοδοτείται με ηλεκτρική ισχύ 84 W και αποδίδει αξονική ισχύ 75,4 W. Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος δίνεται από τη σχέση:*

$$\dot{Q} = -\,8{,}6\,[1 - \exp(-\,0{,}02\,t)] \tag{1}$$

όπου ο ρυθμός $\dot{Q}$ είναι σε watt και ο χρόνος t σε δευτερόλεπτα.

α. *Να ευρεθεί η εξίσωση που δίνει το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας E του συστήματος ως συνάρτηση του χρόνου.*

β. *Να παρασταθεί γραφικά η εξάρτηση του ρυθμού dE/dt από το χρόνο για τα πρώτα 4 min της λειτουργίας του ηλεκτροκινητήρα.*

Λύση: α Για την ενεργειακή ανάλυση του ηλεκτροκινητήρα, εφαρμόζουμε το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα με τη μορφή της εξίσωσης (6-10):

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \tag{2}$$

Ο όρος $\dot{W}$ παριστάνει την καθαρή ισχύ που μεταφέρεται από το σύστημα στο περιβάλλον. Για το σύστημά μας, η ισχύς αυτή είναι ίση με τη διαφορά της ηλεκτρικής από την αξονική ισχύ:

$$\dot{W} = \dot{W}_s - \dot{W}_e = (75{,}4\ \text{W}) - (84\ \text{W}) = -\,8{,}6\ \text{W} \tag{3}$$

Το αρνητικό πρόσημο της καθαρής ισχύος $\dot{W}$ υποδηλώνει ότι η εισερχόμενη ισχύς $\dot{W}_e$ είναι μεγαλύτερη από την εξερχόμενη ισχύ $\dot{W}_s$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) τη δοθείσα έκφραση του ρυθμού $\dot{Q}$ και την ευρεθείσα τιμή του $\dot{W}$, προκύπτει η σχέση:

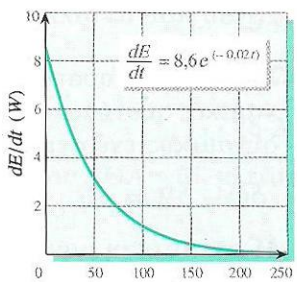
$$\frac{dE}{dt} = -\,8{,}6\,[1 - \exp(-\,0{,}02\,t)] - (-8{,}6) = 8{,}6\,\exp(-\,0{,}02\,t) \tag{4}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας E του συστήματος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

β Η εξίσωση (4) παριστάνεται γραφικά στο Σχήμα Π6-2. Παρατηρούμε ότι στα πρώτα 3 min (περίπου) της λειτουργίας του κινητήρα, η ενέργεια E του συστήματος μειώνεται ταχύτητα. Μετά τη *μεταβατική* αυτή περίοδο, η ενέργεια του συστήματος είναι πρακτικά σταθερή (ο ρυθμός $dE/dt \to 0$). Αυτό σημαίνει ότι η μεταφερόμενη θερμότητα είναι ίση με το εκτελούμενο καθαρό έργο, δηλαδή:

$$\dot{Q} = \dot{W} = \dot{W}_s - \dot{W}_e = -\,8{,}6\ \text{W} \tag{5}$$

Η τιμή του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q} = -\,8{,}6$ W μπορεί επίσης να ληφθεί και από την εξίσωση (1) για $t \to \infty$.



Σχήμα Π6-2

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει τη φυσική σημασία της ενθαλπίας: *Κατά τις ισοβαρείς στατικότροπες διεργασίες, η μεταβολή της ενθαλπίας είναι ίση με τη θερμότητα που διαπερνά τα όρια του συστήματος.*

Νόμος Poisson: Εάν εφαρμόσουμε τις εξισώσεις (6-22) και (6-23) για μια *αδιάθερμη* διεργασία ($\delta Q = 0$) ιδανικού αερίου, με *σταθερές* ειδικές θερμοχωρητικότητες, προκύπτει τελικά η ακόλουθη σχέση (βλ. Παράδειγμα 6-3):

$$pV^{\gamma} = C \tag{6-30}$$

όπου γ είναι ο λόγος ειδικών θερμοχωρητικοτήτων του αερίου ($\gamma = c_p / c_v$) και C σταθερά. Η εξίσωση (6-30) είναι γνωστή ως ***νόμος Poisson***. Η διεργασία ενός ιδανικού αερίου για την οποία ισχύει η σχέση (6-30) έχει επικρατήσει να ονομάζεται ***αδιαβατική***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6-3

Σκοπός: Η απόδειξη της εκθετικής εξίσωσης που εκφράζει το νόμο Poisson.

Το πρόβλημα: *Να αποδειχθεί ότι για μια αδιάθερμη, στατικότροπη διεργασία ιδανικού αερίου, με σταθερές ειδικές θερμοχωρητικότητες, ισχύει η σχέση (6-30):*

$$pV^{\gamma} = C \qquad (\textit{Νόμος Poisson}) \tag{1}$$

Λύση: Για την απόδειξη της εξίσωσης (1), θα χρησιμοποιήσουμε σαν αφετηρία τις εξισώσεις (6-22) και (6-23), οι οποίες μπορεί να εφαρμοστούν στη συγκεκριμένη περίπτωση, αφού ικανοποιούνται οι απαιτούμενες προϋποθέσεις (βλ. Σχήμα 6-2):

$$\delta Q = mc_v\, dT + p\, dV \qquad \text{και} \qquad \delta Q = mc_p\, dT - V\, dp \tag{2}$$

Επειδή η διεργασία είναι αδιάθερμη, η θερμότητα $\delta Q = 0$, οπότε οι εξισώσεις (2) γράφονται:

$$mc_v\, dT = -\, p\, dV \qquad \text{και} \qquad mc_p\, dT = V\, dp \tag{3}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες εξισώσεις, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{mc_v\, dT}{mc_p\, dT} = -\frac{p\, dV}{V\, dp} \qquad \text{ή} \qquad \frac{dp}{p} = -\left(\frac{c_p}{c_v}\right)\frac{dV}{V} \qquad \text{ή} \qquad \frac{dp}{p} = -\,\gamma\frac{dV}{V} \tag{4}$$

όπου γ είναι ο λόγος ειδικών θερμοχωρητικοτήτων του αερίου ($\gamma = c_p / c_v$). Από την ολοκλήρωση της τελευταίας εξίσωσης με γ σταθερό, προκύπτει η λογαριθμική εξίσωση:

$$\ln p = -\,\gamma \ln V + \ln C \qquad \text{ή} \qquad \ln p + \ln V^{\gamma} = \ln C \qquad \text{ή} \qquad \ln pV^{\gamma} = \ln C \tag{5}$$

Από την απολογαρίθμηση της τελευταίας εξίσωσης, προκύπτει η προς απόδειξη σχέση:

$$pV^{\gamma} = C \tag{1}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6-4

Σκοπός: Ο καθορισμός των προσήμων των Q, W, ΔE, ΔU και ΔE_δ για δεδομένη διεργασία.

Το πρόβλημα: *Σε ένα θερμικά μονωμένο δοχείο που είναι γεμάτο με νερό, περιέχεται ένα σφαιρικό κομμάτι από φελλό μάζας m, αμελητέας αγωγιμότητας. Αρχικά ο φελλός είναι στερεωμένος στον πυθμένα του δοχείου (Σχήμα Π6-4). Όταν ο φελλός αφήνεται ελεύθερος, ανέρχεται αργά διαμέσου του νερού και τελικά ισορροπεί στην κορυφή του δοχείου. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης του φελλού είναι h_0. Θεωρώντας ως σύστημα το φελλό, να καθοριστούν τα πρόσημα της θερμότητας και του έργου και οι μεταβολές της ολικής ενέργειας, της εσωτερικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας κατά τη διεργασία αυτή.*

Λύση: Εφαρμόζουμε τη μακροσκοπική μορφή του ΑΘΑ για κλειστό σύστημα, [Εξ. (6-7)]:

$$Q - W = \Delta E \tag{1}$$

Εδώ η μεταβολή ΔE της ολικής ενέργειας του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα:

$$\Delta E = \Delta U + \Delta E_\delta \tag{2}$$

Ο φελλός είναι μη αγώγιμο υλικό, συνεπώς, η θερμότητα Q είναι μηδέν:

$$Q = 0 \tag{3}$$

Η κίνηση του φελλού οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη πίεσης που ασκείται από το νερό στο κάτω ημισφαίριο του φελλού είναι μεγαλύτερη από εκείνη που ασκείται στο πάνω ημισφαίριο του (και από τις δυνάμεις τριβής και βαρύτητας που ασκούνται στο φελλό με κατεύθυνση προς τα κάτω). Έτσι, υπάρχει μια συνισταμένη δύναμη που ασκείται από το νερό στο σύστημα κατά την κατεύθυνση της κίνησης του φελλού και, κατά συνέπεια, το νερό εκτελεί καθαρό έργο *στο* σύστημα καθώς ο φελλός ανέρχεται. Για το φελλό, το εκτελούμενο έργο W είναι αρνητικό:

$$W < 0 \tag{4}$$

Έτσι, από την εξίσωση (1), προκύπτει ότι η μεταβολή ΔE της ενέργειας του συστήματος είναι θετική:

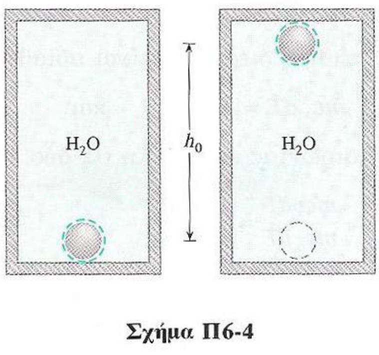
$$\Delta E > 0 \tag{5}$$

Επειδή ο φελλός ανέρχεται σε υψηλότερη στάθμη από την αρχική, η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται κατά mgh_0:

$$\Delta E_\delta = mgh_0 > 0 \tag{6}$$

Η ενέργεια U του συστήματος δε μεταβάλλεται κατά την κίνησή του, αφού η κατάστασή του παραμένει η ίδια, επομένως:

$$\Delta U = 0 \tag{7}$$



Σχήμα Π6-4

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές των ΔU και ΔE_δ στην εξίσωση (2), προκύπτει:

$$\Delta E = mgh_0 > 0 \tag{8}$$

και οι αγωγοί που τα συνδέουν περιέχουν συνεχώς την ίδια ποσότητα ρευστού, η μονάδα στο σύνολό της μπορεί να θεωρηθεί ως κλειστό σύστημα. Σημειώνετα ότι τα επιμέρους τμήματα της ατμοκίνητης μονάδας ισχύος είναι ανοικτά συστήματα, αφού εισέρχεται και εξέρχεται μάζα από αυτά. Με βάση την εξίσωση (6-31), ο θερμικός βαθμός απόδοσης της ατμοκίνητης μονάδας ισχύος του Σχήματος 6-3β είναι:

$$n = \frac{W_t - W_p}{Q_H} \qquad \text{ή} \qquad n = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} \tag{6-33}$$

Όπως τα Q_L και Q_H, έτσι και τα W_t και W_p ορίζονται στην τελευταία εξίσωση ως *ποσότητες* ενέργειας και, συνεπώς, έχουν πάντα *θετικές* τιμές. Η θερμότητα Q_H που χρησιμοποιείται για την ατμοποίηση του λειτουργούντος μέσου στο λέβητα μιας μονάδας παραγωγής ισχύος μπορεί να προέρχεται από την καύση ενός καυσίμου σε έναν κλίβανο ή από έναν πυρηνικό αντιδραστήρα. Επίσης, η ενέργεια αυτή μπορεί να λαμβάνεται από ηλιακή ακτινοβολία ή κάποιο γεωθερμικό πεδίο. Με τη συστηματική μελέτη των ατμοκίνητων μονάδων παραγωγής ισχύος θα ασχοληθούμε στο 2^{o} Τόμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6-6

Σκοπός: Ο υπολογισμός του θερμικού βαθμού απόδοσης θερμικής μηχανής.

Το πρόβλημα: *Μια θερμική μηχανή κατασκευάζεται ώστε να παράγει ισχύ $\dot{W} = 150$ kW, ενώ απορρίπτει θερμότητα στο ψυχροδοχείο με ρυθμό $\dot{Q}_L = 350$ kJ/s. Η θερμότητα που απαιτείται για τη λειτουργία της ΘΜ προέρχεται από την καύση ενός καυσίμου, η θερμογόνος δύναμη του οποίου είναι $\mathscr{L} = 45$ MJ/kg. Να υπολογιστούν:*

α. Ο θερμικός βαθμός απόδοσης της θερμικής μηχανής.

β. Η ωριαία κατανάλωση του καυσίμου για τη λειτουργία της θερμικής μηχανής.

Λύση: **α** Υπολογίζουμε πρώτα το ρυθμό εισροής θερμότητας, $\dot{Q}_H$, στη θερμική μηχανή, εφαρμόζοντας το ΑΘΑ για κυκλική διεργασία, οπότε προκύπτει η σχέση:

$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_L + \dot{W} = (350 \text{ kJ/s}) + (150 \text{ kJ/s}) = 500 \text{ kJ/s} \qquad \text{ή} \qquad \dot{Q}_H = 500 \text{ kW} \tag{1}$$

Ο θερμικός βαθμός απόδοσης, n, της θερμικής μηχανής δίνεται από την εξίσωση (6-31):

$$n = \frac{\dot{W}}{\dot{Q}_H} = \frac{150 \text{ kW}}{500 \text{ kW}} = 0{,}3 \qquad \text{ή} \qquad n = 30\,\% \tag{2}$$

β Η ωριαία κατανάλωση του καυσίμου, $\dot{m}_\kappa$, για τη λειτουργία της μηχανής δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{m}_\kappa = \frac{\dot{Q}_H}{\mathscr{L}} = \frac{(500 \text{ kJ/s}) \times (3600 \text{ s/h})}{45 \times 10^3 \text{ kJ/kg}} = 40 \text{ kg/h} \tag{3}$$

Στον ορισμό της ψυκτικής μηχανής ταιριάζει καλύτερα η ***ψυκτική μονάδα με ατμοσυμπίεση***, ο βασικός εξοπλισμός της οποίας φαίνεται στο Σχήμα Σχήμα 6-4β. Η αρχή λειτουργίας της μονάδας αυτής έχει ως εξής: Το ψυκτικό μέσο σε κορεσμένη ή υπέρθερμη ατμώδη κατάσταση εισέρχεται στο ***συμπιεστή*** (ή *συμπιεστήρα*) όπου και συμπιέζεται στην πίεση λειτουργίας του ***συμπυκνωτή***. Ο συμπιεσμένος υπέρθερμος ατμός εισέρχεται στο συμπυκνωτή όπου, με αποβολή θερμότητας Q_H, μετατρέπεται συνήθως σε υπόψυκτο υγρό της ίδιας πίεσης. Στη συνέχεια το υπόψυκτο υγρό διέρχεται από μια ***βαλβίδα εκτόνωσης*** (ή έναν *τριχοειδή σωλήνα*) μετατρεπόμενο σε υγρό ατμό χαμηλής πίεσης. Τέλος, το μείγμα υγρού και ατμού του ψυκτικού μέσου εισέρχεται στον ***εξατμιστήρα*** (ή *εξατμιστή*) όπου, με απορρόφηση θερμότητας Q_L, μετατρέπεται σε ατμό της ίδιας πίεσης. Μετά τον εξατμιστήρα ο ατμός χαμηλής πίεσης εισέρχεται στο συμπιεστή, για να αρχίσει και πάλι ένας νέος κύκλος. Επειδή τα τέσσερα τμήματα της ψυκτικής μονάδας και οι αγωγοί που τα συνδέουν περιέχουν συνεχώς την ίδια ποσότητα ρευστού, η μονάδα στο σύνολό της μπορεί να θεωρηθεί ως κλειστό σύστημα. Σημειώνεται ότι τα επιμέρους τμήματά της μονάδας αυτής είναι ανοικτά συστήματα, αφού εισέρχεται και εξέρχεται μάζα από αυτά. Με βάση την εξίσωση (6-34), ο συντελεστής λειτουργίας της ψυκτικής μονάδας με ατμοσυμπίεση είναι:

$$\beta = \frac{Q_L}{W_c} = \frac{Q_L}{Q_H - Q_L} \tag{6-36}$$

Με τη συστηματική μελέτη των μονάδων παραγωγής ψύχους θα ασχοληθούμε στο 2^o Τόμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6-7

Σκοπός: Ο υπολογισμός του συντελεστή λειτουργίας ψυκτικής μηχανής.

Το πρόβλημα: *Μια ψυκτική μηχανή χρησιμοποιείται για την παραγωγή πάγου θερμοκρασίας 0 °C, από νερό της ίδιας θερμοκρασίας, με ρυθμό $\dot{m}_\pi = 2$ t/h. Η απαιτούμενη ισχύς για τη λειτουργία της μηχανής είναι $\dot{W} = 50$ kW. Να υπολογιστεί ο συντελεστής λειτουργίας της ψυκτικής μηχανής.*

Λύση: Υπολογίζουμε πρώτα το ρυθμό απαγωγής θερμότητας, $\dot{Q}_L$, από το κορεσμένο υγρό νερό για τη μετατροπή του σε κορεσμένο στερεό (πάγο). Ο ρυθμός $\dot{Q}_L$ υπολογίζεται από σχέση:

$$\dot{Q}_L = \dot{m}_\pi \, h^{\circ}_{s\ell} \tag{1}$$

όπου $h^{\circ}_{s\ell}$ είναι η ενθαλπία τήξης του νερού, $h^{\circ}_{s\ell} = 331{,}1$ kJ/kg, από τον Πίνακα Σ3-4. Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των μεγεθών $\dot{m}_\pi$ και $h^{\circ}_{s\ell}$ στην εξίσωση (1), προκύπτει:

$$\dot{Q}_L = [(2 \text{ t/h}) \times (10^3 \text{ kg/t}) \times (1 \text{ h}/3600 \text{ s})]\,(331{,}1 \text{ kJ/kg}) = 185 \text{ kJ/s} \tag{2}$$

Ο συντελεστής λειτουργίας, β, της ψυκτικής μηχανής δίνεται από την εξίσωση (6-34):

$$\beta = \frac{\dot{Q}_L}{\dot{W}} = \frac{185 \text{ kW}}{50 \text{ kW}} = 3{,}7 \tag{3}$$

ΑΝΤΛΙΑ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Αντλία θερμότητας (*ΑΘ*) είναι μια μηχανική διάταξη, η οποία λειτουργεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που λειτουργεί και η ψυκτική μηχανή (Σχήμα 6-4α), διαφέρει όμως ως προς τον επιδιωκόμενο σκοπό. Ο σκοπός ενός ψυκτικού κύκλου είναι να ψύξει ένα χώρο ή να διατηρήσει τη θερμοκρασία του *κάτω* από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Αντίθετα, ο σκοπός μιας αντλίας θερμότητας είναι να θερμάνει ένα χώρο ή να διατηρήσει τη θερμοκρασία του *πάνω* από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος ή να εξασφαλίσει την απαιτούμενη θέρμανση για ορισμένες βιομηχανικές διεργασίες που πραγματοποιούνται σε υψηλές θερμοκρασίες. Η αποδοτικότητα μιας αντλίας θερμότητας εκφράζεται με το ***συντελεστή λειτουργίας***, α, ο οποίος ορίζεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{Q_H}{W} \tag{6-37}$$

Η εξίσωση (6-37) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$\alpha = \frac{Q_H}{Q_H - Q_L} = \frac{1}{1 - Q_L / Q_H} \tag{6-38}$$

Η σχέση που συνδέει τους συντελεστές λειτουργίας αντλίας θερμότητος και ψυκτικής μηχανής, για τα ίδια ποσά θερμότητας Q_L και Q_H, είναι:

$$\alpha = \beta + 1 \tag{6-39}$$

Δηλαδή, ο συντελεστής λειτουργίας της ΑΘ είναι μεγαλύτερος κατά ένα από τον αντίστοιχο συντελεστή λειτουργίας της ΨΜ. Επειδή ο συντελεστής β είναι θετικός αριθμός, ο συντελεστής α είναι πάντα μεγαλύτερος από ένα ($\alpha > 1$). Να σημειωθεί ότι, όπως ο θερμικός βαθμός απόδοσης, έτσι και οι συντελεστές λειτουργίας ορίζονται *μόνο* για κυκλικές διεργασίες.

Επισήμανση: Στα σύγχρονα ***κλιματιστικά συστήματα*** κτιρίων, η *ίδια μονάδα* χρησιμοποιείται το μεν καλοκαίρι ως ψυκτική μηχανή, το δε χειμώνα ως αντλία θερμότητας. Στην πρώτη περίπτωση, το κλιματιστικό απορροφά θερμότητα από το εσωτερικό του κτιρίου και την απορρίπτει στο περιβάλλον. Στη δεύτερη περίπτωση, το κλιματιστικό αντλεί θερμότητα από το περιβάλλον και τη διοχετεύει στο εσωτερικό του κτιρίου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6-8

Σκοπός: Ο υπολογισμός της απαιτούμενης ισχύος για τη λειτουργία αντλίας θερμότητας.

Το πρόβλημα: *Μια αντλία θερμότητας χρησιμοποιείται για τη θέρμανση ενός σπιτιού και τη διατήρησή του σε θερμοκρασία 20 °C. Οι απώλειες θερμότητας από τους τοίχους και τα παράθυρα του σπιτού είναι 2,4 MJ ανά ώρα και βαθμό διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ του εσωτε-*

ρικού και του εξωτερικού του σπιτιού. Η θερμότητα που παράγεται από τις διάφορες δραστηριότητες στο εσωτερικό του σπιτιού είναι 4 MJ/h. Αν η εξωτερική θερμοκρασία είναι 5 °C, η ΑΘ έχει συντελεστή λειτουργίας 2,5. Να υπολογιστεί η απαιτούμενη ηλεκτρική ισχύς για τη λειτουργία της αντλίας θερμότητας, αν ο βαθμός απόδοσης του ηλεκτροκινητήρα είναι 89 %.

Λύση: Υπολογίζουμε πρώτα το ρυθμό απωλειών θερμότητας, $\dot{Q}_\alpha$, από το σπίτι στο περιβάλλον:

$$\dot{Q}_\alpha = (\dot{Q}/\Delta T)\,\Delta T = [2{,}4\ \text{MJ/(h °C)}]\,[(20-5)\ \text{°C}] = 36\ \text{MJ/h} \tag{1}$$

Αν από το ρυθμό $\dot{Q}_\alpha$ αφαιρέσουμε το ρυθμό $\dot{Q}_\pi$ της θερμότητας που παράγεται από τις δραστηριότητες στο εσωτερικό του σπιτιού, προκύπτει ο ρυθμός $\dot{Q}_H$ της θερμότητας που πρέπει να μεταφέρεται στο σπίτι για να διατηρείται η θερμοκρασία του σταθερή στους 20 °C:

$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_\alpha - \dot{Q}_\pi = (36\ \text{MJ/h}) - (4\ \text{MJ/h}) = 32\ \text{MJ/h} \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση (6-37), υπολογίζουμε την ισχύ λειτουργίας της ΑΘ:

$$\dot{W} = \frac{\dot{Q}_H}{\alpha} = \frac{32\ \text{MJ/h}}{2{,}5} = 12{,}8\ \frac{\text{MJ}}{\text{h}} = \left(12{,}8\times10^3\ \frac{\text{kJ}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}}\right)\left(\frac{1\ \text{kW}}{1\ \text{kJ/s}}\right) = 3{,}56\ \text{kW} \tag{3}$$

Αν διαιρέσουμε την ισχύ αυτή με το βαθμό απόδοσης, n_κ, του ηλεκτροκινητήρα, προκύπτει η απαιτούμενη ηλεκτρική ισχύς, $\dot{W}_e$, για τη λειτουργία της αντλίας θερμότητας:

$$\dot{W}_e = \frac{\dot{W}}{n_\kappa} = \frac{3{,}56\ \text{kW}}{0{,}89} = 4\ \text{kW} \tag{4}$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Κλείνοντας το Κεφάλαιο ***Το Πρώτο Θερμοδυναμικό Αξίωμα για Κλειστά Συστήματα***, ας επαναλάβουμε επιγραμματικά μερικά σημαντικά σημεία του:

Τι πρέπει να γνωρίζουμε

- *Τί εκφράζει από φυσική άποψη το ΑΘΑ και από τί εξαρτάται η μορφή του.*
- *Ποιά είναι η αναλυτική έκφραση και ποιά η φυσική ερμηνεία του ΑΘΑ για κυκλικές και μη κυκλικές διεργασίες.*
- *Ποιές είναι οι κύριες μορφές του ΑΘΑ και υπό ποιές προϋποθέσεις εφαρμόζονται.*
- *Την αρχή λειτουργίας και τις εκφράσεις της αποδοτικότητας θερμικών μηχανών, ψυκτικών μηχανών και αντλιών θερμότητας.*

Λόγω της εξίσωσης (7-11), η εξίσωση ορισμού της ταχύτητας $\bar{\upsilon}$ γράφεται:

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{A}\iint_A (\boldsymbol{\upsilon}\cdot\mathbf{n})\, dA \qquad (7\text{-}14)$$

Η παύλα (–) πάνω από το σύμβολο της ταχύτητας συνήθως παραλείπεται και η μέση ταχύτητα ροής παριστάνεται απλά με το σύμβολο υ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7-1

Σκοπός: Ο υπολογισμός της μέσης ταχύτητας ροής για δεδομένη κατανομή ταχύτητας.

Το πρόβλημα: *Νερό ρέει σε αγωγό κυκλικής διατομής, ακτίνας R = 25 cm, όπως φαίνεται στο Σχήμα Π7-1α. Η κατανομή της ταχύτητας είναι παραβολική και δίνεται από την εξίσωση:*

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_0\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right]\mathbf{i} \qquad (1)$$

όπου υ_0 είναι η μέγιστη ταχύτητα του νερού, ίση με 8 m/s, και r η απόσταση από τον άξονα του αγωγού. Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα ροής του νερού.

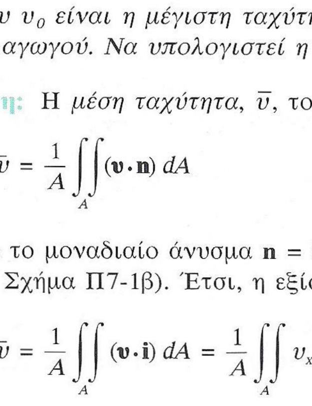
Λύση: Η *μέση ταχύτητα*, $\bar{\upsilon}$, του νερού υπολογίζεται από την εξίσωση (7-14):

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{A}\iint_A (\boldsymbol{\upsilon}\cdot\mathbf{n})\, dA \qquad (2)$$

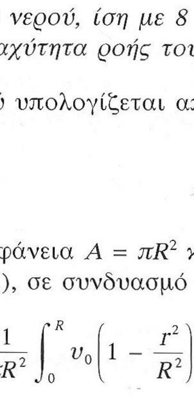
Εδώ το μοναδιαίο άνυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, η επιφάνεια $A = \pi R^2$ και η στοιχειώδης επιφάνεια $dA = 2\pi r\, dr$ (βλ. Σχήμα Π7-1β). Έτσι, η εξίσωση (2), σε συνδυασμό και με την εξίσωση (1), γράφεται:

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{A}\iint_A (\boldsymbol{\upsilon}\cdot\mathbf{i})\, dA = \frac{1}{A}\iint_A \upsilon_x\, dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \upsilon_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)2\pi r\, dr = \frac{2\upsilon_0}{R^2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{\upsilon_0}{2} \qquad (3)$$

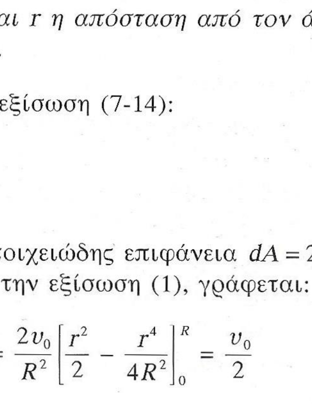
Δηλαδή, για τη συγκεκριμένη περίπτωση, η μέση ταχύτητα ροής είναι ίση με το 1/2 της μέγιστης ταχύτητας (Σχήμα Π7-1γ). Άρα, η μέση ταχύτητα ροής του νερού στον αγωγό είναι $\bar{\upsilon}$ = 4 m/s.



Σχήμα Π7-1α



Σχήμα Π7-1β



Σχήμα Π7-1γ

αυτόν. Στην ειδική περίπτωση όγκου ελέγχου με μία είσοδο (στη θέση 1) και μία έξοδο (στη θέση 2), η εξίσωση (7-27) απλοποιείται στη σχέση:

$$\dot{m} = \rho_1 \upsilon_1 A_1 = \rho_2 \upsilon_2 A_2 \tag{7-28}$$

- Για *ασυμπίεστη ροή*, η πυκνότητα ρ του ρευστού έχει παντού την ίδια τιμή. Επομένως, η μάζα του όγκου ελέγχου είναι σταθερή, οπότε η παράγωγος $dm_{OE}/dt = 0$. Έτσι, η εξίσωση (7-26), μετά την απαλοιφή και του ρ, γράφεται:

$$\sum_i (\upsilon A)_i = \sum_j (\upsilon A)_j \tag{7-29}$$

Δηλαδή, *όταν η ροή είναι ασυμπίεστη, το άθροισμα των ρυθμών εισροής όγκου στον όγκο ελέγχου πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα των ρυθμών εκροής όγκου από αυτόν.* Η αντίστοιχη μορφή της εξίσωσης (7-28) είναι:

$$\dot{V} = \upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2 \tag{7-30}$$

Στο Σχήμα 7-5 συνοψίζονται οι κύριες μορφές του νόμου διατήρησης μάζας για όγκο ελέγχου και αναφέρονται οι αντίστοιχες προϋποθέσεις για την εφαρμογή τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7-2

Σκοπός: Η εφαρμογή της μακροσκοπικής μορφής του νόμου διατήρησης μάζας ΟΕ για μόνιμη ροή.

Το πρόβλημα: *Ένα ιδανικό αέριο, με λόγο $\gamma = 1{,}4$, ρέει σε ένα θερμικά μονωμένο ακροφύσιο (Σχήμα Π7-2). Οι διατομές εισόδου A_1 και εξόδου A_2 του ακροφυσίου είναι κυκλικές με διάμετρο 10 και 5 cm, αντίστοιχα. Η ροή του αερίου στο ακροφύσιο είναι μόνιμη και θεωρείται στατικότροπη. Το αέριο στην είσοδο του ακροφυσίου έχει πυκνότητα 2,20 kg/m^3, πίεση 800 kPa και ταχύτητα 25 m/s. Η πίεση στην έξοδο του ακροφυσίου είναι 500 kPa. Να υπολογιστούν: (α) η πυκνότητα ρ_2, (β) η μέση ταχύτητα υ_2 και (γ) οι ογκομετρικές παροχές $\dot{V}_1$ και $\dot{V}_2$ και οι ρυθμοί ροής μάζας $\dot{m}_1$ και $\dot{m}_2$ του αερίου.*

Λύση: **α** Επειδή το αέριο είναι ιδανικό με σταθερό γ και η ροή αδιάθερμη και στατικότροπη, μπορούμε να εφαρμόσουμε την *εξίσωση Poisson*, [Εξ. (6-30)], για μια ορισμένη ποσότητα του αερίου μεταξύ των καταστάσεων 1 και 2, δηλαδή:

$$p_1 v_1^{\gamma} = p_2 v_2^{\gamma} \tag{α-1}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση αυτή τον ειδικό όγκο με το αντίστροφο της πυκνότητας ($v = 1/\rho$), προκύπτει η σχέση υπολογισμού της πυκνότητας ρ_2 του αερίου:

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} = (2{,}20\,\mathrm{kg/m^3})\left(\frac{500\,\mathrm{kPa}}{800\,\mathrm{kPa}}\right)^{1/1{,}4} = 1{,}57\,\mathrm{kg/m^3} \tag{α-2}$$

β Για την εύρεση της μέσης ταχύτητας ροής στην έξοδο του ακροφυσίου, εφαρμόζουμε το νόμο διατήρησης της μάζας για όγκο ελέγχου, [Εξ. (7-26)]:

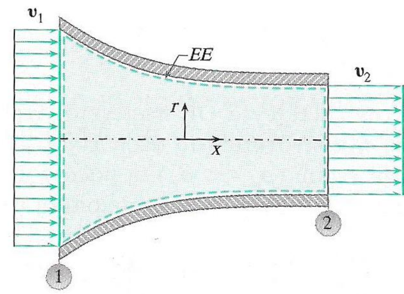
$$\frac{dm_{OE}}{dt} = \sum_i (\rho v A)_i - \sum_j (\rho v A)_j \qquad (\beta\text{-}1)$$

Επειδή η ροή είναι μόνιμη, ο ρυθμός $dm_{OE}/dt = 0$, οπότε η μακροσκοπική εξίσωση (β-1) γράφεται:

$$\sum_i (\rho v A)_i = \sum_j (\rho v A)_j \qquad (\beta\text{-}2)$$

Για ΟΕ με μία είσοδο (1) και μία έξοδο (2) (Σχήμα Π7-2), η εξίσωση (β-2) γράφεται ως εξής:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \qquad (\beta\text{-}3)$$



Σχήμα Π7-2

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς την ταχύτητα v_2, προκύπτει η σχέση:

$$v_2 = v_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = v_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = (25\text{ m/s})\left(\frac{2{,}20\text{ kg/m}^3}{1{,}57\text{ kg/m}^3}\right)\left(\frac{0{,}10\text{ m}}{0{,}05\text{ m}}\right)^2 = 140\text{ m/s} \qquad (\beta\text{-}4)$$

γ Επειδή η ροή στην είσοδο (1) και την έξοδο (2) του όγκου ελέγχου θεωρείται ομοιόμορφη, οι ογκομετρικές παροχές $\dot{V}_1$ και $\dot{V}_2$ του αερίου υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\dot{V}_1 = v_1 A_1 = v_1(\pi d_1^2/4) = (\pi/4)\ (25\text{ m/s})\ (0{,}10\text{ m})^2 = 0{,}196\text{ m}^3/\text{s} \qquad (\gamma\text{-}1)$$

$$\dot{V}_2 = v_2 A_2 = v_2(\pi d_2^2/4) = (\pi/4)\ (140\text{ m/s})\ (0{,}05\text{ m})^2 = 0{,}275\text{ m}^3/\text{s} \qquad (\gamma\text{-}2)$$

Οι αντίστοιχοι ρυθμοί ροής μάζας, $\dot{m}_1$ και $\dot{m}_2$, του αερίου υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\dot{m}_1 = \rho_1 \dot{V}_1 = (2{,}20\text{ kg/m}^3)\ (0{,}196\text{ m}^3/\text{s}) = 0{,}431\text{ kg/s} \qquad (\gamma\text{-}3)$$

$$\dot{m}_2 = \rho_2 \dot{V}_2 = (1{,}57\text{ kg/m}^3)\ (0{,}275\text{ m}^3/\text{s}) = 0{,}431\text{ kg/s} \qquad (\gamma\text{-}4)$$

Όπως αναμενόταν, οι ρυθμοί εισροής και εκροής μάζας του αερίου από τον ΟΕ είναι ίσοι ($\dot{m}_1 = \dot{m}_2$). Δε συμβαίνει όμως το ίδιο και με τις αντίστοιχες ογκομετρικές παροχές ($\dot{V}_1 < \dot{V}_2$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7-3

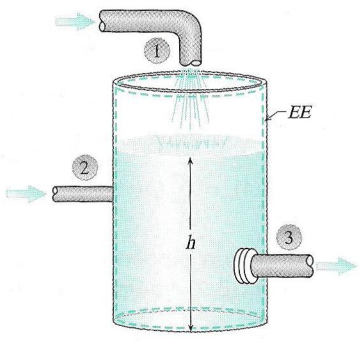
Σκοπός: Η εφαρμογή του νόμου διατήρησης μάζας ΟΕ για μη μόνιμη ροή.

Το πρόβλημα: *Στο Σχήμα Π7-3 φαίνεται μια κυλινδρική δεξαμενή, διαμέτρου $D = 2$ m, στην οποία εισέρχεται νερό από τους αγωγούς 1 και 2 και εξέρχεται από τον αγωγό 3. Ο ρυθμός εισροής μάζας από τον αγωγό 1 είναι $\dot{m}_1 = 40$ kg/s και ο ρυθμός εκροής όγκου από τον αγωγό 3 είναι $\dot{V}_3 = 0{,}02$ m³/s. Η μέση ταχύτητα εκροής του νερού από τον αγωγό 2, ο οποίος έχει εσωτερική διάμετρο $d_2 = 15$ cm, είναι $v_2 = 2$ m/s. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στάθμης του νερού στη δεξαμενή.*

Λύση: Επιλέγουμε ως όγκο ελέγχου το περιεχόμενο της δεξαμενής και εφαρμόζουμε το νόμο διατήρησης της μάζας με τη μορφή της εξίσωσης (7-26):

$$\frac{dm_{OE}}{dt} = \sum_i (\rho \upsilon A)_i - \sum_j (\rho \upsilon A)_j \qquad (1)$$

Στον επιλεγέντα ΟΕ περιέχεται νερό (w) και αέρας (a). Επειδή η πυκνότητα του αέρα είναι πολύ μικρότερη από εκείνη του νερού ($\rho_a << \rho_w$), η μάζα του αέρα στον ΟΕ μπορεί να αγνοηθεί. Έτσι, η μακροσκοπική εξίσωση (1) γράφεται:



Σχήμα Π7-3

$$\frac{dm_w}{dt} = \sum_i (\rho_w \upsilon A)_i - \sum_j (\rho_w \upsilon A)_j \qquad (2)$$

ή επειδή η πυκνότητα ρ_w του νερού είναι σταθερή:

$$\frac{dV_w}{dt} = \sum_i (\upsilon A)_i - \sum_j (\upsilon A)_j \qquad (3)$$

Το πρώτο μέλος της εξίσωσης (3) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{dV_w}{dt} = \frac{d}{dt}(Ah) = A\frac{dh}{dt} = \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\frac{dh}{dt} \qquad (4)$$

Αν αντικαταστήσουμε την έκφραση αυτή του ρυθμού dV_w/dt στην εξίσωση (3) και λάβουμε υπόψη ότι το γινόμενο $\upsilon A = \dot{V}$, το ισοζύγιο μάζας παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\frac{dh}{dt} = \sum_i \dot{V}_i - \sum_j \dot{V}_j \qquad (5)$$

ή επειδή ο όγκος ελέγχου έχει 2 εισόδους και 1 έξοδο:

$$\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)\frac{dh}{dt} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 - \dot{V}_3 \qquad (6)$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς το ρυθμό dh/dt, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4\,(\dot{V}_1 + \dot{V}_2 - \dot{V}_3)}{\pi D^2} \qquad (7)$$

Από τα τέσσερα μεγέθη του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (7), γνωστά είναι τα δύο, η παροχή $\dot{V}_3$ και η διάμετρος D. Οι τιμές των παροχών $\dot{V}_1$ και $\dot{V}_2$ υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$\dot{V}_1 = \dot{m}_1/\rho = (40\ \mathrm{kg/s})/(1000\ \mathrm{kg/m^3}) = 0{,}04\ \mathrm{m^3/s} \qquad (8)$$

$$\dot{V}_2 = \upsilon_2 A_2 = \upsilon_2 (\pi d_2^2/4) = (\pi/4)\ (2\ \mathrm{m/s})\ (0{,}15\ \mathrm{m})^2 = 0{,}035\ \mathrm{m^3/s} \qquad (9)$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (7):

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4\,[(0{,}040) + (0{,}035) - (0{,}020)]\ \mathrm{m^3/s}}{\pi\,(2\ \mathrm{m})^2} = 0{,}0175\ \mathrm{m/s} \qquad (10)$$

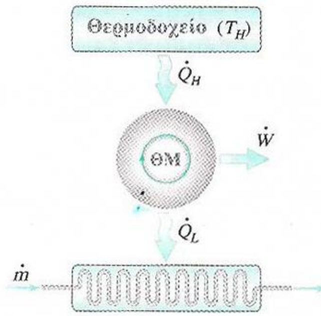
Άρα, η στάθμη του νερού στη δεξαμενή ανέρχεται με ταχύτητα 17,5 mm/s.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8-4

Σκοπός: Ο υπολογισμός του θερμικού βαθμού απόδοσης μιας θερμικής μηχανής Carnot.

Το πρόβλημα: *Μια θερμική μηχανή Carnot παράγει ισχύ 3 kW. Η θερμική μηχανή απορρίπτει ενέργεια με τη μορφή θερμότητας σε ένα ποτάμι (βλ. Σχήμα Π8-4), προκαλώντας αύξηση της θερμοκρασίας του κατά 2 °C. Το ποτάμι έχει μέση θερμοκρασία 15 °C και ρέει με σταθερό ρυθμό 1,2 kg/s. Να υπολογιστούν:*

α. *Ο απαιτούμενος ρυθμός μεταφοράς θερμότητας για την τροφοδοσία της θερμικής μηχανής.*
β. *Ο βαθμός απόδοσης της θερμικής μηχανής.*
γ. *Η θερμοκρασία της θερμικής δεξαμενής η οποία τροφοδοτεί με θερμότητα τη μηχανή Carnot.*



Σχήμα Π8-4

Λύση: α Ο ρυθμός εισροής θερμότητας, $\dot{Q}_H$, στη θερμική μηχανή υπολογίζεται με εφαρμογή του ΑΘΑ για κυκλική διεργασία, [Εξ. (6-1)], οπότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\dot{Q}_H = \dot{Q}_L + \dot{W} \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Επειδή η διεργασία μεταφοράς θερμότητας από τη θερμική μηχανή στο ποτάμι είναι ισοβαρής, ο ρυθμός $\dot{Q}_L$ μεταφερόμενης θερμότητας υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\dot{Q}_L = \dot{m} c_p \Delta T = (1{,}2\ \mathrm{kg/s})\ [(4{,}18\ \mathrm{kJ/(kg \cdot °C)})]\ (2\ °\mathrm{C}) = 10{,}0\ \mathrm{kJ}/s = 10{,}0\ \mathrm{kW} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των μεγεθών $\dot{Q}_L$ και $\dot{W}$ στην εξίσωση (α-1), προκύπτει η ζητούμενη τιμή $\dot{Q}_H$ του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας από το θερμοδοχείο στη ΘΜ:

$$\dot{Q}_H = (10{,}0\ \mathrm{kW}) + (3\ \mathrm{kW}) = 13{,}0\ \mathrm{kW} \qquad (\alpha\text{-}3)$$

β Επειδή η θερμοκρασία T_H του θερμοδοχείου δεν είναι γνωστή, ο θερμικός βαθμός απόδοσης, n_R, της θερμικής μηχανής του Carnot υπολογίζεται από τη γενική εξίσωση (8-5):

$$n_R = \frac{W}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{10{,}0\ \mathrm{kW}}{13{,}0\ \mathrm{kW}} = 0{,}23 \qquad ή \qquad 23\% \qquad (\beta\text{-}1)$$

γ Η θερμοκρασία T_H του θερμοδοχείου υπολογίζεται από την εξίσωση (8-6), η οποία δίνει το βαθμό απόδοσης n_R των θερμικών μηχανών Carnot. Από τη λύση της εξίσωσης αυτής ως προς τη θερμοκρασία T_H προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$T_H = \frac{T_L}{1 - n_R} = \frac{(288\ \mathrm{K})}{1 - 0{,}23} = 374\ \mathrm{K} \qquad ή \qquad T_H = 101\ °\mathrm{C} \qquad (\gamma\text{-}1)$$

β Για την εύρεση της θερμοκρασίας T_H του περιβάλλοντος, θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο εξισώσεις υπολογισμού του συντελεστή λειτουργίας β_R της ψυκτικής μηχανής:

$$\beta_R = \frac{\dot{Q}_H}{\dot{W}_R} = \frac{T_L}{T_H - T_L} \qquad (\beta\text{-}1)$$

Ο ρυθμός απαγωγής θερμότητας $\dot{Q}_L$ από τον ψυχόμενο χώρο είναι ίσος με το ρυθμό εισροής θερμικής ενέργειας στο σπίτι διαμέσου των τοιχωμάτων και της οροφής του, δηλαδή:

$$\dot{Q}_L = (2375/3600)\ (T_H - 298)\ \text{kW} \qquad (\beta\text{-}2)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας $\dot{Q}_L$ και τις γνωστές τιμές της ισχύος $\dot{W}_R$ και της θερμοκρασίας T_L στην εξίσωση (β-1), προκύπτει:

$$\frac{(2375/3600)\,(T_H - 298)}{0{,}9} = \frac{298}{T_H - 298} \quad \text{ή} \quad (T_H - 298)^2 = \frac{0{,}9\,(298)}{2375/3600} \qquad (\beta\text{-}3)$$

και μετά την εκτέλεση των πράξεων:

$$T_H = 318{,}2\ \text{K} \qquad (\beta\text{-}4)$$

Άρα, η ζητούμενη μέγιστη εξωτερική θερμοκρασία είναι 45,2 °C

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8-7

Σκοπός: Η ανάλυση ενός συστήματος δύο αντιστρεπτών μηχανών αντίστροφης λειτουργίας.

Το πρόβλημα: *Μια αντιστρεπτή θερμική μηχανή απορροφά θερμότητα 600 kJ από μια ΘΔ σε θερμοκρασία 800 K και απορρίπτει θερμότητα στο περιβάλλον σε θερμοκρασία 300 K (βλ. Σχήμα Π8-7). Το 20 % του έργου που παράγεται από τη ΘΜ χρησιμοποιείται για τη λειτουργία μιας αντιστρεπτής ψυκτικής μηχανής. Η ΨΜ απορροφά θερμότητα από μια ΘΔ σε άγνωστη θερμοκρασία και απορρίπτει θερμότητα 450 kJ στο περιβάλλον. Να υπολογιστούν:*

α. *Το έργο που παράγεται από τη θερμική μηχανή.*
β. *Ο βαθμός απόδοσης της θερμικής μηχανής.*
γ. *Η θερμοκρασία της θερμικής δεξαμενής από την οποία απάγει θερμότητα η ΨΜ.*
δ. *Ο συντελεστής λειτουργίας της ψυκτικής μηχανής.*
ε. *Η θερμότητα που απορρίπτεται στο περιβάλλον.*

Λύση: **α** Υπολογίζουμε πρώτα τη θερμότητα $Q_{L,\Theta}$ που απορρίπτεται από τη θερμική μηχανή, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (8-4), η οποία ισχύει για κάθε μηχανή αντιστρεπτής λειτουργίας:

$$Q_{L,\Theta} = Q_{H,\Theta}\left(\frac{T_{L,\Theta}}{T_{H,\Theta}}\right) = (600\ \text{kJ})\left(\frac{300\ \text{K}}{800\ \text{K}}\right) = 225\ \text{kJ} \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Το έργο $W_{R,\Theta}$ που παράγεται από τη θερμική μηχανή υπολογίζεται με εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος για κυκλική διεργασία, [Εξ. (6-1)], οπότε προκύπτει η σχέση:

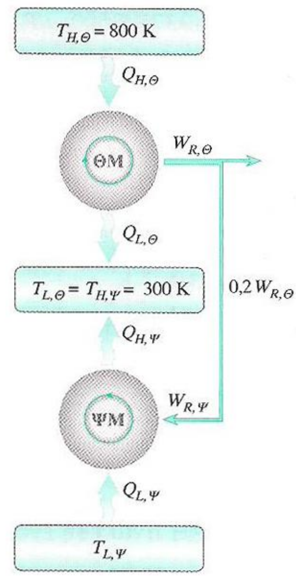
$$W_{R,\Theta} = Q_{H,\Theta} - Q_{L,\Theta} = (600\ \text{kJ}) - (225\ \text{kJ}) = 375\ \text{kJ} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

β Ο βαθμός απόδοσης, n_R, της θερμικής μηχανής υπολογίζεται από την εξίσωση (6-31):

$$n_R = \frac{W_{R,\Theta}}{Q_{H,\Theta}} = \frac{375\ \text{kJ}}{600\ \text{kJ}} = 0{,}625 \qquad \text{ή} \qquad 62{,}5\ \% \tag{β-1}$$

γ Η θερμοκρασία $T_{L,\psi}$ της θερμικής δεξαμενής από την οποία απάγει θερμότητα $Q_{L,\psi}$ η ψυκτική μηχανή υπολογίζεται από την εξίσωση (8-4):

$$T_{L,\psi} = T_{H,\psi}\left(\frac{Q_{L,\psi}}{Q_{H,\psi}}\right) \tag{γ-1}$$



Σχήμα Π8-7

Από τα τρία μεγέθη που εμφανίζονται στο 2ο μέλος της εξίσωσης αυτής το μόνο άγνωστο είναι η απορριπτόμενη θερμότητα $Q_{L,\psi}$. Η θερμότητα $Q_{L,\psi}$ υπολογίζεται με εφαρμογή του ΑΘΑ για κυκλική διεργασία, [Εξ. (6-1)], οπότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$Q_{L,\psi} = Q_{H,\psi} - W_{R,\psi} = Q_{H,\psi} - 0{,}20\,W_{R,\Theta} \tag{γ-2}$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (γ-2), προκύπτει:

$$Q_{L,\psi} = (450\ \text{kJ}) - 0{,}20\,(375\ \text{kJ}) = 375\ \text{kJ} \tag{γ-3}$$

Ήδη μπορούμε να υπολογίσουμε την $T_{L,\psi}$ από την εξίσωση (γ-1):

$$T_{L,\psi} = (300\ \text{K})\left(\frac{375\ \text{kJ}}{450\ \text{kJ}}\right) = 250\ \text{K} \tag{γ-4}$$

δ Ο συντελεστής λειτουργίας, β_R, της ψυκτικής μηχανής υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση της εξίσωσης (6-34):

$$\beta_R = \frac{Q_{L,\psi}}{W_{R,\psi}} = \frac{Q_{L,\psi}}{0{,}20\,W_{R,\Theta}} = \frac{375\ \text{kJ}}{0{,}20\,(375\ \text{kJ})} = 5{,}0 \tag{δ-1}$$

ε Η θερμότητα Q_π που απορρίπτεται στο περιβάλλον είναι ίση με το άθροισμα των θερμοτήτων $Q_{L,\Theta}$ και $Q_{H,\psi}$ που απορρίπτονται σε αυτό από τη θερμική και την ψυκτική μηχανή, αντίστοιχα:

$$Q_\pi = Q_{L,\Theta} + Q_{H,\psi} = (225\ \text{kJ}) + (450\ \text{kJ}) = 675\ \text{kJ} \tag{ε-1}$$

8-7 Η Θερμοδυναμική Κλίμακα Θερμοκρασίας

Όπως αναφέρθηκε στην §2-10, οι κλίμακες θερμοκρασίας που ορίζονται με βάση κάποια θερμομετρική ιδιότητα (π.χ. τη διαστολή ενός υγρού) εξαρτώνται ως ένα βαθμό από τις ιδιότητες του εκλεγέντος υλικού. Όμως, το επιθυμητό θα ήταν να οριστεί μια θερμοκρασιακή κλίμακα, η οποία δε θα εξαρτάται από τη φύση του χρησιμοποιούμενου υλικού. Η κλίμακα αυτή υπάρχει και είναι γνωστή ως ***θερμοδυναμική κλίμακα***

Με τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων (9-32) και τις τιμές s^o ή $\bar{s}^o$ από τους πίνακες τελείου αερίου, οι μεταβολές εντροπίας μπορεί να υπολογιστούν εύκολα και με μεγάλη ακρίβεια. Αν για κάποιο αέριο που μας ενδιαφέρει δεν υπάρχει πίνακας με τιμές s^o ή $\bar{s}^o$, οι μεταβολές της εντροπίας του αερίου μπορεί να υπολογιστούν από τις εξισώσεις (6-27), χρησιμοποιώντας αναλυτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις $c_v(T)$ και $c_p(T)$ ή από τις εξισώσεις (9-28), χρησιμοποιώντας μέσες τιμές για τις ειδικές θερμοχωρητικότητες. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις υπολογισμού της μεταβολής εντροπίας έχουν αναπτυχθεί με βάση το μοντέλο του ιδανικού αερίου, το οποίο μπορεί να είναι ή να μην είναι κατάλληλο για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9-6

Σκοπός: Ο υπολογισμός της μεταβολής εντροπίας ιδανικού αερίου με μία από τις εξισώσεις TdS.

Το πρόβλημα: *Ένα ιδανικό αέριο (σύστημα), μάζας 1,5 kg και ειδικής σταθεράς 0,285 kJ/(kg·K), εκτονώνεται από αρχική πίεση 500 kPa και θερμοκρασία 250 °C σε τελική πίεση 150 kPa και θερμοκρασία 100 °C. Η ισοβαρής ειδική θερμοχωρητικότητα του αερίου δίνεται από την εξίσωση:*

$$c_p = a + bT \tag{1}$$

όπου $a = 1{,}0$ *kJ/(kg·K) και* $b = 7{,}5 \times 10^{-3}$ *kJ/(kg·K²). Να υπολογιστεί η μεταβολή της ολικής εντροπίας του αερίου.*

Λύση: Για τον υπολογισμό της μεταβολής $\Delta S = S_2 - S_1$ της εντροπίας του δοθέντος συστήματος μπορούμε να εργαστούμε όπως στο Παράδειγμα 9-2, χρησιμοποιώντας τη γενική εξίσωση (9-9) και επιλέγοντας κατάλληλη αντιστρεπτή διαδρομή μεταξύ των καταστάσεων 1 και 2. Όμως, στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου είναι γνωστές οι συνθήκες της αρχικής και της τελικής κατάστασης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια από τις δύο εξισώσεις TdS για τον άμεσο υπολογισμό της μεταβολής εντροπίας του ιδανικού αερίου. Εδώ επιλέγουμε ως καταλληλότερη τη δεύτερη εξίσωση TdS, [Εξ. (9-20β)], την οποία γράφουμε ως εξής:

$$dS = \frac{dH - Vdp}{T} \qquad \text{ή} \qquad \Delta S = \int_1^2 \frac{dH}{T} - \int_1^2 \frac{Vdp}{T} \tag{2}$$

Επειδή το αέριο είναι ιδανικό, ισχύουν οι εξισώσεις $pV = mRT$ και $dH = mc_p dT$. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη και τη δοθείσα έκφραση της c_p, η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} m(a + bT)\frac{dH}{T} - \int_{p_1}^{p_2} mR\frac{dp}{p} = m\left(a\ln\frac{T_2}{T_1} + b(T_2 - T_1) - R\ln\frac{p_2}{p_1}\right) \tag{3}$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης αυτής, προκύπτει:

$$\Delta S = (1{,}5)\left[(1)\ln\left(\frac{373}{523}\right) + (7{,}5\times10^{-3})(373-523) - (0{,}285)\ln\left(\frac{150}{500}\right)\right]\frac{\text{kJ}}{\text{K}} = -1{,}68\,\frac{\text{kJ}}{\text{K}} \tag{4}$$

Άρα, κατά τη διεργασία αυτή, η εντροπία του ιδανικού αερίου μειώνεται κατά 1,68 kJ/K.

Από την εξίσωση (9-33) συμπεραίνεται ότι η μεταβολή εντροπίας μιας (*πραγματικά*) ασυμπίεστης ουσίας εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία. Στον Πίνακα 9-2 συνοψίζονται οι εξισώσεις υπολογισμού των μεταβολών Δu, Δh και Δs για ασυμπίεστη ουσία με σταθερή και με μεταβλητή ειδική θερμοχωρητικότητα.

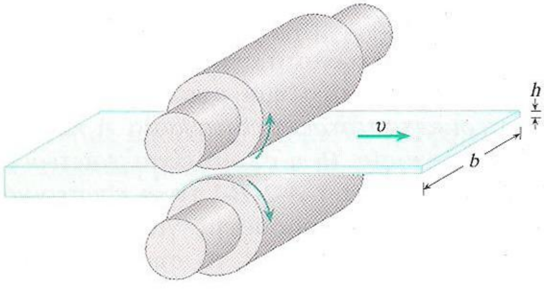
Πίνακας 9-2 *Εξισώσεις των μεταβολών Δu, Δh και Δs για ασυμπίεστη ουσία*

Μεταβλητή Ειδική Θερμοχωρητικότητα	*Σταθερή Ειδική Θερμοχωρητικότητα*
$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT$	$u_2 - u_1 = c_m(T_2 - T_1)$
$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c(T)\,dT + v(p_2 - p_1)$	$h_2 - h_1 = c_m(T_2 - T_1) + v(p_2 - p_1)$
$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} c\,(T)\frac{dT}{T}$	$s_2 - s_1 = c_m \ln\frac{T_2}{T_1}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9-8

Σκοπός: Ο υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής της εντροπίας ασυμπίεστης ουσίας.

Το πρόβλημα: *Σε μια μεταλλουργία, ο χαλκός (σύστημα) παράγεται με τη μορφή ελασμάτων πλάτους 1 m και πάχους 4 mm. Τα ελάσματα του χαλκού εξέρχονται από την ελασματουργό μηχανή ή έλαστρο (Σχήμα Π9-8) με ταχύτητα 3 m/min σε θερμοκρασία 750 °C. Τα ελάσματα αφήνονται να ψυχθούν στο περιβάλλον, θερμοκρασίας 20 °C. Η μέση πυκνότητα του χαλκού είναι 8900 kg/m³ και η μέση ειδική θερμοχωρητικότητα 0,418 kJ/(kg·K). Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της εντροπίας (α) του παραγόμενου χαλκού και (β) του περιβάλλοντος κατά τη διεργασία αυτή.*



Σχήμα Π9-8

Λύση: **α** Για ασυμπίεστη ουσία (όπως είναι ο χαλκός), με σταθερή (ή μέση) ειδική θερμοχωρητικότητα, η μεταβολή της εντροπίας της υπολογίζεται από την εξίσωση (9-34), η οποία μπορεί να γραφεί με τη μορφή ρυθμού μεταβολής της ολικής εντροπίας ως εξής:

$$\frac{dS_\Sigma}{dt} = \dot{m} c_m \ln\frac{T_2}{T_1} \qquad (\alpha\text{-}1)$$

όπου $\dot{m}$ είναι ο ρυθμός παραγωγής μάζας του χαλκού:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} = \rho bhv = (8900\ \mathrm{kg/m^3})\ (1\ \mathrm{m})\ (4 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})\ (3/60\ \mathrm{m/s}) = 1{,}78\ \mathrm{kg/s} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των μεγεθών $\dot{m}$, c_m, T_1 και T_2 στην εξίσωση (α-1), προκύπτει:

$$\frac{dS_\Sigma}{dt} = (1{,}78\ \mathrm{kg/s})\,[0{,}418\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)}]\ln\left(\frac{293\ \mathrm{K}}{1023\ \mathrm{K}}\right) = -\ 0{,}930\ \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{K}} \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Άρα, η εντροπία του χαλκού μειώνεται κατά την ψύξη του με ρυθμό 930 W/K.

β Ο ο ρυθμός μεταβολής της εντροπίας του περιβάλλοντος υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dS_\Pi}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T_0} \qquad (\beta\text{-}1)$$

όπου $T_0 = 293$ K και $\dot{Q}$ είναι ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας από το χαλκό στο περιβάλλον:

$$\dot{Q} = \dot{m} c_m (T_1 - T_2) = (1{,}78\ \mathrm{kg/s})\ [0{,}418\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)}]\ (1023 - 293)\ \mathrm{K} = 543\ \mathrm{kJ/s} \qquad (\beta\text{-}2)$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των μεγεθών $\dot{Q}$ και T_0 στην εξίσωση (β-1), προκύπτει:

$$\frac{dS_\Pi}{dt} = \frac{543\ \mathrm{kJ/s}}{293\ \mathrm{K}} = +\ 1{,}85\ \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{K}} \qquad (\beta\text{-}3)$$

Άρα, η εντροπία του περιβάλλοντος αυξάνεται λόγω της ψύξης του χαλκού με ρυθμό 1,85 kW/K.

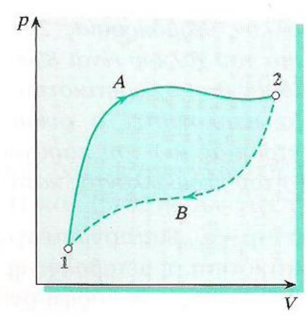
9-8 Μεταβολή Εντροπίας Συστήματος για Αναντίστρεπτη Διεργασία

Θεωρούμε ένα κλειστό σύστημα το οποίο υφίσταται μια κυκλική διεργασία (Σχήμα 9-6), στην οποία το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 με μια *εσωτερικά αντιστρεπτή* διεργασία *A* και επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση με μια άλλη διεργασία *B*, η οποία είναι *εσωτερικά αναντίστρεπτη*.

Επειδή ο κύκλος 1-*A*-2-*B*-1 είναι *εσωτερικά αναντίστρεπτος*, μπορούμε να εφαρμόσουμε για αυτόν την ανισότητα του Clausius, [Εξ. (9-5)], με το σημείο της ανισότητας, οπότε προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_B < 0 \qquad (9\text{-}35)$$

Επειδή η διεργασία *A* είναι εσωτερικά αντιστρεπτή, ισχύει η εξίσωση (9-9), οπότε αν λάβουμε υπόψη και το γεγονός ότι η εντροπία είναι ιδιότητα του συστήματος, το πρώτο απλό ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση γράφεται:



Σχήμα 9-6 *Εσωτερικά αναντίστρεπτος κύκλος.*

- Ο μόνος τρόπος να μειωθεί η εντροπία ενός κλειστού συστήματος είναι με μεταφορά θερμότητας *από* το σύστημα στο περιβάλλον. Όμως, στην περίπτωση αυτή, η συμβολή της μεταφερόμενης εντροπίας πρέπει να είναι περισσότερο αρνητική από τη θετική συμβολή της παραγόμενης εντροπίας.
- Η μεταφορά θερμότητας διαμέσου των ορίων του συστήματος συνοδεύεται *πάντα* από μεταφορά εντροπίας, ενώ δε συμβαίνει το ίδιο και με τη μεταφορά έργου. Δηλαδή, *το έργο είναι ελεύθερο εντροπίας.* Έτσι, κατά τις αλληλεπιδράσεις έργου, το σύστημα ανταλλάσσει με το περιβάλλον του μόνο ενέργεια, ενώ κατά τις αλληλεπιδράσεις θερμότητας, ανταλλάσσει ενέργεια και εντροπία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9-9

Σκοπός: Η εφαρμογή του ισοζυγίου εντροπίας κλειστού συστήματος για τον έλεγχο της δυνατότητας πραγματοποίησης δεδομένης διεργασίας.

Το πρόβλημα: *Ένας εφευρέτης ισχυρίζεται ότι κατασκεύασε μηχανή που μπορεί να συμπιέζει ισόθερμα αέρα από αρχική πίεση 200 kPa και θερμοκρασία 30 °C σε τελική πίεση 2,5 MPa με κατανάλωση έργου 160 kJ/kg. Στις συνθήκες αυτές, ο αέρας θεωρείται ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο. Να εξεταστεί αν ο ισχυρισμός του εφευρέτη είναι αληθής.*

Λύση: Για να είναι αληθής ο ισχυρισμός του εφευρέτη, η διεργασία συμπίεσης του αέρα πρέπει να ικανοποιεί το ισοζύγιο εντροπίας για κλειστό σύστημα, [Εξ. (9-42)], του οποίου η ανηγμένη μορφή στη μονάδα μάζας είναι:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{\delta q}{T} + \sigma_m \tag{1}$$

ή ισοδύναμα, η παραγόμενη εντροπία σ_m πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$\sigma_m = (s_2 - s_1) - \int_1^2 \frac{\delta q}{T} \geqslant 0 \tag{2}$$

Επειδή η διεργασία 1–2 είναι ισόθερμη, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$\sigma_m = (s_2 - s_1) - \frac{q}{T} \geqslant 0 \tag{3}$$

όπου q είναι η μεταφερόμενη θερμότητα ανά μονάδα μάζας. Η θερμότητα q υπολογίζεται από το ΑΘΑ για κλειστό σύστημα με τη μορφή της εξίσωσης (6-24), η οποία για ιδανικό αέριο γράφεται:

$$q = (u_2 - u_1) + w = c_v(T_2 - T_1) + w = (0) + (-160\ \mathrm{kJ/kg}) = -160\ \mathrm{kJ/kg} \tag{4}$$

Η εντροπία που μεταφέρεται με τη θερμότητα αυτή είναι:

$$\frac{q}{T} = \frac{-160\ \mathrm{kJ/kg}}{303\ \mathrm{K}} = -0{,}528\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)} \tag{5}$$

Η μεταβολή $(s_2 - s_1)$ της ειδικής εντροπίας του αέρα υπολογίζεται από την εξίσωση (9-28β), η οποία για ισόθερμη διεργασία απλοποιείται στη σχέση:

$$s_2 - s_1 = - R \ln \frac{p_2}{p_1} = - \left[(0{,}287\,\mathrm{kJ/(kg \cdot K)})\right] \ln \left(\frac{2500\,\mathrm{kPa}}{200\,\mathrm{kPa}}\right) = - 0{,}725\,\mathrm{kJ/(kg \cdot K)} \qquad (6)$$

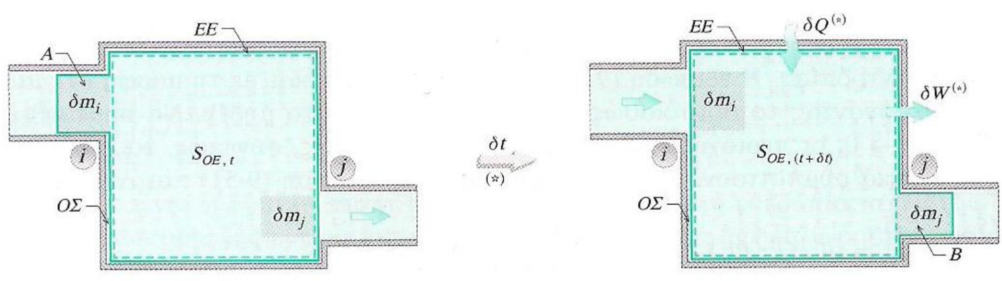
Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (3), προκύπτει:

$$\sigma_m = [(-\,0{,}725) - (-\,0\ 528)]\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)} = -\,0{,}197\ \mathrm{kJ/(kg \cdot K)} < 0 \qquad (7)$$

Άρα, ο ισχυρισμός του εφευρέτη δεν είναι αληθής, αφού η παραγόμενη εντροπία είναι αρνητική.

9-10 Ισοζύγιο Εντροπίας για Όγκο Ελέγχου

Για την εύρεση της μαθηματικής έκφρασης του ισοζυγίου εντροπίας για όγκο ελέγχου, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που οδήγησε στη διατύπωση των αντίστοιχων ισοζυγίων μάζας (§ 7-2) και ενέργειας (§ 7-4). Έτσι, θεωρούμε ένα σύστημα (Σ) το οποίο διέρχεται από έναν ακίνητο όγκο ελέγχου (OE) όπως φαίνεται στο Σχήμα 9-7. Τα όρια του συστήματος δείχνονται με συνεχή γραμμή και η οριακή επιφάνεια του όγκου ελέγχου με διακεκομμένη γραμμή. Τη χρονική στιγμή t (Σχήμα 9-7α), το σύστημα καταλαμβάνει την περιοχή του ΟΕ και μια μικρή εξωτερική περιοχή A γειτονική της εισόδου i στην οποία περιέχεται μάζα δm_i. Μετά χρόνο δt, το σύστημα καταλαμβάνει την περιοχή του ΟΕ και μια μικρή εξωτερική περιοχή B γειτονική της εξόδου j στην οποία περιέχεται μάζα δm_j (Σχήμα 9-7β). Οι ιδιότητες των μαζών δm_i και δm_j θεωρούνται ομοιόμορφες. Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το σύστημα εκτελεί καθαρό έργο δW και μεταφέρεται σε αυτό καθαρό ποσό θερμότητας δQ.



(α) *Θέση τη στιγμή t* (β) *Θέση τη στιγμή t + δt*

Σχήμα 9-7 *Κίνηση συστήματος (Σ) ως προς ακίνητο όγκο ελέγχου (ΟΕ) για τη μετατροπή του ισοζυγίου εντροπίας για κλειστό σύστημα σε ισοδύναμη έκφραση για ανοικτό σύστημα.*

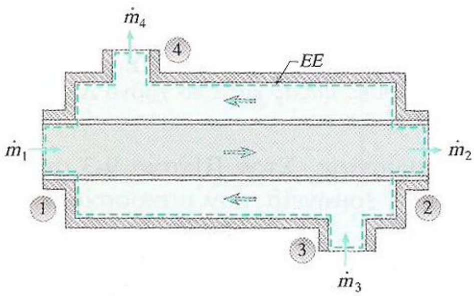
όγκο ελέγχου σε μόνιμη ροή, λόγω του ιδιαίτερου ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν τα ισοζύγια αυτά από την άποψη των εφαρμογών. Οι εξισώσεις (7-27α) και (7-52) δείχνουν ότι η μάζα και η ενέργεια του ρευστού που εισέρχεται και εξέρχεται από τον όγκο ελέγχου είναι η ίδια. Αντίθετα, όπως δείχνει η εξίσωση (9-58), η εντροπία γενικά δε διατηρείται, αλλά αυξάνεται λόγω της παρουσίας αναντιστρεπτοτήτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9-10

Σκοπός: Ο υπολογισμός της παραγόμενης εντροπίας σε μια διάταξη μόνιμης ροής.

Το πρόβλημα: *Αέρας θερμαίνεται υπό σταθερή πίεση 100 kPa από τους 12 °C στους 47 °C σε έναν αδιάθερμο εναλλάκτη θερμότητας διπλού σωλήνα (Σχήμα Π9-10). Για τη θέρμανση του αέρα χρησιμοποιείται η θερμική ενέργεια που εκλύεται κατά τη συμπύκνωση κορεσμένου υδρατμού πίεσης 120 kPa και τη μετατροπή του σε κορεσμένο υγρό της ίδιας πίεσης. Να υπολογιστεί η παραγόμενη εντροπία ανά kg αέρα που διέρχεται από τον εναλλάκτη θερμότητας.*

Λύση: Επιλέγουμε ως όγκο ελέγχου το εσωτερικό του εναλλάκτη θερμότητας (Σχήμα Π9-10) και εφαρμόζουμε το ισοζύγιο εντροπίας για μόνιμη ροή με τη μορφή της εξίσωσης (9-58):



Σχήμα Π9-10

$$\sum_j \dot{m}_j s_j - \sum_i \dot{m}_i s_i = \sum_k \frac{\dot{Q}_k}{T_k} + \dot{\sigma}_{OE} \qquad (1)$$

Επειδή η επιφάνεια ελέγχου διαπερνάται από τα δύο ρευστά (αέρα και νερό) σε τέσσερις θέσεις (τις 1, 2, 3 και 4) και η ροή είναι αδιάθερμη, η εξίσωση (1) τροποποιείται ως εξής:

$$(\dot{m}_2 s_2 + \dot{m}_4 s_4) - (\dot{m}_1 s_1 + \dot{m}_3 s_3) = \dot{\sigma}_{OE} \qquad (2)$$

Αν εφαρμόσουμε το ισοζύγιο μάζας για ΟΕ με μία είσοδο και μία έξοδο σε συνθήκες μόνιμης ροής, [Εξ. (7-28)], για καθένα από τα δύο ρεύματα που διαπερνούν την ΕΕ, καταλήγουμε στις σχέσεις: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ και $\dot{m}_3 = \dot{m}_4$. Λόγω των σχέσεων αυτών, η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\dot{\sigma}_{OE} = \dot{m}_1 (s_2 - s_1) + \dot{m}_3 (s_4 - s_3) \quad \text{ή} \quad \frac{\dot{\sigma}_{OE}}{\dot{m}_1} = (s_2 - s_1) + \left(\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1}\right)(s_4 - s_3) \qquad (3)$$

Ο λόγος των ρυθμών ροής μάζας $\dot{m}_3 / \dot{m}_1$ μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή του ισοζυγίου ενέργειας για ΟΕ με τη μορφή της εξίσωσης (7-52), η οποία ισχύει για μόνιμη ροή:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_j \dot{m}_j \left(h + \tfrac{1}{2} v^2 + gz\right)_j - \sum_i \dot{m}_i \left(h + \tfrac{1}{2} v^2 + gz\right)_i \qquad (4)$$

Αν θεωρήσουμε αμελητέες τις μεταβολές κινητικής και δυναμικής ενέργειας, η εξίσωση (4) γράφεται:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_j \dot{m}_j h_j - \sum_i \dot{m}_i h_i \tag{5}$$

Για τον όγκο ελέγχου του Σχήματος Π9-10, ο οποίος δεν ανταλλάσσει θερμότητα ($\dot{Q} = 0$) και έργο ($\dot{W} = 0$) με το περιβάλλον του, η εξίσωση (4) λαμβάνει τη μορφή:

$$(\dot{m}_2 h_2 + \dot{m}_4 h_4) - (\dot{m}_1 h_1 + \dot{m}_3 h_3) = 0 \tag{6}$$

Θέτοντας στην εξίσωση αυτή $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ και $\dot{m}_3 = \dot{m}_4$, προκύπτει για το λόγο $\dot{m}_3 / \dot{m}_1$ η έκφραση:

$$\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1} = \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_4} \tag{7}$$

Από τον πίνακα ιδιοτήτων αέρα σε κατάσταση τελείου αερίου (Πίνακας Σ7-1), για θερμοκρασίες $T_1 = 285$ K και $T_2 = 320$ K, λαμβάνονται οι ακόλουθες τιμές ενθαλπίας και εντροπίας:

$$h_1 = 285{,}14 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \qquad h_2 = 320{,}29 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \qquad s_1^{\circ} = 1{,}6506 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \qquad s_2^{\circ} = 1{,}7669 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \tag{8}$$

Επίσης, από τον πίνακα ιδιοτήτων κορεσμένου νερού (Πίνακας Σ10-1Β), για πίεση 120 kPa, λαμβάνονται οι ακόλουθες τιμές ενθαλπίας και εντροπίας:

$$h_3 = h_g = 2683{,}44 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \qquad h_4 = h_\ell = 439{,}36 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \qquad s_3 = s_g = 7{,}2984 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \qquad s_4 = s_\ell = 1{,}3609 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \tag{9}$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (7), προκύπτει για το λόγο $\dot{m}_3 / \dot{m}_1$ η τιμή:

$$\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1} = \frac{(320{,}29 - 285{,}14)\ \text{kJ/kg}}{(2683{,}44 - 439{,}36)\ \text{kJ/kg}} = 0{,}01566 \tag{10}$$

Η μεταβολή $(s_2 - s_1)$ της ειδικής εντροπίας του αέρα μεταξύ εισόδου (1) και εξόδου (2) μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (9-32α):

$$s_2 - s_1 = (s_2^{\circ} - s_1^{\circ}) - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{11}$$

Επειδή η θέρμανση του αέρα είναι ισοβαρής ($p_1 = p_2$), η εξίσωση (11) απλοποιείται στη σχέση $s_2 - s_1 = s_2^{\circ} - s_1^{\circ}$, οπότε η εξίσωση (3) γράφεται:

$$\frac{\dot{\sigma}_{OE}}{\dot{m}_1} = (s_2^{\circ} - s_1^{\circ}) + \left(\frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_1}\right)(s_4 - s_3) \tag{12}$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (12):

$$\frac{\dot{\sigma}_{OE}}{\dot{m}_1} = \left[(1{,}7669 - 1{,}6506) + (0{,}01566)(1{,}3609 - 7{,}2984)\right] \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)} = 0.0233\ \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)} \tag{13}$$

Άρα, η παραγόμενη εντροπία κατά τη διεργασία αυτή είναι 23,3 J/(kg αέρα · K).

Ισεντροπικες Σχεσεις για Ασυμπιεστη Ουσια

Αν η ειδική θερμοχωρητικότητα μιας ασυμπίεστης ουσίας είναι σταθερή (ή χρησιμοποιηθεί η μέση τιμής της) για τη δοθείσα περιοχή θερμοκρασίας, η μεταβολή της εντροπίας της ουσίας υπολογίζεται από την εξίσωση (9-34):

$$s_2 - s_1 = c_m \ln \frac{T_2}{T_1} \tag{9-34}$$

Για *ισεντροπική διεργασία*, η $\Delta s = s_2 - s_1 = 0$, οπότε η εξίσωση (9-34) οδηγεί στη σχέση:

$$\ln (T_2 / T_1) = 0 \qquad \text{ή} \qquad T_2 = T_1 \tag{9-90}$$

Δηλαδή, *η ισεντροπική διεργασία ασυμπίεστης ουσίας είναι και ισόθερμη*. Επίσης, επειδή $du = c\,dT$ για ασυμπίεστη ουσία, η $\Delta u = u_2 - u_1 = 0$ για ισεντροπική διεργασία. Συμπερασματικά, όταν μια ουσία θεωρηθεί ως ασυμπίεστη και η διεργασία ως ισεντροπική, τότε ο ειδικός όγκος, η ειδική εντροπία, η θερμοκρασία και η ειδική εσωτερική ενέργεια της ουσίας είναι όλες σταθερές. Όμως, άλλες ιδιότητες (όπως η πίεση, η ενθαλπία, η ταχύτητα και το υψόμετρο) μπορεί να μεταβάλλονται σημαντικά κατά τη διάρκεια της ισεντροπικής διεργασίας.

Η μεταβολή ενθαλπίας μιας ασυμπίεστης ουσίας δίνεται από την εξίσωση (5-104):

$$\Delta h = c\Delta T + v\Delta p \qquad \text{ή} \qquad h_2 - h_1 = c\,(T_2 - T_1) + v\,(p_2 - p_1) \tag{9-91}$$

Για ισεντροπική διεργασία, η $T_2 = T_1$, οπότε η εξίσωση (9-91) απλοποιείται στη σχέση:

$$h_2 - h_1 = v\,(p_2 - p_1) \tag{9-92}$$

Η έκφραση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό του έργου αντλίας (§ 9-13).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9-12

Σκοπός: Ο έλεγχος της δυνατότητας πραγματοποίησης δεδομένης διεργασίας.

Το πρόβλημα: *(α) Είναι δυνατή η αδιάθερμη εκτόνωση αέρα από αρχική πίεση 400 kPa και θερμοκρασία 120 °C σε τελική πίεση 150 kPa και θερμοκρασία 40 °C;*

β. *Ποιά είναι η ελάχιστη δυνατή τελική θερμοκρασία για αδιάθερμη εκτόνωση αέρα από τις δοθείσες αρχικές συνθήκες στα 150 kPa;*

γ. *Ποιά είναι η μέγιστη δυνατή τελική θερμοκρασία του αέρα για αδιάθερμη εκτόνωση;*

Λύση: α. Για να είναι δυνατή η πραγματοποίηση της δοθείσας διεργασίας, θα πρέπει να ικανοποιείται η αρχή της αύξησης εντροπίας, [Εξ. (9-74)]:

$$\sigma = \Delta S_{Ολική} = \Delta S_{\Sigma} + \Delta S_{\Pi} \geqslant 0 \tag{α-1}$$

όπου εδώ το σύστημα είναι ο αέρας. Επειδή η διεργασία είναι αδιάθερμη, η μεταβολή της εντροπίας του περιβάλλοντος είναι μηδέν ($\Delta S_{\Pi} = 0$), οπότε η εξίσωση (1) απλοποιείται στη σχέση:

$$\sigma = \Delta S_\Sigma \geqslant 0 \qquad \text{ή} \qquad \sigma_m = \Delta s_\Sigma \geqslant 0 \tag{α-2}$$

Στις δοθείσες συνθήκες, ο αέρας μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο με σταθερές ειδικές θερμοχωρητικότητες. Επομένως, η μεταβολή Δs_Σ της ειδικής εντροπίας του αέρα μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης υπολογίζεται από την εξίσωση (9-28β):

$$\Delta s_\Sigma = s_2 - s_1 = c_{p,m} \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \tag{α-3}$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης αυτής, προκύπτει:

$$\Delta s_\Sigma = \left(1{,}004 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right) \ln\left(\frac{313}{393}\right) - \left(0{,}287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}\right) \ln\left(\frac{150\ \text{kPa}}{400\ \text{kPa}}\right) = 0{,}053 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} > 0 \tag{α-4}$$

Άρα, η διεργασία είναι εφικτή, αφού ικανοποιείται η αρχή της αύξησης εντροπίας ($\sigma > 0$).

β Η ελάχιστη δυνατή τελική θερμοκρασία συμβαίνει όταν η αδιάθερμη διεργασία είναι αντιστρεπτή. Υπό τις συνθήκες αυτές, η τελική θερμοκρασία υπολογίζεται από την ισεντροπική σχέση (9-81β):

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} = (393\ \text{K}) \left(\frac{150\ \text{kPa}}{400\ \text{kPa}}\right)^{\left(\frac{1{,}4-1}{1{,}4}\right)} = 297\ \text{K} \quad \text{ή} \quad 24\ ^\circ\text{C} \tag{β-1}$$

γ Η μέγιστη δυνατή τελική θερμοκρασία του αέρα για αδιάθερμη διεργασία συμβαίνει όταν δεν εκτελείται έργο. Υπό τις συνθήκες αυτές ($Q = 0$ και $W = 0$), το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα, [Εξ. (6-18)], απλοποιείται στη σχέση;

$$\Delta U = 0 \qquad \text{ή} \qquad U_2 = U_1 \tag{γ-1}$$

Για ιδανικό αέριο, όπου η $U = U(T)$, αυτό σημαίνει ότι η θερμοκρασία $T_2 = T_1 = 120\ ^\circ\text{C}$.

9-13 Ισεντροπικοί Βαθμοί Απόδοσης

Η *ισεντροπική διεργασία* είναι μια *ιδεατή αδιάθερμη* διεργασία, η οποία χρησιμοποιείται ως *πρότυπη* διεργασία για την αξιολόγηση της ενεργειακής απόδοσης διατάξεων μόνιμης ροής, όπως στροβίλων, συμπιεστών και αντλιών, όταν λειτουργούν υπό αδιάθερμες συνθήκες. Το διάγραμμα $T-s$ στο Σχήμα 9-12 δείχνει τη μοντελοποίηση μιας αδιάθερμης πραγματικής διεργασίας που συνεπάγεται μείωση πίεσης (από p_1 σε p_2). Αν μια *εσωτερικά αντιστρεπτή* διεργασία συμβεί *αδιάθερμα*, η τελική κατάσταση $2s$ βρίσκεται ακριβώς κάτω από την αρχική κατάσταση 1 και η διεργασία είναι *ισεντροπική*. Όμως, αν υπάρχουν *εσωτερικές αναντιστρεπτότητες*, η πραγματική τελική κατάσταση $2r$ πρέπει να βρίσκεται δεξιά της κατάστασης 1 πάνω στην ισοβαρή καμπύλη p_2, δηλαδή $s_2 > s_1$. Αυτή η αύξηση της εντροπίας υπαγορεύεται από το ΒΘΑ με τη μορφή:

$$\Delta S_{\text{Αδιαθ Συστ}} = m\,(s_2 - s_1) = \sigma \geqslant 0 \qquad \text{ή} \qquad s_2 - s_1 = \sigma_m \geqslant 0 \tag{9-93}$$