

Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά



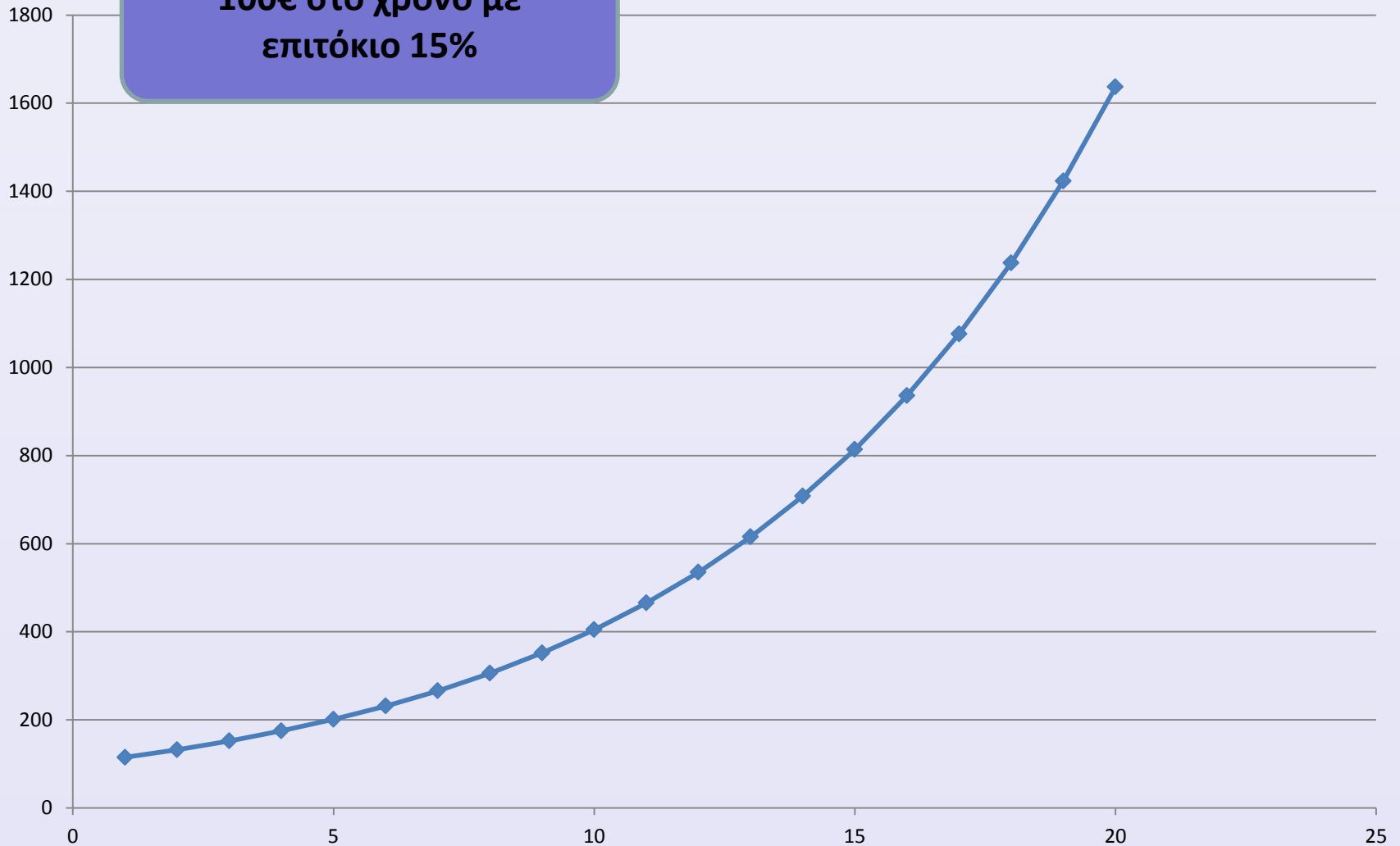
Επιτόκιο

- ✓ είναι το κόστος του χρήματος, δηλαδή η τιμή για τη χρήση συγκεκριμένου χρηματικού κεφαλαίου για συγκεκριμένη χρονική περίοδο.
- ✓ μας επιτρέπει να μετατρέψουμε χρήματα από ένα χρονικό σημείο σε ένα άλλο

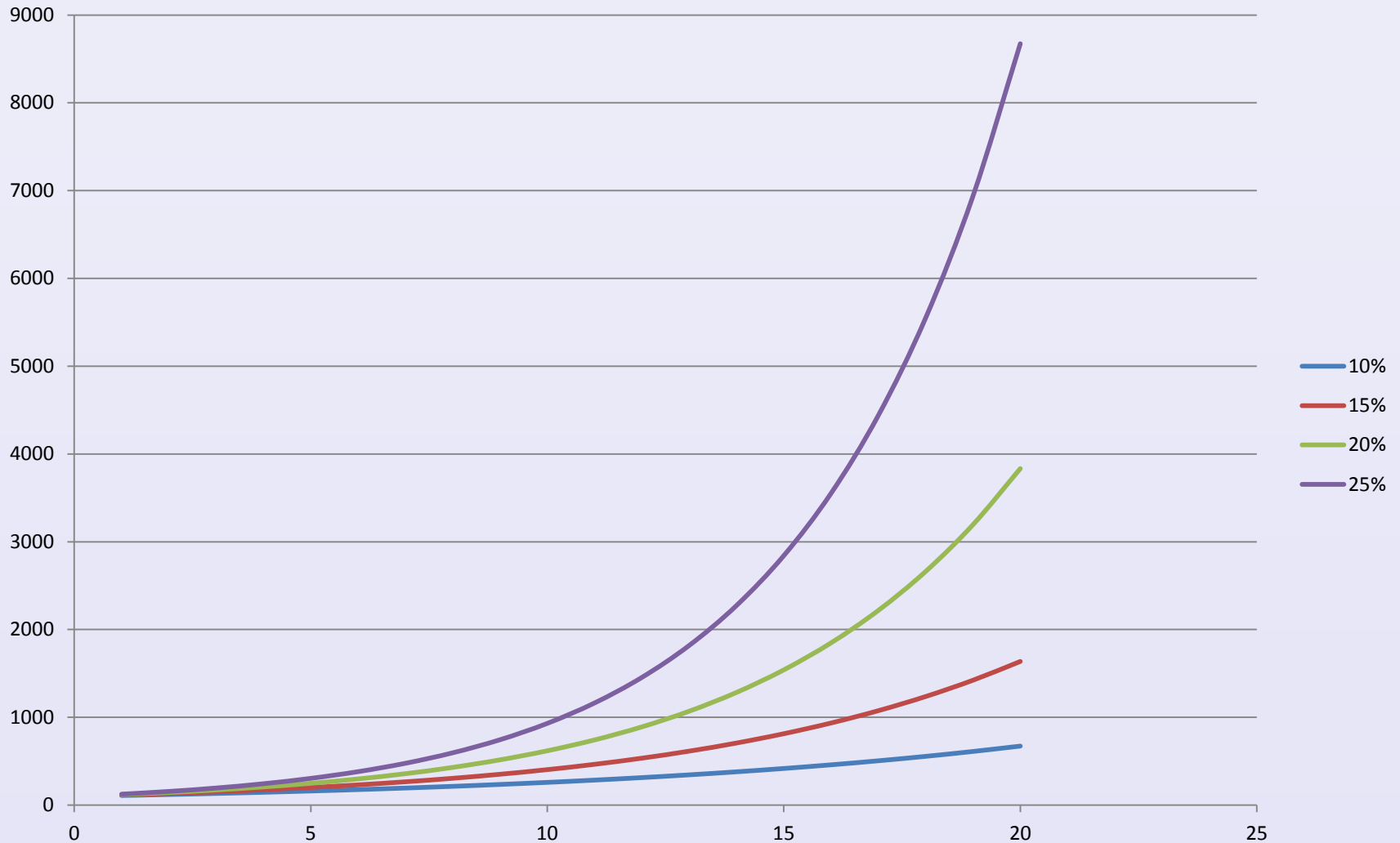
Σημ: αν ο ανατοκισμός είναι εξαμηνιαίος, τριμηνιαίος, μηνιαίος κλπ, θα πρέπει το επιτόκιο να εκφράζεται σε εξάμηνο, τρίμηνο, μήνα αντίστοιχα. Θα πρέπει η περίοδος υπολογισμού του ανατοκισμού να συμπίπτει με τις περιόδους μέτρησης του χρόνου και με την περίοδο μέτρησης του επιτοκίου.

Μεταβολή κεφαλαίου σε σχέση με το χρόνο

100€ στο χρόνο με
επιτόκιο 15%



Ανατοκισμός με διαφορετικά επιτόκια



Αναλογικά επιτόκια

Αν τοποθετήσουμε με τη μέθοδο της απλής κεφαλαιοποίησης (απλός τόκος) δυο ίσα κεφάλαια για το ίδιο χρονικό διάστημα, με **αναλογικά επιτόκια**, οι τελικές αξίες των δυο αυτών κεφαλαίων θα είναι ίσες με τη λήξη της τοποθέτησης.

Π.χ τοποθετώ 1000€ για ένα χρόνο σε μια τράπεζα με επιτόκιο 3% ετήσιο

$$\text{Τόκος} = 1000 * 3\% = 30\text{€}$$

$$\text{Τελική αξία} = 1000 + 30 = 1030\text{€}$$

& τοποθετώ 1000€ για ένα χρόνο σε μια τράπεζα, με τριμηνιαίο επιτόκιο 0,75%

$$\text{Τόκος} = 1000 * 0,75\% * 4 = 30$$

$$\text{Τελική αξία} = 1000 + 30 = 1030$$

Ισοδύναμα επιτόκια

Δύο επιτόκια i και i_ρ που αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, λέγονται **ισοδύναμα** όταν ίσα κεφάλαια τοκιζόμενα με αυτά τα επιτόκια δίνουν ίσες τελικές αξίες για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα

Έστω i το ετήσιο επιτόκιο και i_ρ το ισοδύναμό του που αντιστοιχεί σε μικρότερη περίοδο ανατοκισμού ($\rho=2$ για εξαμηνιαίο, $\rho=3$ για τετραμηνιαίο, $\rho=4$ για τριμηνιαίο ή $\rho=12$ για μηνιαίο κλπ)

Εφόσον για το ίδιο αρχικό κεφάλαιο στον ίδιο χρόνο θέλουμε να υπολογίζεται ο ίδιος τόκος, θα ισχύει:

$$C_0 \cdot (1+i_\rho)^\rho = C_0 \cdot (1+i)$$

Επομένως: $(1+i_\rho)^\rho = (1+i)$

Λύνω είτε ως προς i_ρ (το επιτόκιο της μικρότερης περιόδου) είτε ως προς i (το επιτόκιο της μεγαλύτερης περιόδου), και θα έχω:

$$i_\rho = (1+i)^{1/\rho} - 1 \quad \text{και} \quad i = (1+i_\rho)^\rho - 1$$

παραδείγματα

- α)** Το ετήσιο επιτόκιο τοκισμού ενός κεφαλαίου είναι 18%. Να υπολογισθεί το ισοδύναμο εξαμηνιαίο, τριμηνιαίο και μηνιαίο.
- β)** Αν έχουμε τριμηνιαίο επιτόκιο 4%, τότε ποιο είναι το ισοδύναμο εξαμηνιαίο επιτόκιο και ποιο το ισοδύναμο ετήσιο;
- γ)** Κεφάλαιο 10.000 € τοποθετείται με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 10% για 8 χρόνια και 6 μήνες. Να βρεθεί το ποσό το οποίο θα πάρουμε μετά το τέλος της.
- δ)** Καταθέτουμε 1.000€ για 3 χρόνια, 4 μήνες και 12 ημέρες, με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 6%. Να βρεθεί η τελική αξία του κεφαλαίου.
- ε)** Καταθέτουμε κεφάλαιο 3.500€ με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 5,6% για 3 χρόνια. Να βρεθεί το ποσό το οποίο θα πάρουμε με τα το τέλος της κατάθεσης (χρησιμοποιήστε γραμμική παρεμβολή).

Άσκηση

Έστω ότι θέλετε να αγοράσετε ένα αυτοκίνητο αξίας 15.000 € με άντληση 100% του παραπάνω ποσού από ένα δάνειο. Η αντιπροσωπεία αυτοκινήτων σας δίνει τη δυνατότητα (σενάριο 1) να αποπληρώσετε το δάνειο σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις με μηνιαίο επιτόκιο 0,72%.

- α) πόση είναι η μηνιαία δόση;
- β) πόσος είναι ο συνολικός τόκος που θα πληρώσετε;
- γ) καταρτίσετε πίνακα αποπληρωμής δανείου

2ο εργαστήριο - Microsoft Excel

File Home Insert Page Layout Formulas Data Review View

Clipboard Font Alignment Number Styles Cells Editing

Calibri 11 A A

Wrap Text

General

Conditional Formatting Format as Table Cell Styles

Insert Delete Format

AutoSum Fill Clear Sort & Filter Find & Select

C14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1			ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης	συνολικό ποσό πληρωμής	συνολικός πληρωτέος τόκος						
2														
3			15.000	0,72%	12									
4														
5														
6	A/A Δόσης	ποσό τόκου	ποσό πληρωμής κεφαλαίου	υπόλοιπο κεφαλαίου	μηνιαία δόση									
7														
8	1													
9	2													
10	3													
11	4													
12	5													
13	6													
14	7													
15	8													
16	9													
17	10													
18	11													
19	12													
20														
21														
22														

Sheet1 Sheet4 Sheet1 (2) Sheet1 (3) Sheet2 Sheet3

Ready

100%

EN 12:52 μμ 9/3/2020

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Δάνειο Αγοράς Αυτοκινήτου							
2			ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης	συνολικό ποσό πληρωμής	συνολικός πληρωτέος τόκος
3								
4	Σενάριο 1		15.000	0,72%	12			
5								



Υπόδειξη: Η συνάρτηση που υπολογίζει τη δόση ενός δανείου είναι η **PMT (payment)** και έχει την εξής σύνταξη: **PMT(Επιτόκιο δόσης, Αριθμός δόσεων, Ποσό Δανείου, [μελλοντική αξία], [τύπος])**, με τα ορίσματα μέσα σε [] να είναι προαιρετικά. Το όρισμα [τύπος] πρέπει να έχει την τιμή 0, εάν η πληρωμή της δόσης γίνεται στο τέλος του τρέχοντος μήνα (ληξυπρόθεσμη δόση) ή 1, εάν η πληρωμή της δόσης γίνεται στην αρχή του τρέχοντος μήνα (προκαταβλητέα δόση). Εάν δε δηλώσετε τιμή για τον [τύπο], ως τιμή του θεωρείται το 0. Χρησιμοποιήστε τη δυνατότητα **Help** που δίνει το Excel για να δείτε το νόημα του 4^{ου} ορίσματος [μελλοντική αξία].

Clipboard Font Alignment Number Styles Cells Editing

PMT X ✓ fx =PMT(D4;E4;C4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Δάνειο Αγοράς Αυτοκινήτου													
2			ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης	συνολικό ποσό πληρωμής	συνολικός πληρωτέος τόκος						
3														
4	Σενάριο 1		15.000	0,72%	12									
5														
6														
7	A/A Δόσης	ποσό τόκου	ποσό πληρωμής	υπόλοιπο	μηνιαία δόση									
8														
9	1													
10	2													
11	3													
12	4													
13	5													
14	6													
15	7													
16	8													
17	9													
18	10													
19	11													
20	12													
21														
22														

Function Arguments

PMT

Rate D4 = 0,0072

Nper E4 = 12

Pv C4 = 15000

Fv = number

Type = number

= -1309,269338

Calculates the payment for a loan based on constant payments and a constant interest rate.

Pv is the present value: the total amount that a series of future payments is worth now.

Formula result = -1309,269338


[Help on this function](#)

OK Cancel

Sheet1 Sheet4

Point

100%

Σ AutoSum ▾
 Fill ▾
 Clear ▾

Editi

 f_x

K

1

συνολικός
πληρωτέος τόκος

3

-1.309,27 €

5

6

μηνιαία δόση

7

8

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

21

22



Υπόδειξη: Η συνάρτηση που υπολογίζει το ποσό του τόκου σε κάποια δόση είναι η **IPMT** (interest payment) και έχει την εξής σύνταξη: **IPMT(Επιτόκιο Δόσης, Αύξων Αριθμός Δόσης, Αριθμός δόσεων, Ποσό Δανείου, [μελλοντική αξία], [τύπος])**, με τα ορίσματα μέσα σε [] να είναι προαιρετικά και τα ορίσματα με νόημα αντίστοιχο της συνάρτησης PMT. Η συνάρτηση που υπολογίζει το ποσό πληρωμής του κεφαλαίου κάποιας δόσης είναι η **PPMT** (principal payment) και έχει την εξής σύνταξη: **PPMT(Επιτόκιο Δόσης, Αύξων Αριθμός Δόσης, Αριθμός δόσεων, Ποσό Δανείου, [μελλοντική αξία], [τύπος])**, με τα ορίσματα μέσα σε [] να είναι προαιρετικά και τα ορίσματα με νόημα αντίστοιχο της συνάρτησης PMT.

Format Painter Clipboard Font Alignment Number Formatting as Table Styles Styles Cell

IPMT X ✓ fx =IPMT(D4;A9;\$E\$4;\$C\$4)

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Δάνειο Αγοράς Αυτοκινητού								
		ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης	συνολικό ποσό πληρωμής	συνολικός πληρωτέος τόκος	
Σενάριο 1		15.000	0,72%	12	-1.309,27 €			
A/A Δόσης	ποσό τόκου	ποσό π	κεφ					
1	=IPMT(A9;\$E\$4;\$C\$4)							
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								

Function Arguments

IPMT

Rate D4 = 0,0072

Per A9 = 1

Nper \$E\$4 = 12

Pv \$C\$4 = 15000

Fv = number

= -108

Returns the interest payment for a given period for an investment, based on periodic, constant payments and a constant interest rate.

Nper is the total number of payment periods in an investment.

Formula result = -108

[Help on this function](#)

OK Cancel

Sheet1 **Sheet4** Sheet1 (2) Sheet1 (3) Sheet2 Sheet3

dit

Clipboard		Font		Alignment		Number	Formatting as Table		Styles
B9		=IPMT(D4;A9;\$E\$4;\$C\$4)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Δάνειο Αγοράς Αυτοκινήτου								
2			ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης	συνολικό ποσό πληρωμής	συνολικός πληρωτέος τόκος	
3									
4	Σενάριο 1		15.000	0,72%	12	-1.309,27 €			
5									
6									
7	A/A Δόσης	ποσό τόκου	ποσό πληρωμής κεφαλαίου	υπόλοιπο κεφαλαίου	μηνιαία δόση				
8				15.000					
9	1	-108,00 €							
10	2								
11	3								
12	4								
13	5								
14	6								
15	7								
16	8								
17	9								
18	10								
19	11								
20	12								
21									
22									

1ο εργαστήριο - Microsoft Excel

File Home Insert Page Layout Formulas Data Review View

Cut Copy Format Painter Clipboard Font Alignment Number Styles Cells

PPMT $\text{=PPMT(D4;A9;\$E\$4;\$C\$4)}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Δάνειο Αγοράς Αυτοκινήτου									
		ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης	συνολικό ποσό πληρωμής	συνολικός πληρωτέος τόκος		
Σενάριο 1		15.000	0,72%	12	-1.309,27 €				
A/A Δόσης	ποσό τόκου	ποσό πληρωμής κεφαλαίου							
1	-108,00 €	A9; \$E\$4; \$C\$4)							
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									

Function Arguments

PPMT

Rate D4 = 0,0072

Per A9 = 1

Nper \$E\$4 = 12

Pv \$C\$4 = 15000

Fv = number

= -1201,269338

Returns the payment on the principal for a given investment based on periodic, constant payments and a constant interest rate.

Pv is the present value: the total amount that a series of future payments is worth now.

Formula result = -1201,269338

Help on this function

OK Cancel

▼ f_x

[illegible]

Εάν θέλετε να πληρώνετε περίπου 1.000€ ως μηνιαία δόση και επιβαρύνεστε με μηνιαίο επιτόκιο 0,72%, πόσες δόσεις θα πρέπει να καταβάλλεται για το ποσό των 15.000 €;

ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης	συνολικό ποσό πληρωμής	συνολικός πληρωτέος τόκος
15.000	0,72%	12	-1.309,27 €	-15.711,23 €	

Goal Seek

Set cell:

\$F\$4

To value:

-1000

By changing cell:

\$E\$4

OK

Cancel

2ο εργαστήριο - Microsoft Excel

File Home Insert Page Layout Formulas Data Review View

From Access From Web From Text From Other Sources Existing Connections Refresh All Properties Edit Links Connections Sort Filter Clear Reapply Advanced Text to Columns Remove Duplicates Data Validation Consolidate What-If Analysis Group Ungroup Subtotal Show Detail Hide Detail Data Analysis Επύλυση Outline Ανάλυση

J8 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2			ποσό δανεισμού	επιτόκιο	αριθμός μηνιαίων δόσεων	ποσό δόσης										
3																
4			15.000	0,72%	16	-1.000,00 €										
5																
6																
7																
8			A/A Δόσης	ποσό τόκου	ποσό πληρωμής κεφαλαίου	υπόλοιπο κεφαλαίου	μηνιαία δόση									
9																
10			1	-108,000	-892,000		-1000,000									
11			2	-101,607	-898,422		-1000,029									
12			3	-95,168	-904,891		-1000,059									
13			4	-88,683	-911,406		-1000,089									
14			5	-82,151	-917,968		-1000,119									
15			6	-75,572	-924,578		-1000,150									
16			7	-68,945	-931,235		-1000,180									
17			8	-62,271	-937,940		-1000,211									
18			9	-55,549	-944,693		-1000,242									
19			10	-48,779	-951,495		-1000,273									
20			11	-41,959	-958,345		-1000,305									
21			12	-35,091	-965,245		-1000,336									
22			13	-28,173	-972,195		-1000,368									
23			14	-21,205	-979,195		-1000,400									

9% / πίνακας 0,72% goal seek Sheet2 Sheet3

Ready 100%

EN 1:20 μμ 9/3/2020