

Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

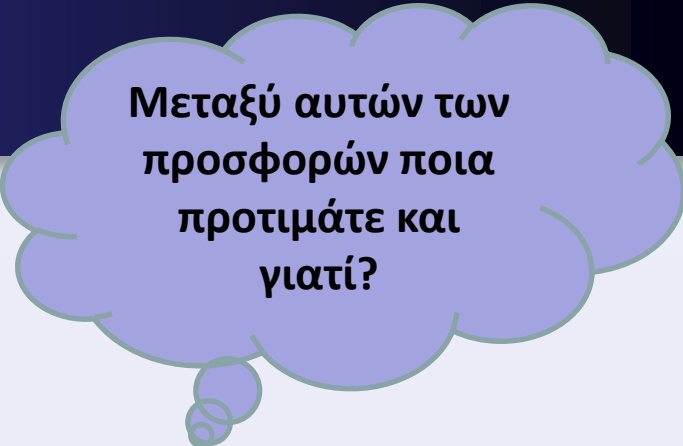


**«Το *χρήμα* δεν έχει την ίδια αξία σε
οποιαδήποτε στιγμή του χρόνου»**

- Πού θα δώσετε μεγαλύτερη βαρύτητα στο *παρόν* ή στο *μέλλον*?

*Διαχρονική αξία χρήματος,
η διαφορά στην αξία μεταξύ σημερινών χρημάτων & μελλοντικών*

Διάκριση μεταξύ ΜΑ & ΠΑ



Μεταξύ αυτών των προσφορών ποια προτιμάτε και γιατί?

- **Προσφορά 1:** Μου δίνετε €100 τώρα και θα σας δώσω πίσω €162,90 σε 10 χρόνια.
- **Προσφορά 2:** Μου δίνετε €100 τώρα και θα σας δώσω πίσω €12,95 κάθε χρόνο για τα επόμενα 10 χρόνια.
- **Προσφορά 3:** Μου δίνετε €10 κάθε χρόνο για τα επόμενα 10 χρόνια και θα σας δώσω πίσω €125,78 το δέκατο χρόνο.
- **Προσφορά 4:** Μου δίνετε €100 τώρα και θα σας δώσω πίσω €100 σε 10 χρόνια και €5,432 κάθε χρόνο για το διάστημα από 1- 9 χρόνια.

Παρούσα & Μελλοντική Αξία

Βασικές υποθέσεις:

- ✓ Γνωρίζουμε με βεβαιότητα το μέγεθος των μελλοντικών επιτοκίων, εισπράξεων και πληρωμών
- ✓ Το επίπεδο των τιμών, αγαθών και υπηρεσιών στο μέλλον θα είναι το ίδιο με αυτό που ισχύει σήμερα (όχι πληθωρισμός)

Βασικές έννοιες

Κεφάλαιο: οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο, ένας από τους συντελεστές της παραγωγικής διαδικασίας, τα χρήματα που διαθέτει κάποιος

Επιτόκιο: η αμοιβή του κεφαλαίου για κάθε μονάδα χρόνου για αυτόν που δανείζει κεφάλαια (ή επενδύει ή καταθέτει σε τράπεζα), αποτελεί δε κόστος για αυτόν που δανείζεται (τιμή χρήσης χρημάτων)

Τόκος: είναι το αντίτιμο (ενοίκιο) του δανειζόμενου κεφαλαίου και εξαρτάται από το μέγεθος του κεφαλαίου, το επιτόκιο και τη χρονική διάρκεια του δανείου ($\text{κεφάλαιο} * \text{επιτόκιο}$)

Διαχρονική αξία χρήματος

Ένας επενδυτής καταθέτει σήμερα σε μια τράπεζα 1.000€, η οποία επένδυση δεσμεύεται για ένα έτος. Η τράπεζα προσφέρει ετήσιο επιτόκιο 10%. Ο τόκος καταβάλλεται μια φορά στο τέλος κάθε έτους

Άρα, τόκος = $1.000 * 0,10 = 100$ €

Και η συνολική αξία επένδυσης στο τέλος του 1ου έτους θα είναι $1.000 + 100 = 1.100$ €

Έστω ότι ο επενδυτής αποφασίζει να επενδύσει για ακόμα ένα έτος το ποσό των 1.100 € για ένα ακόμα έτος με το ίδιο επιτόκιο

Τόκος 2^{ου} έτους: $1.100 * 0,10 = 110$

Συνολική αξία επένδυσης στο τέλος 2^{ου} έτους:

$$1.100 + 110 = 1.210 \text{ €}$$

- ✓ **Κεφαλαιοποίηση ή ανατοκισμός:** η ενσωμάτωση του παραγόμενου τόκου στο κεφάλαιο που τον παρήγαγε
- ✓ Το αρχικό κεφάλαιο αυξάνει με την πάροδο του χρόνου, το **χρήμα** έχει **διαχρονική αξία**

Μελλοντική (τελική) αξία επένδυσης

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

Όπου, $(1 + i)^n$ συντελεστής τελική αξίας ή ανατοκισμού (CVIF)

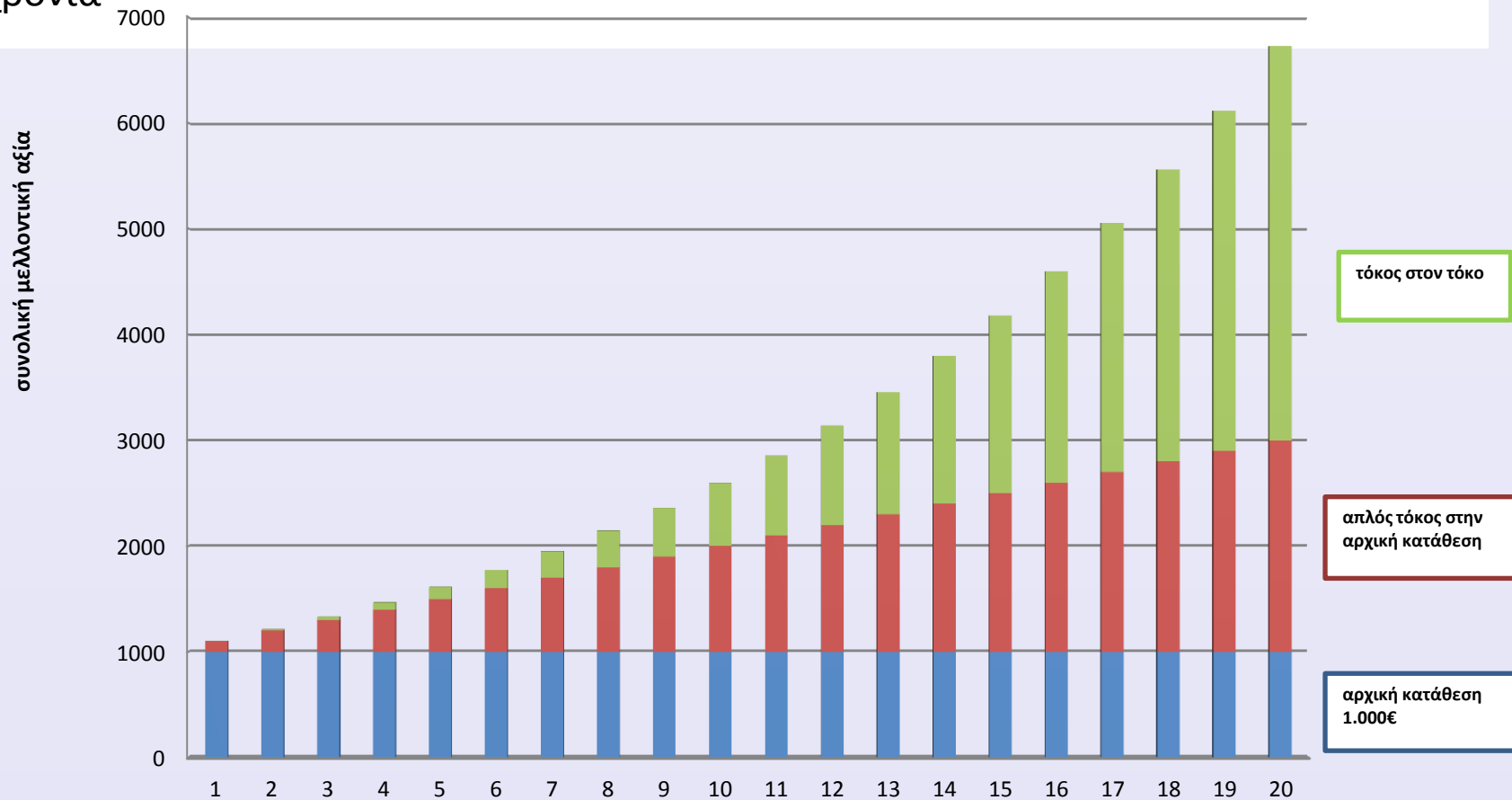
π.χ. Καταθέτω 1.000 € σε μια τράπεζα στις 31.12.2019 με ετήσιο επιτόκιο 3% και ετήσια κεφαλαιοποίηση. Τι ποσό θα έχω στις 31.12.2023;

$$\begin{aligned} C_{3\%,4 \text{ χρονια}} &= C_0 * \text{CVIF}(3\%, 4 \text{ χρονια}) \\ &= 1.000 * 1,1255 = 1.125,5 \end{aligned}$$

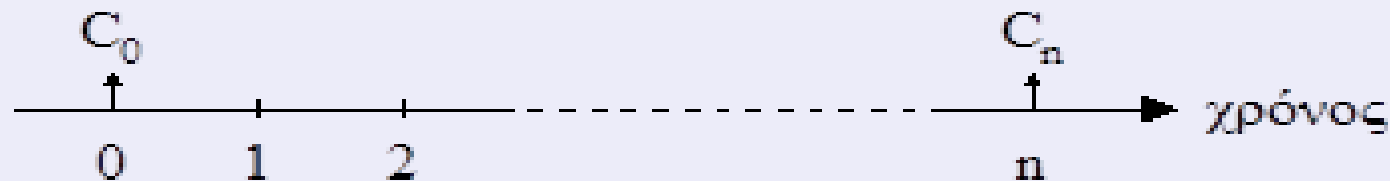
Χρηματοοικονομικοί πίνακες: Τελική αξία μιας μονάδας $(1 + i)^n$

Περίοδοι	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605
5	1,0510	1,1041	1,1595	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157

1.000€ κατάθεση σήμερα
επιτόκιο 10% ετήσιο
20 χρόνια



Παρούσα αξία επένδυσης



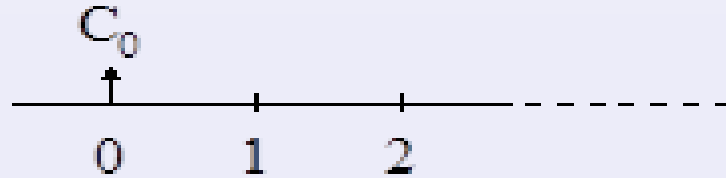
$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$$

Όπου, $(1 + i)^{-n}$ συντελεστής προεξόφλησης ή παρούσας αξίας ή ανατοκισμού (PVIF)

π.χ. Ένας επενδυτής επιθυμεί να μάθει την παρούσα αξία του κεφαλαίου του, γνωρίζοντας ότι η αξία του μετά 5 χρόνια θα είναι 20.000 €, ανατοκιζόμενο ετησίως με επιτόκιο 4%.

$$\begin{aligned} C_{4\%, 5 \text{ χρονια}} &= C_n * \text{PVIF} (4\%, 5 \text{ χρονια}) \\ &= 20.000 * 0,8219 = 16.438 \end{aligned}$$

Παρούσα αξία επένδυσης



$$C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$$

Όπου, $(1 + i)^{-n}$ συντελεστής προεξόφλησης ή παρούσας αξίας ή ανατοκισμού (PVIF)

π.χ. Ένας επενδυτής επιθυμεί να μάθει την παρούσα αξία του κεφαλαίου του, γνωρίζοντας ότι η αξία του μετά 5 χρόνια θα είναι 20.000 €, ανατοκιζόμενο ετησίως με επιτόκιο 4%.

$$\begin{aligned} C_{4\%, 5 \text{ χρονια}} &= C_n * \text{PVIF} (4\%, 5 \text{ χρονια}) \\ &= 20.000 * 0,8219 = 16.438 \end{aligned}$$

Προεξόφληση

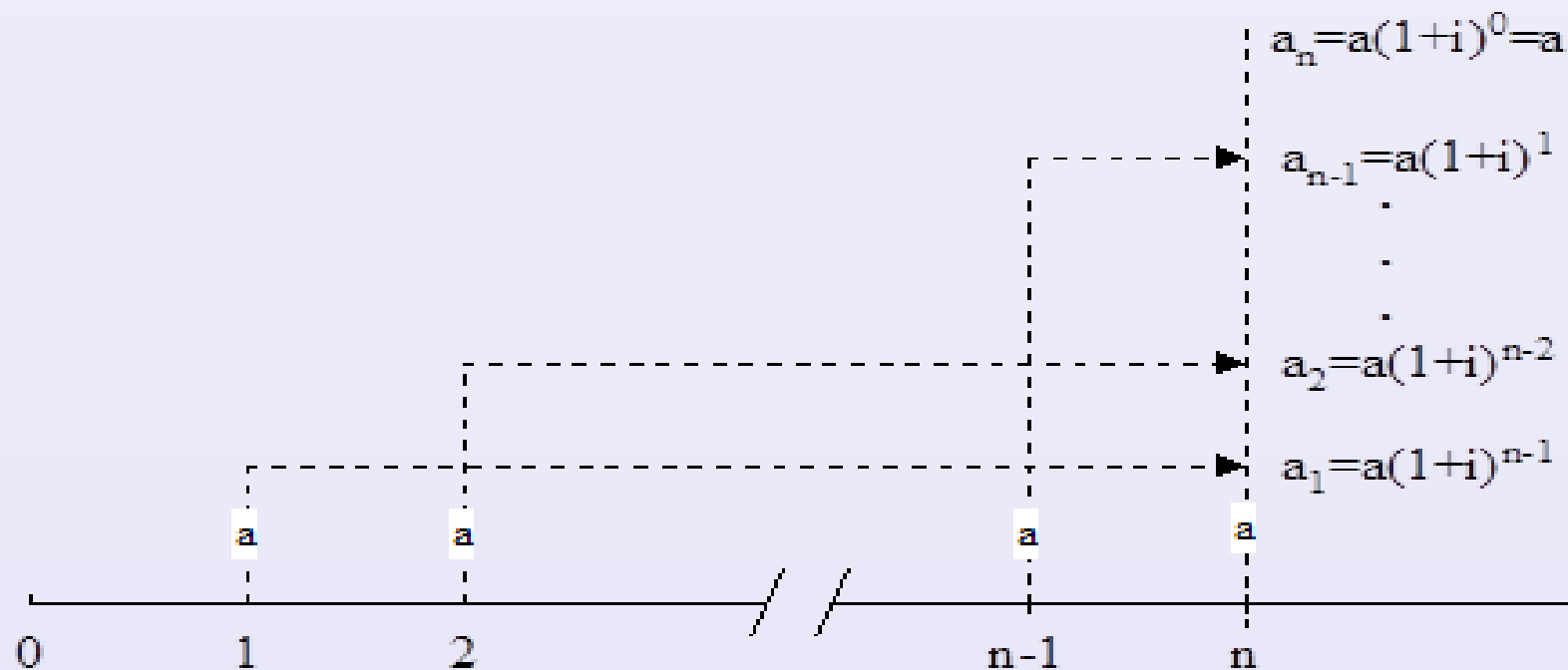
Η διαδικασία εύρεσης της ισοδύναμης σημερινής αξίας μιας μελλοντικής ταμειακής ροής (πολλαπλασιάζοντάς την με ένα παράγοντα προεξόφλησης ή αντίστοιχα διαιρώντας με τη μονάδα συν το προεξοφλητικό επιτόκιο

Χρηματοοικονομικοί πίνακες: Παρούσα αξία μιας μονάδας $(1 + i)^{-n}$

Περίοδοι	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7902	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394
16	0,8528	0,7284	0,6232	0,5339	0,4581	0,3936	0,3387	0,2919	0,2519	0,2176
17	0,8444	0,7142	0,6050	0,5134	0,4363	0,3714	0,3166	0,2703	0,2311	0,1978
18	0,8360	0,7002	0,5874	0,4936	0,4155	0,3503	0,2959	0,2502	0,2120	0,1799
19	0,8277	0,6864	0,5703	0,4746	0,3957	0,3305	0,2765	0,2317	0,1945	0,1635
20	0,8195	0,6730	0,5537	0,4564	0,3769	0,3118	0,2584	0,2145	0,1784	0,1486

Κανόνας	Εξίσωση
1. Μόνο οι αξίες που βρίσκονται στην ίδια χρονική στιγμή μπορούν να συγκριθούν	-
2. Για να υπολογίσουμε την μελλοντική αξία μιας ταμειακής ροής πρέπει να την ανατοκίσουμε	$C_n = C_0(1 + i)^n$
3. Για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας μελλοντικής ταμειακής ροής, πρέπει να την προεξοφλήσουμε	$C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$

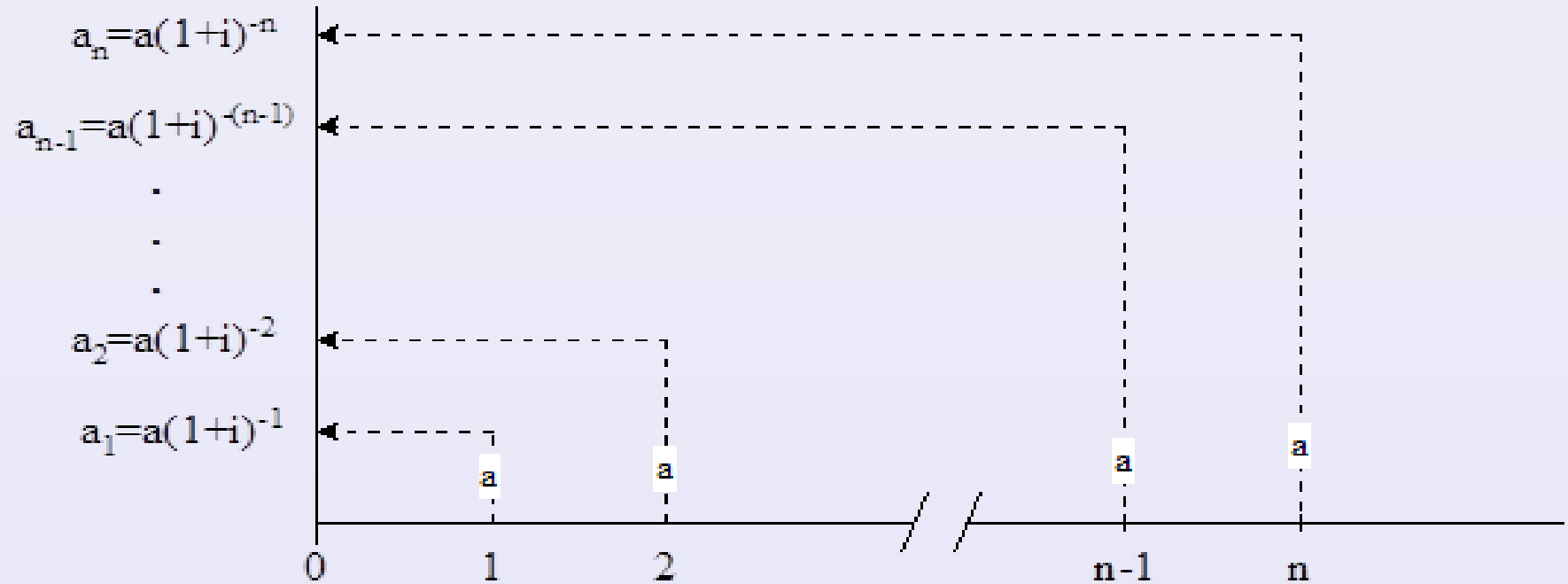
Τελική αξία σταθερής ετήσιας ράντας



Δηλαδή, $V_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$

και
$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Παρούσα αξία σταθερής ετήσιας ράντας



$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Άσκηση 1

Η επικεφαλίδα μιας εφημερίδας γράφει:

«Ο ποδοσφαιριστής Χ υπέγραψε συμβόλαιο ύψους €1.400.000!!!!!!».

Όταν διαβάσετε το άρθρο θα ανακαλύψετε ότι, ο παίκτης θα εισπράττει €100.000 το χρόνο, για έξι χρόνια. Στη συνέχεια, θα εισπράττει €40.000 κάθε χρόνο και για 20 χρόνια.

Υποθέτοντας ότι το κόστος του χρήματος, σήμερα, είναι 10%, ποια είναι η Παρούσα Αξία (Π.Α.) του συμβολαίου του;

Παρατηρούμε ότι:

$$6 \text{ χρόνια} \times €100.000 + 20 \text{ χρόνια} \times €40.000 = €1.400.000$$

Αρχικά θα βρούμε την παρούσα αξία των 40.000 €

$$V_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 40.000 * \Sigma (10\%, 20 \text{ χρόνια})$$
$$= 40.000 * 8,5136 = 340.544 \text{ €}.$$

Τα 340.544 € είναι η ΠΑ με έτος «μηδέν» το 6^ο έτος.



$$\text{Άρα, } C_{10\%, 6 \text{ χρόνια}} = C_n * \text{PVIF} (10\%, 6 \text{ χρόνια})$$
$$= 340.544 * 0,5645 = 192.237,088$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε την παρούσα αξία των €100.000:

$$V_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 100.000 * \Sigma (10\%, 6 \text{ χρόνια})$$

$$= 100.000 * 4,3553 = 435.530 \text{ €}$$

Επομένως η Παρούσα αξία του συμβολαίου θα είναι:

$$\Pi. A._1 + \Pi. A._2 = 192.237,088 + 435.530 = 627.767,088$$

Άσκηση 2

Έχετε πάρει ένα δάνειο 2.000 €. Καταρτίσετε τον πίνακα αποπληρωμής του δανείου, με δεδομένο ότι το επιτόκιο είναι 11%, η διάρκεια του 3ετής και ο ανατοκισμός ετήσιος.

έτος	Ποσό δόσης	Τόκος	Αρχικό κεφάλαιο 2.000 €	Υπόλοιπο δανείου προς εξόφληση
1				
2				
3				

Άσκηση 2

Έχετε πάρει ένα δάνειο 2.000 €. αποπληρωμής του δανείου, με δ είναι 11%, η διάρκεια του 3ετη, ετήσιος.

Χρεολυτικό δάνειο

Ένα δάνειο που ο δανειολήπτης καταβάλλει μηνιαίες πληρωμές που περιλαμβάνουν τόκο στο δάνειο και ένα μέρος του αρχικού κεφαλαίου

έτος	Ποσό δόσης	Τόκος	Αρχικό κεφάλαιο 2.000 €	Υπόλοιπο δανείου προς εξόφληση
1				
2				
3				

Ποσό δόσης:

$$V_0 = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{και} \quad 2.000 = a * \Sigma (11\%, 3 \text{ χρόνια})$$

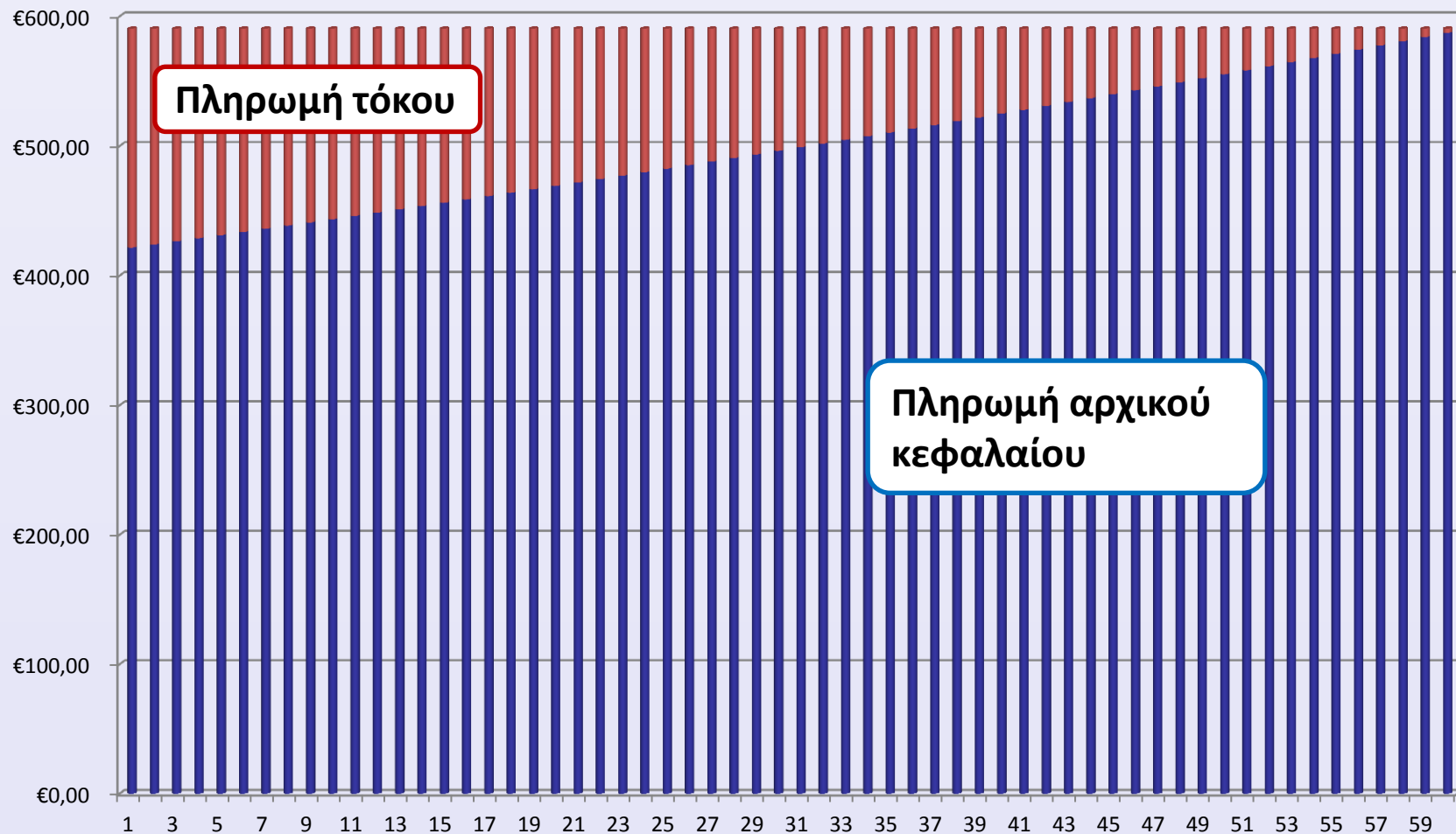
$$2.000 = a * 2,4437 \text{ (βλ. πίνακες)}$$

Επομένως δόση $a = 818,431 \text{ €}$

έτος	Ποσό δόσης	Τόκος	Αρχικό κεφάλαιο 2.000 €	Υπόλοιπο δανείου προς εξόφληση
1	818,431	220 (=2.000*11%)	2.220 (=2.000+220)	1.401,569 (=2.220-818,431)
2	818,431	154,17	1.555,739	737,308
3	818,431	81,10	818,411	0

Πως ο τόκος και το αρχικό κεφάλαιο των
μηνιαίων δόσεων αλλάζουν κατά τη διάρκεια
ζωής του δανείου

30.000 €
60 μηνιαίες δόσεις
6,75% ετήσιο επιτόκιο
Μηνιαία δόση = 590,64 €



Δανειακό υπόλοιπο

