



Πολυτεχνείο
Κρήτης

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Εισαγωγή στην Τεχνητή
Νοημοσύνη

Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (Artificial Neural Networks)

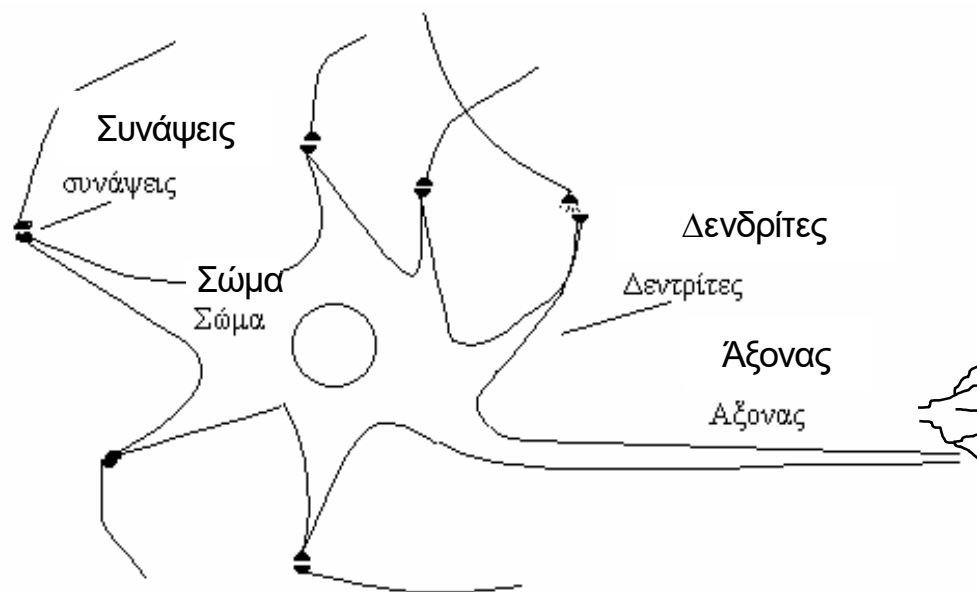
Τσαφαράκης Στέλιος

Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα

- ❖ Μια κατηγορία μοντέλων μηχανικής μάθησης εμπνευσμένα από τη δομή & λειτουργία του εγκεφάλου.
- ❖ Χρησιμοποιούνται για να προσεγγίσουν συναρτήσεις συνήθως άγνωστης μορφής, με μεγάλο αριθμό εισόδων & πολλές αλληλεπιδράσεις.
- ❖ Εφαρμόζονται σε προβλήματα ταξινόμησης, πρόβλεψης, ομαδοποίησης κ.α.
- ❖ Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούν πολύ απλοποιημένα μοντέλα νευρώνων σε σχέση με τα βιολογικά.
- ❖ Η λειτουργία τους προσδιορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τον τρόπο σύνδεσης μεταξύ των επιμέρους στοιχείων (νευρώνων).
- ❖ Τα στοιχεία αυτά έχουν ρυθμιζόμενες παραμέτρους ώστε το δίκτυο να προσαρμόζεται & να επιτυγχάνεται η διαδικασία της μάθησης.
- ❖ Μπορούν να αποτελούνται από μεγάλο πλήθος στοιχείων που λειτουργούν σε παράλληλη διάταξη & διευκολύνουν την κατανομή της πληροφορίας.

Φυσικός Νευρώνας

- ❖ Η δομική μονάδα του εγκεφάλου είναι το νευρικό κύτταρο ή νευρώνας
- ❖ Ο πυρήνας του νευρώνα ονομάζεται *σώμα*
- ❖ Οι *δενδρίτες* είναι οι πύλες εισόδου, μέσω των οποίων τα σήματα (ηλεκτρικοί παλμοί) από άλλους δενδρίτες εισέρχονται στο *σώμα*
- ❖ Σε κάθε *δενδρίτη* υπάρχει ένα απειροελάχιστο κενό που ονομάζεται *σύναψη*.
- ❖ Οι *συνάψεις* επιταχύνουν ή επιβραδύνουν τη ροή των σημάτων
- ❖ Η ικανότητα μάθησης & μνήμης οφείλεται στη μεταβολή της αγωγιμότητας των συνάψεων
- ❖ Τα σήματα που εισέρχονται στο *σώμα* μέσω των *δενδριτών*, συνδυάζονται και αν το αποτέλεσμα ξεπερνά κάποιο κατώφλι, διαδίδεται μέσω του *άξονα* προς άλλους νευρώνες.

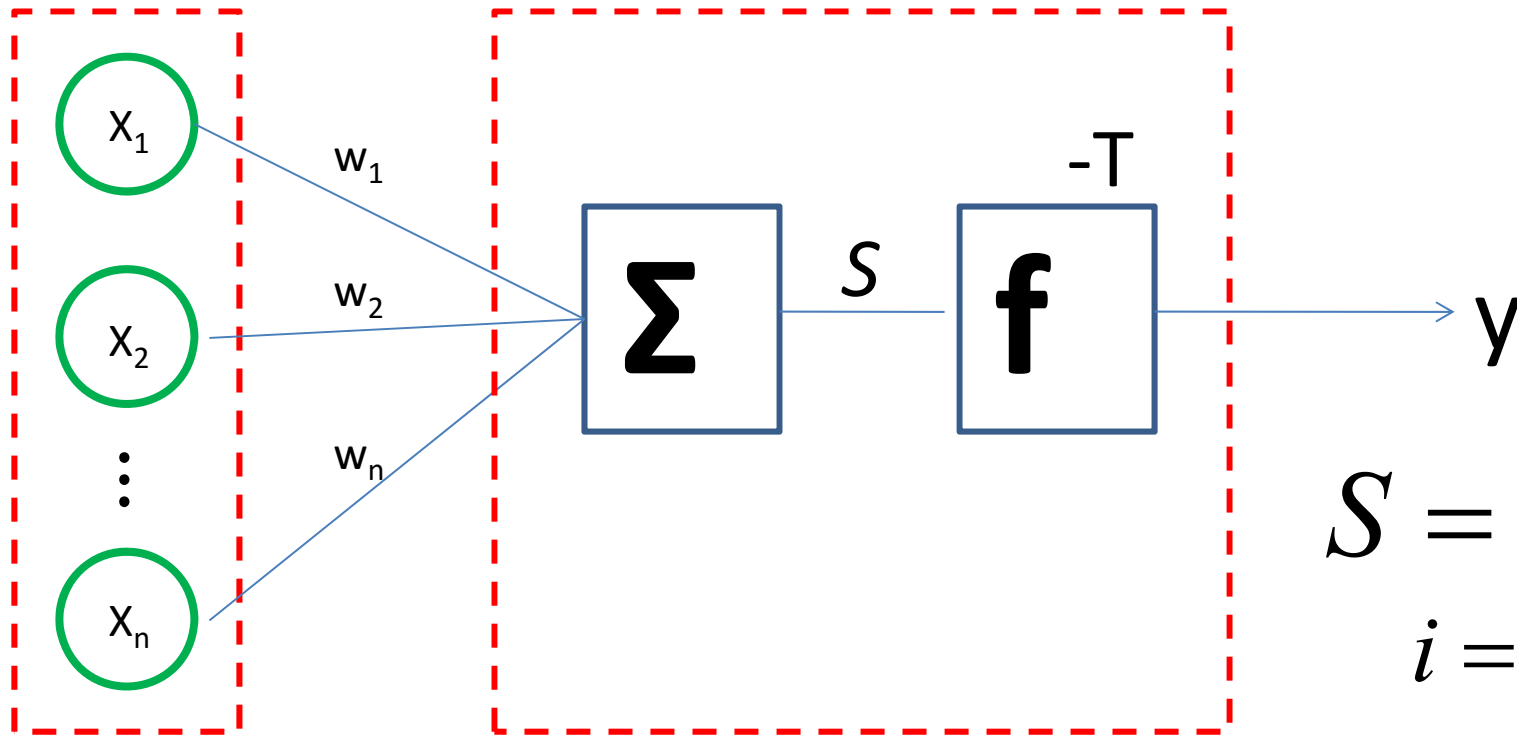


Βιολογικός Νευρώνας

Τεχνητός Νευρώνας

- ❖ Η υπολογιστική ικανότητα του εγκεφάλου & η πληροφορία που περιέχει είναι διαμοιρασμένα σε όλο του τον όγκο όπως ένα παράλληλο & κατανεμημένο υπολογιστικό σύστημα.
- ❖ Ανθρώπινος εγκέφαλος: ~100 δισεκατομμύρια νευρώνες - κάθε νευρώνας συνδέεται κατά μέσο όρο με 1000 άλλους νευρώνες → ~100 τρισεκατομμύρια συνάψεις.
- ❖ Η αντιγραφή είναι εφικτή μόνο σε περιορισμένη κλίμακα
- ❖ Ο τεχνητός νευρώνας είναι ένα υπολογιστικό μοντέλο τα μέρη του οποίου αντιστοιχούν με αυτά του βιολογικού νευρώνα.
- ❖ Ένας τεχνητός νευρώνας δέχεται σήματα εισόδου που, σε αντίθεση με τους ηλεκτρικούς παλμούς του εγκεφάλου, αντιστοιχούν σε μεταβλητές.
- ❖ Κάθε σήμα εισόδου x_i μεταβάλλεται από ένα (συναπτικό) βάρος w_i σε αντιστοιχία με τη σύναψη του βιολογικού νευρώνα.
- ❖ Η τιμή του βάρους είναι θετική ή αρνητική (ενισχυτική/ανασταλτική λειτουργία)

Μοντέλο Τεχνητού Νευρώνα (McCulloch & Pitts, 1943)



$$S = \sum_{i=1,2,\dots,n} w_i x_i$$

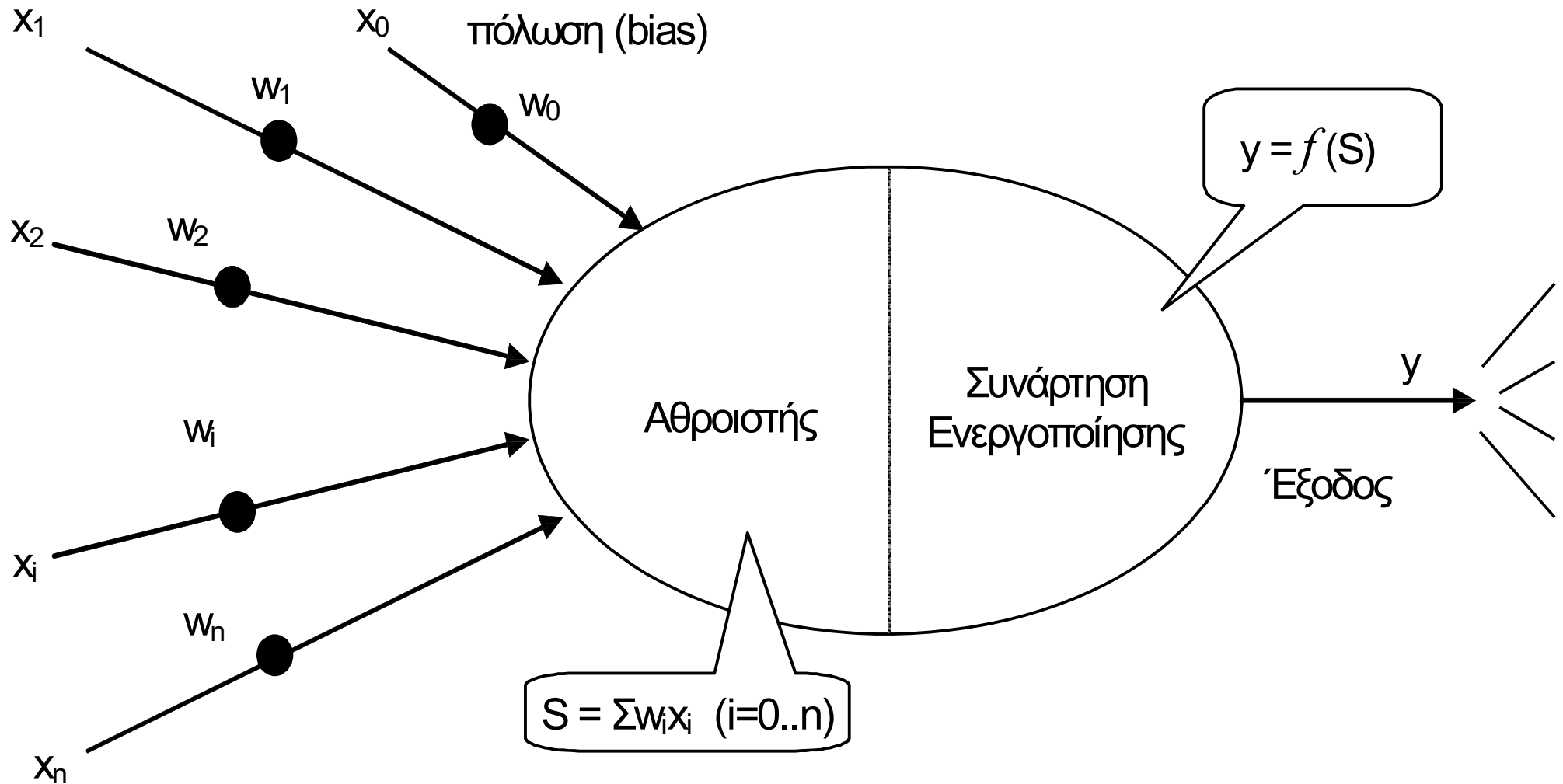
$$y = f(S - T)$$

Επίπεδο εισόδου

Νευρώνας

- x_i : οι είσοδοι του νευρώνα
- w_i : τα (συναπτικά) βάρη - θετικοί ή αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί
- f : η συνάρτηση ενεργοποίησης
- T : το κατώφλι
- y : το σήμα εξόδου (μοναδικό) - ένας νευρώνας μπορεί να έχει πολλές εξόδους αλλά όλες θα έχουν την ίδια τιμή

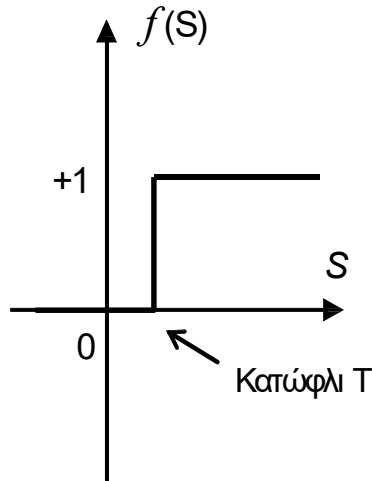
Ισοδύναμη αναπαράσταση Τεχνητού Νευρώνα



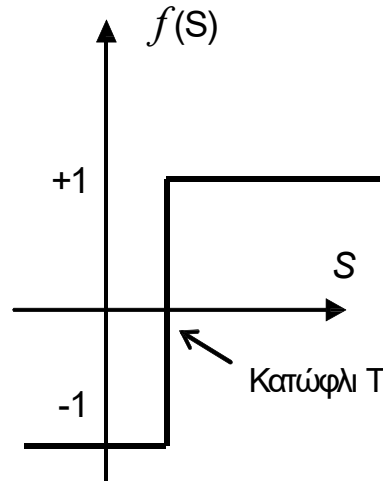
- Το κατώφλι T θεωρείται ως ένα επιπλέον συναπτικό βάρος w_0 το οποίο εφαρμόζεται σε μια επιπλέον είσοδο x_0 η οποία είναι σταθερή.
- Αυτό το επιπλέον συναπτικό βάρος ονομάζεται *πόλωση* (bias).
- *Επαυξημένα διανύσματα*: $\mathbf{w}=[w_0, w_1, w_2, \dots, w_n]$, $\mathbf{x}=[1, x_1, x_2, \dots, x_n]$

Συναρτήσεις Ενεργοποίησης

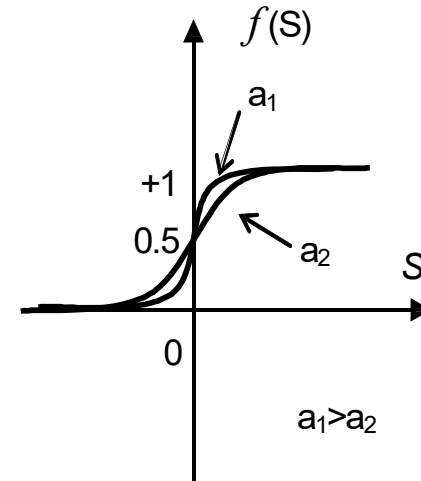
- ❖ Βασική απαίτηση: να είναι μη γραμμική ώστε να μπορεί να μοντελοποιεί μη γραμμικά φαινόμενα.



α) Βηματική Συνάρτηση



β) Συνάρτηση Προσήμου



γ) Σιγμοειδής Συνάρτηση

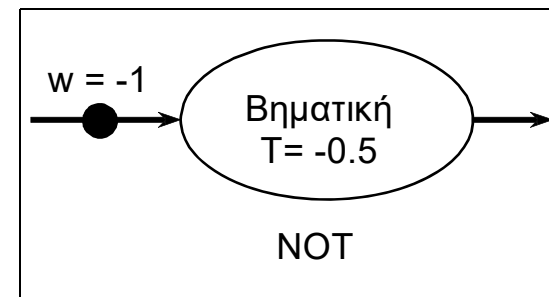
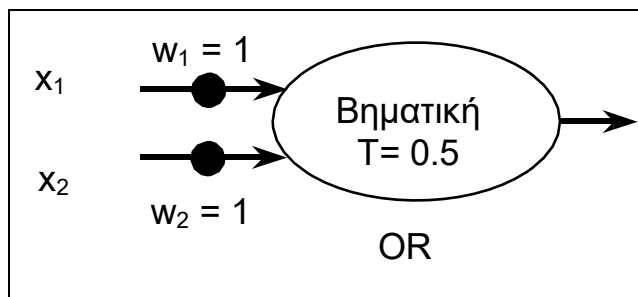
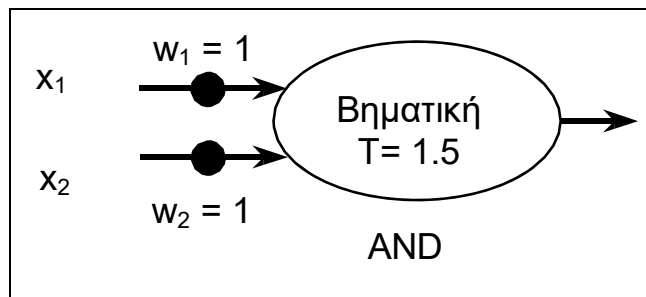
- ❖ Η σιγμοειδής συνάρτηση.

$$\Phi(s) = \frac{1}{1 + e^{-a \cdot s}}$$

- ❖ Οι σιγμοειδείς συναρτήσεις:

- ❖ είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες σε όλο το φάσμα τιμών εισόδου
- ❖ περιορίζουν την έξοδο μεταξύ 0 και 1 (ή -1 και 1)
- ❖ λειτουργούν ως φίλτρο που καταστέλλει τις μεγάλες τιμές & δίνει ικανοποιητική έξοδο για μικρές τιμές εισόδου

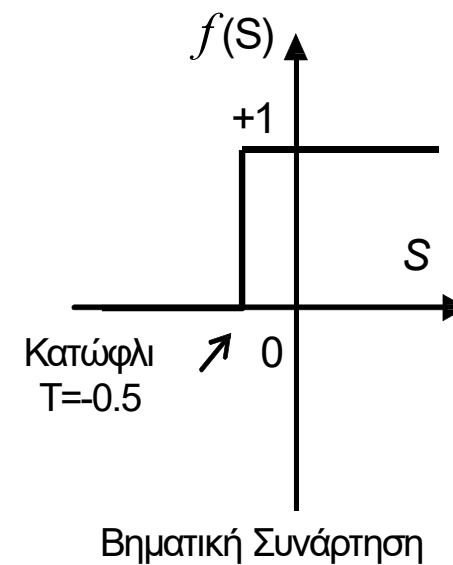
Υλοποίηση Λογικών Συναρτήσεων με Τεχνητό Νευρώνα



❖ **Παράδειγμα:** υλοποίηση του NOT:

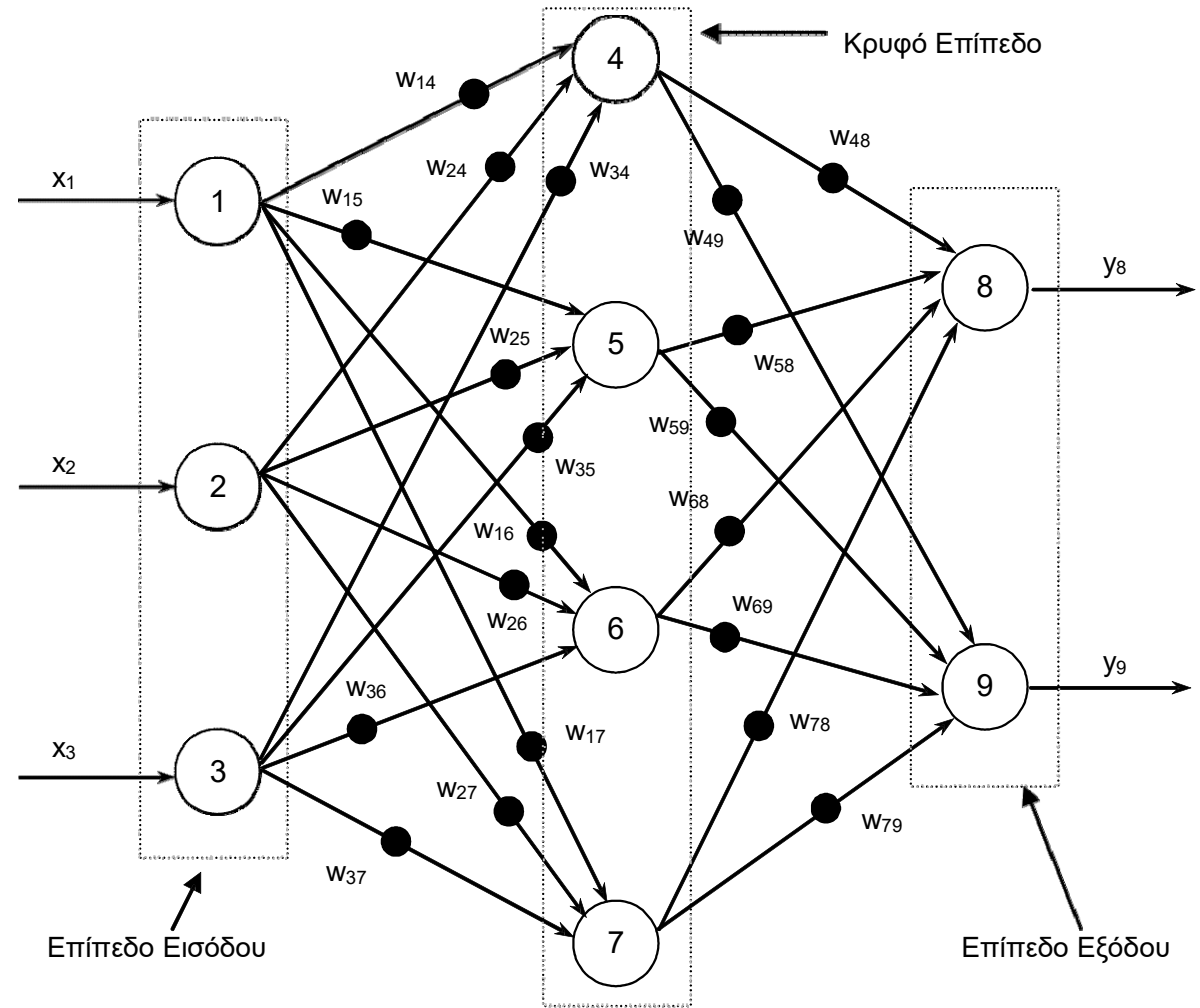
βηματική συνάρτηση ενεργοποίησης με κατώφλι

$T = -0.5$



Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ)

- ❖ Συστήματα επεξεργασίας δεδομένων που αποτελούνται από ένα πλήθος τεχνητών νευρώνων οργανωμένων σε δομές παρόμοιες με αυτές του ανθρώπινου εγκεφάλου.
- ❖ Περιλαμβάνουν το επίπεδο εισόδου, τα ενδιάμεσα (κρυφά) επίπεδα & το επίπεδο εξόδου
- ❖ Κάθε επίπεδο μπορεί να αποτελείται από πολλούς νευρώνες.
- ❖ Το 1^ο επίπεδο (εισόδου) χρησιμοποιείται για την εισαγωγή των δεδομένων – τα στοιχεία του δεν εκτελούν κάποιο υπολογισμό (δεν έχουν βάρη ούτε συνάρτηση ενεργοποίησης)
- ❖ Συντομογραφία για πολυεπίπεδα ΤΝΔ: $(p, m_1, m_2, \dots, m_q, n)$



Πλήρως συνδεδεμένο ΤΝΔ απλής τροφοδότησης 3-4-2

Χαρακτηριστικά – Ορολογία

- ❖ Οι νευρώνες των διαφόρων στρωμάτων μπορεί να είναι:
 - Πλήρως συνδεδεμένοι (*fully connected*)
 - Μερικώς συνδεδεμένοι (*partially connected*)
- ❖ Τα ΤΝΔ χαρακτηρίζονται ως:
 - Δίκτυα με πρόσθια τροφοδότηση (*feedforward*)
 - Δίκτυα με ανατροφοδότηση (*feedback* ή *recurrent*)
- ❖ Στα ΤΝΔ με ανατροφοδότηση ο υπολογισμός των (ενδιάμεσων και τελικών) εξόδων των νευρώνων γίνεται σε 2 στάδια:
 - ❖ Στο 1^ο υπολογίζονται τα μεγέθη που αφορούν συνδέσεις πρόσθιας τροφοδότησης
 - ❖ Στο 2^ο γίνονται οι υπολογισμοί για τις συνδέσεις ανατροφοδότησης
- ❖ Στην πλειοψηφία των εφαρμογών χρησιμοποιούνται δίκτυα απλής τροφοδότησης.

Μάθηση και Ανάκληση

- ❖ **Μάθηση** - *learning* (ή *εκπαίδευση* - *training*) είναι η διαδικασία της τροποποίησης της τιμής των βαρών του δικτύου, ώστε δοθέντος συγκεκριμένου διανύσματος εισόδου να παραχθεί συγκεκριμένο διάνυσμα εξόδου.
- ❖ **Ανάκληση** (*recall*) είναι η διαδικασία του υπολογισμού ενός διανύσματος εξόδου για συγκεκριμένο διάνυσμα εισόδου και τιμές βαρών.
- ❖ 3 είδη μάθησης:
 - **Μάθηση με Επίβλεψη** (*supervised learning*): δίνονται στο ΤΝΔ ζευγάρια διανυσμάτων εισόδου-εξόδου και τα βάρη αναπροσαρμόζονται για ελαχιστοποίηση του σφάλματος
 - **Ενισχυτική/Βαθμολογημένη Μάθηση** (*reinforcement/graded learning*): η έξοδος χαρακτηρίζεται ως καλή ή κακή με χρήση μιας αριθμητικής κλίμακας βάσει της οποίας τα βάρη αναπροσαρμόζονται
 - **Μάθηση χωρίς Επίβλεψη** (*unsupervised learning*): η απόκριση του ΤΝΔ βασίζεται στην ικανότητά του να αυτο-οργανώνεται με βάση τα διανύσματα εισόδου

Στην πράξη, στις περισσότερες εφαρμογές ΤΝΔ χρησιμοποιείται μάθηση υπό επίβλεψη, για την οποία υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι.

Αλγόριθμοι Μάθησης υπό Επίβλεψη

- ❖ *Κανόνας Δέλτα (Delta rule learning)*: η διαφορά μεταξύ πραγματικής και επιθυμητής εξόδου ελαχιστοποιείται μέσω μιας διαδικασίας ελαχίστων τετραγώνων.
- ❖ *Αλγόριθμος ανάστροφης μετάδοσης σφάλματος (back propagation)*: η μεταβολή των βαρών βασίζεται στον υπολογισμό της συνεισφοράς κάθε βάρους στο συνολικό σφάλμα.
- ❖ *Ανταγωνιστική μάθηση (competitive learning)*: οι τεχνητοί νευρώνες συναγωνίζονται μεταξύ τους και μόνο αυτός με τη μεγαλύτερη απόκριση σε δοθείσα είσοδο τροποποιεί το βάρος του.
- ❖ *Τυχαία μάθηση (random learning)*: οι μεταβολές στα βάρη εισάγονται τυχαία και ανάλογα με το αν η έξοδος βελτιώνεται ή όχι με βάση κάποια προκαθορισμένα από το χρήστη κριτήρια, οι μεταβολές αυτές υιοθετούνται ή απορρίπτονται.

Χαρακτηριστικά Εκπαίδευσης

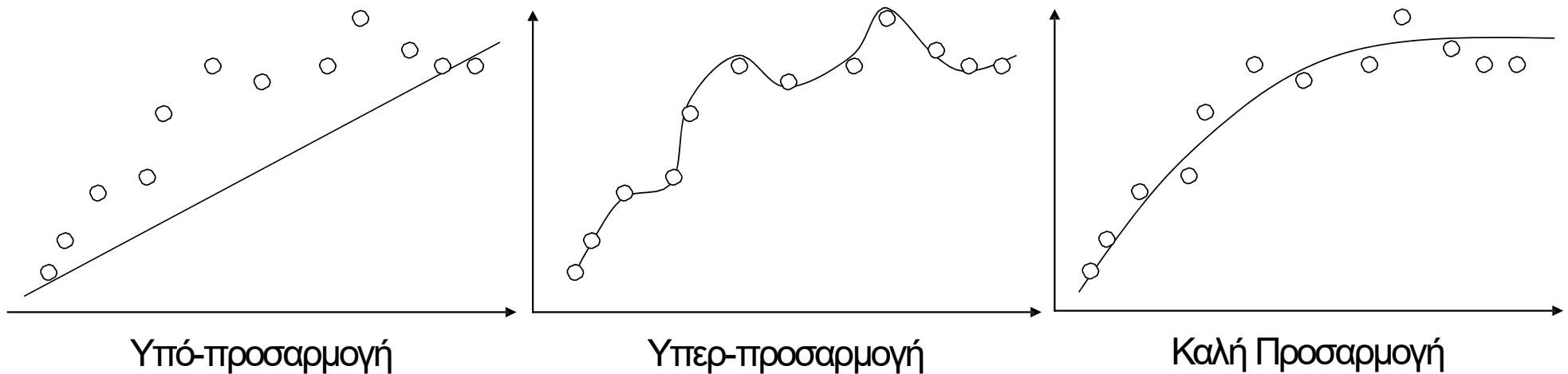
❖ *υποπροσαρμογή ή ατελής μάθησης (underfitting)*: ένα ΤΝΔ που δεν είναι αρκετά πολύπλοκο μπορεί να αποτύχει να μοντελοποιήσει επιτυχώς τα δεδομένα εκπαίδευσης.

❖ *υπερπροσαρμογή (overfitting)*: ένα πολύπλοκο ΤΝΔ ενδέχεται να προσαρμοστεί υπερβολικά στα δεδομένα εκπαίδευσης (και τον πιθανό θόρυβο που υπάρχει σε αυτά) με αποτέλεσμα να τα απομνημονεύσει.

Σε αυτή την περίπτωση, η απόδοση του ΤΝΔ σε νέα δεδομένα δεν θα είναι καλή. Φαινόμενα υπερπροσαρμογής μπορούν να εμφανιστούν σε ΤΝΔ πολλών επιπέδων, ακόμα και αν τα δεδομένα εκπαίδευσης δεν περιέχουν θόρυβο.

❖ Αν τα δεδομένα εκπαίδευσης έχουν θόρυβο θα πρέπει να είναι 30x(σύνολο βαρών)

❖ Αν τα δεδομένα δεν έχουν θόρυβο θα πρέπει να είναι 5x(σύνολο βαρών)



Δεδομένα Εκπαίδευσης

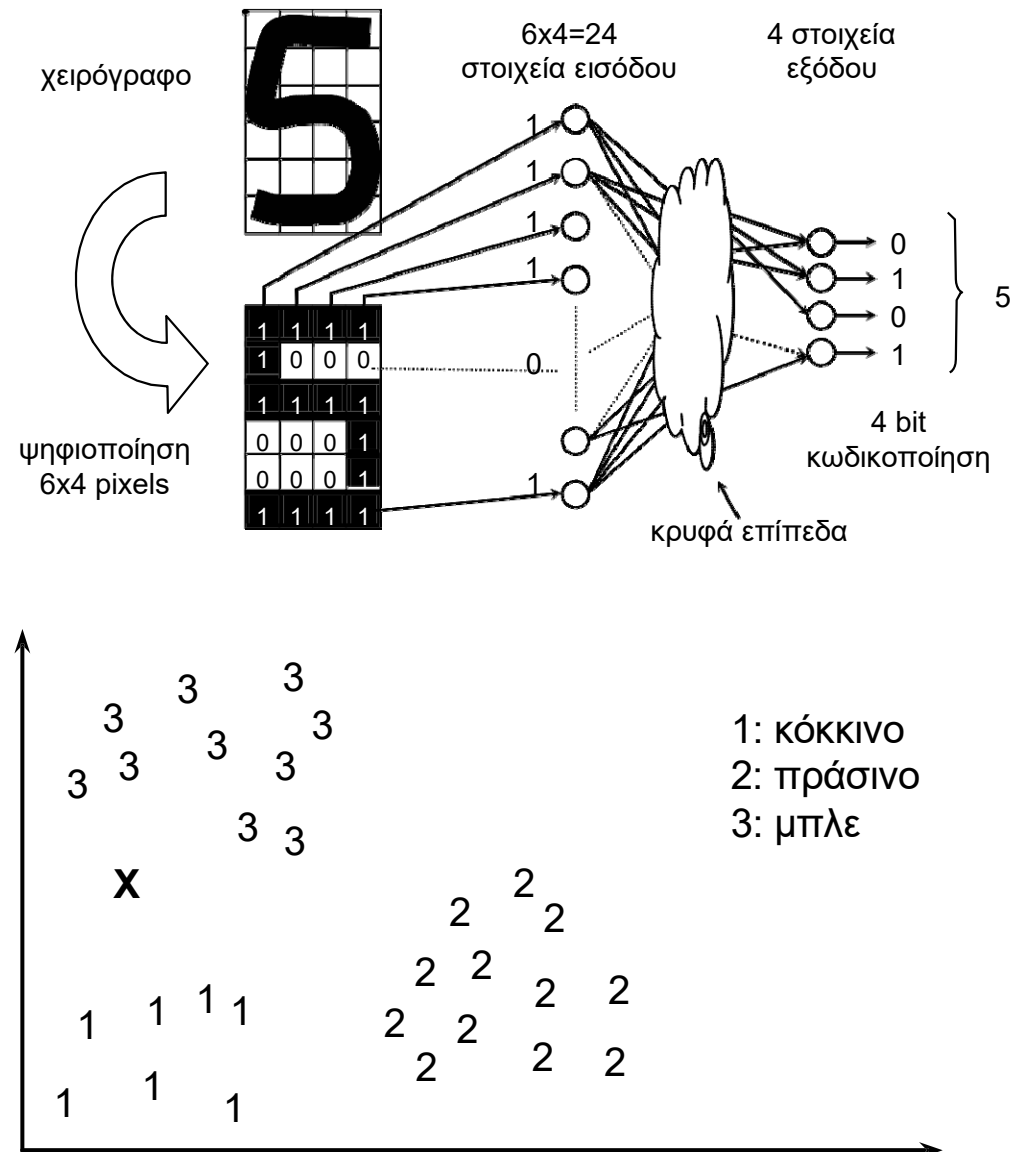
- ❖ Χρήση σε κύκλους εκπαίδευσης που ονομάζονται *εποχές* (*epochs*)
 - *μάθηση δέσμης* (*batch learning*): τα βάρη του ΤΝΔ αναπροσαρμόζονται αφού εισέλθουν όλα τα δεδομένα εκπαίδευσης
 - *επαυξητική μάθηση* (*incremental learning*): η αναπροσαρμογή των βαρών γίνεται ύστερα από κάθε εισαγωγή ενός διανύσματος από τα δεδομένα εκπαίδευσης.
 - συνδυασμός των δύο παραπάνω μεθόδων
- ❖ Η εκπαίδευση τερματίζεται όταν το κριτήριο ελέγχου της ποιότητας του δικτύου φτάσει σε κάποια επιθυμητή τιμή.
- ❖ Κριτήρια Ελέγχου Ποιότητας
 - μέσο σφάλμα του συνόλου εκπαίδευσης
 - μεταβολή του μέσου σφάλματος του συνόλου εκπαίδευσης
- ❖ Κανονικοποίηση δεδομένων εκπαίδευσης και ελέγχου (τα δεύτερα, με βάση τις παραμέτρους κανονικοποίησης των πρώτων):
 - ❖ Επηρεάζει την ταχύτητα και την ποιότητα εκπαίδευσης
 - ❖ π.χ. μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1

Βασικές Ιδιότητες των ΤΝΔ

- ❖ Ικανότητα να μαθαίνουν μέσω παραδειγμάτων (learn by example):
 - Διακρίνονται για την ικανότητα τους να οργανώνουν την πληροφορία των δεδομένων εισόδου σε χρήσιμες μορφές-μοντέλα που αναπαριστούν τη σχέση εισόδου-εξόδου.
- ❖ Η δυνατότητα θεώρησής τους ως κατανεμημένη μνήμη (distributed memory):
 - Η κωδικοποίηση που δημιουργούν είναι κατανεμημένη σε όλα τα βάρη της συνδεσμολογίας τους.
- ❖ ...και ως μνήμη συσχέτισης (associative memory):
 - Δεν αποθηκεύουν πληροφορία με τον παραδοσιακό τρόπο αλλά μέσω κατάλληλων συσχετίσεων που δημιουργούνται από τα δεδομένα εκπαίδευσης
- ❖ Η μεγάλη τους ανοχή σε σφάλματα (fault-tolerant):
 - Η κακή λειτουργία ή καταστροφή ενός νευρώνα ή κάποιον συνδέσεων δεν είναι ικανή να διαταράξει σημαντικά τη λειτουργία τους
- ❖ Η εξαιρετική ικανότητά τους για αναγνώριση προτύπων (pattern recognition):
 - Δεν επηρεάζονται από ελλιπή ή/και με θόρυβο δεδομένα.

ΤΝΔ Πρόσθιας Τροφοδότησης (*feedforward*)

- ❖ Επίπεδο εισόδου, επίπεδο εξόδου, κανένα, ένα ή περισσότερα κρυφά επίπεδα
- ❖ **Είδος μάθησης:** μάθηση με επίβλεψη.
- ❖ **Τοπολογία** του δικτύου
 - δεν υπάρχει κανόνας για τον προσδιορισμό κρυφών επιπέδων, νευρώνων ανά επίπεδο, συνδεσμολογίας
 - Η χρήση ενός μόνο νευρώνα εξόδου για αντιμετώπιση προβλημάτων κατηγοριοποίησης στα οποία οι κατηγορίες δεν έχουν κάποια σειρά πρέπει να αποφεύγεται καθώς μπορεί να προκύψουν λάθος αποτελέσματα



Κρυφά Επίπεδα

- ❖ Ο αριθμός των νευρώνων στα κρυφά επίπεδα σχετίζεται με πολύπλοκο τρόπο με:
 - τον αριθμό των νευρώνων στα επίπεδα εισόδου και εξόδου,
 - τον αριθμό των διανυσμάτων εκπαίδευσης & την ύπαρξη ή όχι θορύβου σε αυτά,
 - την πολυπλοκότητα της συνάρτησης ή της κατηγοριοποίησης που πρέπει να μάθει το ΤΝΔ
 - τις συναρτήσεις ενεργοποίησης που χρησιμοποιούνται,
 - τον αλγόριθμο εκπαίδευσης, κτλ.
- ❖ Εμπειρικός κανόνας για προβλήματα κατηγοριοποίησης:
 - αριθμός νευρώνων στα κρυφά επίπεδα $<$ αριθμό διανυσμάτων εκπαίδευσης
 - **αιτία:** για να αποφευχθεί απομνημόνευση (αποκλειστική συσχέτιση ενός νευρώνα με ένα διάνυσμα εκπαίδευσης)
- ❖ Συνήθως κάθε νευρώνας συνδέεται με όλους τους νευρώνες του επόμενου επιπέδου.
- ❖ Απαιτούνται αρκετές δοκιμές και πειραματισμοί.

Perceptron (Rosenblatt, 1958)

- ❖ Η πιο απλή τοπολογία δικτύου με πρόσθια τροφοδότηση χωρίς κρυφά επίπεδα.
- ❖ Στοιχειώδες perceptron:
 - ένας νευρώνας, συνάρτηση βηματική ή προσήμου, μάθηση με επίβλεψη, δυαδικό διάνυσμα εξόδου (1/0 ή 1/-1)
- ❖ Αλγόριθμος μεταβολής βαρών:

Μέχρις ότου ικανοποιηθεί η συνθήκη τερματισμού της εκπαίδευσης επανέλαβε:
Για κάθε ζευγάρι εισόδου x & επιθυμητής εξόδου t από το σύνολο εκπαίδευσης

 1. Υπολόγισε την έξοδο y
 2. Εάν $y=t$ τότε δε γίνεται καμία μεταβολή στα βάρη
 3. Εάν $y \neq t$ τότε μετέβαλε τα βάρη των ενεργών γραμμών εισόδου (αυτών που έχουν σήμα $\neq 0$) κατά την ποσότητα $\Delta w = d \cdot (t - y) \cdot x$ έτσι ώστε το y να πλησιάσει το t .
- ❖ d : ρυθμός μάθησης (*learning rate*): παίρνει συνήθως τιμή μεταξύ 0 και 1 και καθορίζει το ρυθμό μεταβολής των βαρών
- ❖ Μόνο βάρη που επιδρούν σε σήμα εισόδου $\neq 0$ θα υποστούν μεταβολή
- ❖ Δεδομένου του $y \neq t$ και των δυαδικών τιμών (0 ή 1) των y και t η σχέση μεταβολής των βαρών πρακτικά εκφυλίζεται σε $\Delta w = dx$ ή $\Delta w = -dx$
- ❖ Ο παραπάνω αλγόριθμος μάθησης συγκλίνει για κάθε πρόβλημα που μπορεί να αναπαρασταθεί με perceptron.

Εκπαίδευση του Perceptron

- ❖ Μάθηση με επίβλεψη (χρήση προτύπων εκπαίδευσης):
 - ❖ σε κάθε διάνυσμα εισόδου x αντιστοιχεί μια τιμή στόχος t (η σωστή έξοδος είναι γνωστή)
 - ❖ Το δίκτυο μαθαίνει προσαρμόζοντας τα βάρη w με χρήση επαναληπτικού αλγορίθμου - στόχος οι έξοδοι y να προσεγγίζουν τα t
- ❖ Επαναληπτικός κανόνας μάθησης:
 - ❖ Τα πρότυπα εκπαίδευσης παρουσιάζονται στο δίκτυο με τη σειρά
 - ❖ Όταν τελειώσουν (ολοκλήρωση μιας εποχής) επαναλαμβάνονται από την αρχή. Αν P ο συνολικός αριθμός των προτύπων εκπαίδευσης:

Επανάληψη (κ)	1	2	...	P	$P+1$	$P+2$	...	$2P$	$2P+1$	...
Πρότυπο (p)	1	2	...	P	1	2	...	P	1	...
	← Εποχή 1 →				← Εποχή 2 →				...	

- ❖ Ο κανόνας τροποποιεί το διάνυσμα των βαρών όταν υπάρχει σφάλμα ταξινόμησης, δηλαδή όταν για το πρότυπο p ο στόχος t διαφέρει από την έξοδο y του δικτύου.

Βασική ιδέα εκπαίδευσης του Perceptron

- ❖ Εκτελούμε μάθηση με επίβλεψη χρησιμοποιώντας ένα σύνολο από πρότυπα εκπαίδευσης (σετ εκπαίδευσης)
- ❖ Για κάθε πρότυπο ελέγχουμε αν η έξοδος που δίνει ο νευρώνας είναι η σωστή:
 - ❖ Αν ναι, προχωράμε στο επόμενο πρότυπο.
 - ❖ Αν όχι, τότε:
 - ❖ Αν η σωστή έξοδος ήταν μεγαλύτερη από αυτή που υπολόγισε ο νευρώνας, τότε αυξάνουμε τα βάρη των εισόδων που ήταν θετικές και μειώνουμε τα βάρη των εισόδων που ήταν αρνητικές.
 - ❖ Αν η σωστή έξοδος ήταν μικρότερη από αυτή που υπολόγισε ο νευρώνας, τότε μειώνουμε τα βάρη των εισόδων που ήταν θετικές και αυξάνουμε τα βάρη των εισόδων που ήταν αρνητικές.
- ❖ Εκτελούμε αυτή τη διαδικασία μέχρι ο νευρώνας να κατατάσει σωστά όλα τα πρότυπα ή να μην βελτιώνει καθόλου την απόδοσή του.

Αλγόριθμος εκπαίδευσης του Perceptron

- ❖ Έστω ότι στην επανάληψη k παρουσιάζεται το πρότυπο (διάνυσμα) $\mathbf{x}^{(p)}$
- ❖ Το δίκτυο υπολογίζει μια έξοδο $y = f(\mathbf{w}(k-1) * \mathbf{x}^{(p)})$, όπου:
 $\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2, \dots, w_n]$, και $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ τα επαυξημένα διανύσματα
- ❖ Αν $y \neq d^{(p)}$ τότε $\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k-1) + d(t^{(p)} - y)\mathbf{x}^{(p)}$ (Κανόνας Δέλτα)
- ❖ d : ρυθμός μάθησης (learning rate), παίρνει συνήθως τιμή μεταξύ 0 και 1 και καθορίζει το ρυθμό μεταβολής των βαρών

Αλγόριθμος μεταβολής βαρών:

Αρχικοποίησε τα $\mathbf{w}$ (με τυχαίες τιμές) και το d

Για κάθε εποχή

Για κάθε ζευγάρι εισόδου $\mathbf{x}$ & επιθυμητής εξόδου t

1. Υπολόγισε την έξοδο y
2. Εάν $y = t$ τότε δε γίνεται καμία μεταβολή στα βάρη
3. Εάν $y \neq t$ τότε μετέβαλε τα βάρη κατά την ποσότητα $\Delta \mathbf{w} = \alpha(t - y) * \mathbf{x}$

Μέχρι να συμπληρωθεί ο μέγιστος αριθμός εποχών ή αν δεν έγινε καμία αλλαγή βαρών στην τελευταία εποχή

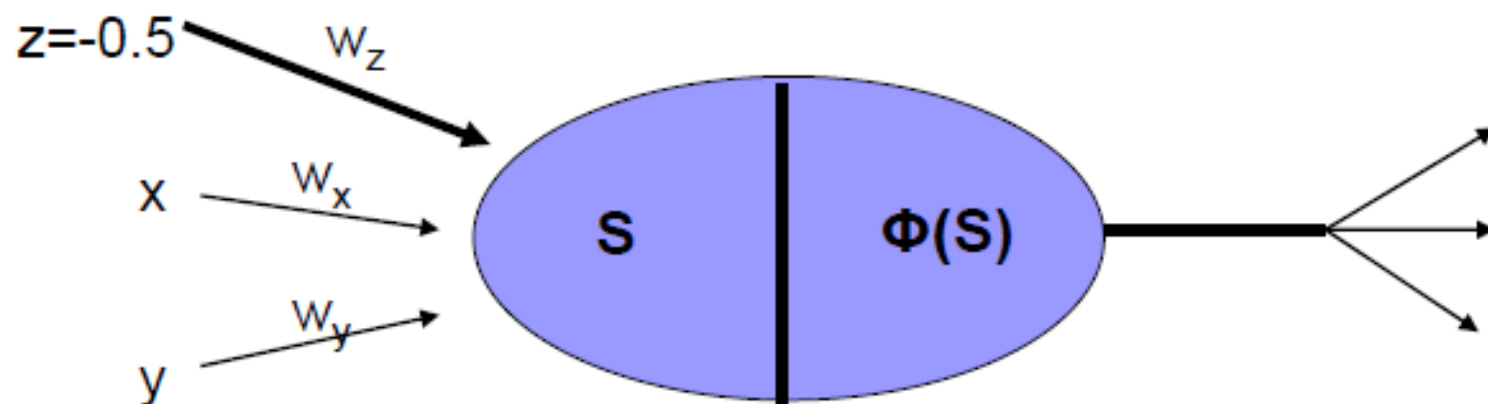
Παράδειγμα μάθησης (1/4)

- Έστω η εκπαίδευση ενός νευρώνα ώστε να λειτουργεί ως πύλη AND.
- Τα δεδομένα εκπαίδευσης είναι τα εξής:

x	y	Επιθυμητή έξοδος
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Έχουμε τρεις εισόδους, τις x , y και την σταθερή πόλωση (ίση με -0.5), έστω z .
- Αρχικοποιούμε λοιπόν τα τρία βάρη ως εξής: $w_x=w_y=w_z=0$

Παράδειγμα μάθησης (2/4)



- Παρουσιάζουμε τα τέσσερα παραδείγματα διαδοχικά και κυκλικά στο δίκτυο, μέχρι αυτό να αρχίσει να απαντά σωστά σε όλα.
- Μετά από κάθε παρουσίαση, ενημερώνουμε τα τρία βάρη.
- Ο ρυθμός μάθησης τέθηκε στην τιμή $\alpha=0.1$.

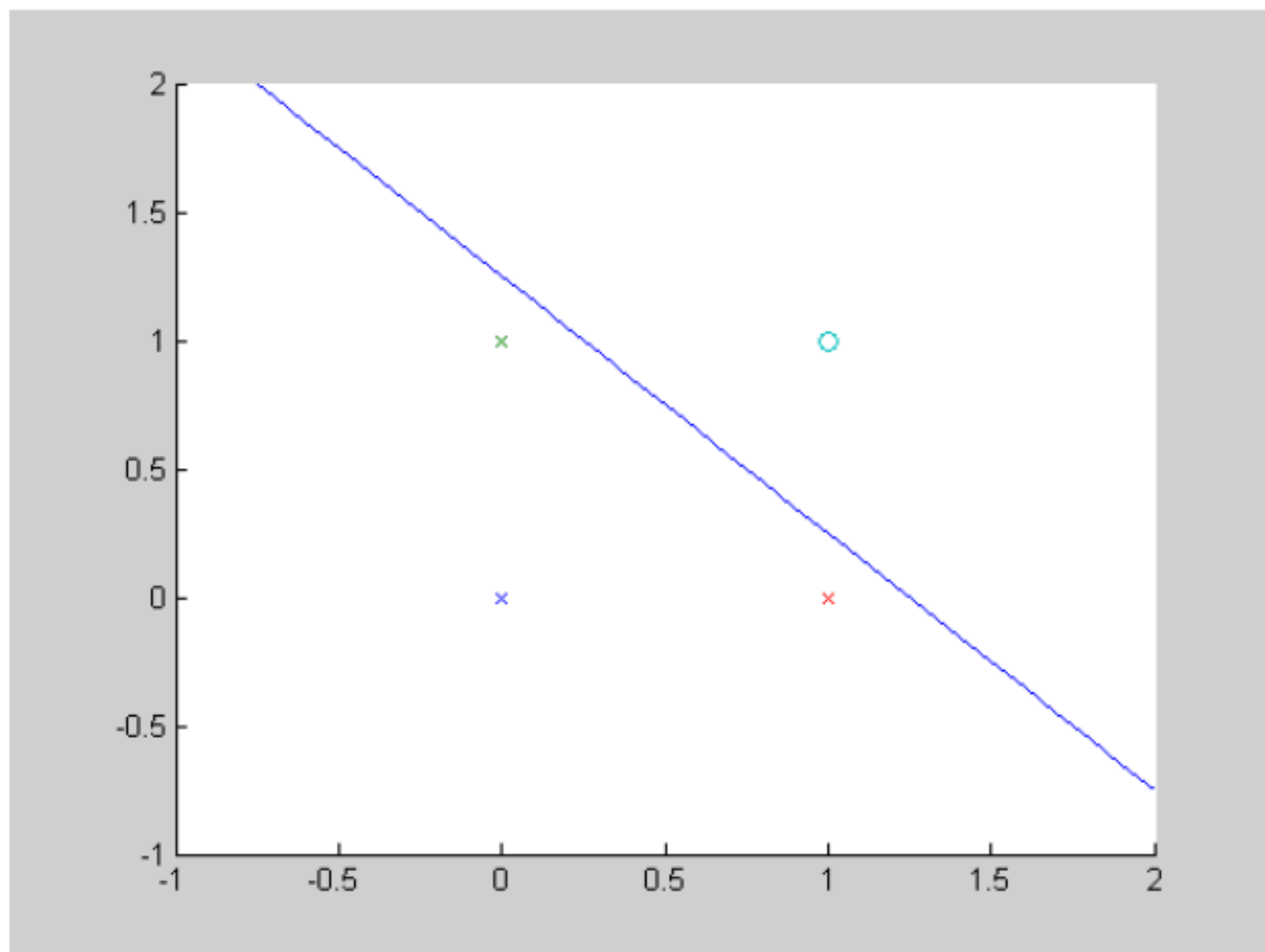
Παράδειγμα μάθησης (3/4)

- Παρακάτω φαίνονται τα πρώτα βήματα του αλγορίθμου:

#	Παράδειγμα	Έξοδος	Επιθυμητή έξοδος	w_x	w_y	w_z
1	[0,0,-0.5]	0	0	0	0	0
2	[0,1,-0.5]	0	0	0	0	0
3	[1,0,-0.5]	0	0	0	0	0
4	[1,1,-0.5]	0	1	0.1	0.1	-0.05
5	[0,0,-0.5]	1	0	0.1	0.1	0
6	[0,1,-0.5]	1	0	0.1	0	0.05
7	[1,0,-0.5]	1	0	0	0	0.1
8	[1,1,-0.5]	0	1	0.1	0.1	0.05

- Μετά από 28 επαναλήψεις τα βάρη πήραν τις τιμές:
 - $w_x=0.1$, $w_y=0.1$, $w_z=0.25$

Παράδειγμα μάθησης (4/4)



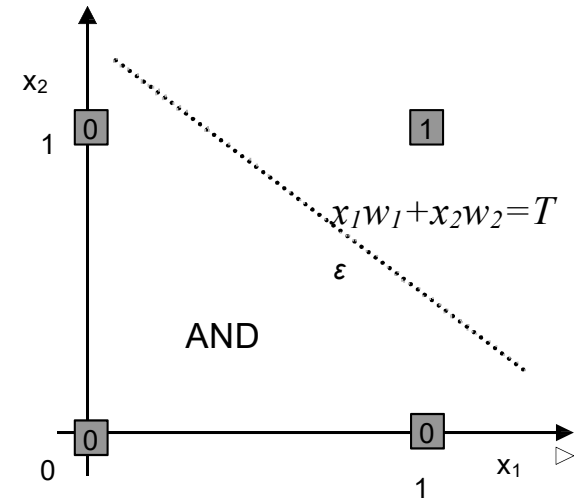
Γραμμική Διαχωρισιμότητα (1/2)

❖ Ένα perceptron με n γραμμές εισόδου (συγκεκριμένα η εξίσωση $S = \sum_{i=1}^n w_i x_i - T$) μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά ένα υπερεπίπεδο $n-1$ διαστάσεων που διαχωρίζει τα διανύσματα εισόδου σε 2 ομάδες, ανάλογα με την έξοδο (1/0 ή 1/-1).

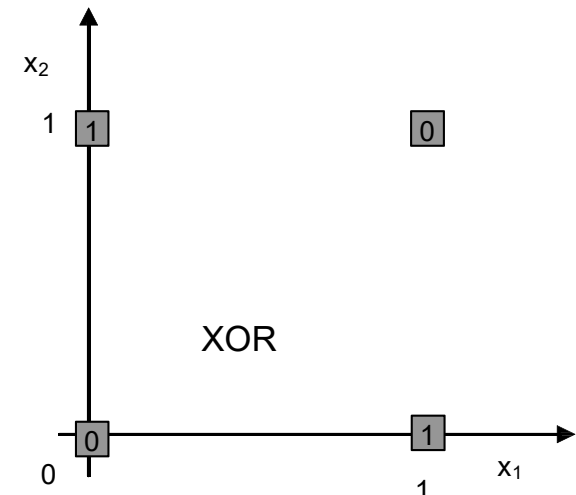
❖ Προβλήμα των οποίων οι τιμές εισόδου-εξόδου υπόκεινται σε αυτόν τον κανόνα ονομάζονται **γραμμικώς διαχωρίσιμα** προβλήματα (*linearly separable*).

❖ Παραδείγματα αποτελούν οι συναρτήσεις AND, OR, NOT.

❖ Η πιθανότητα όμως να είναι μια συνάρτηση γραμμικώς διαχωρίσιμη είναι πολύ μικρή



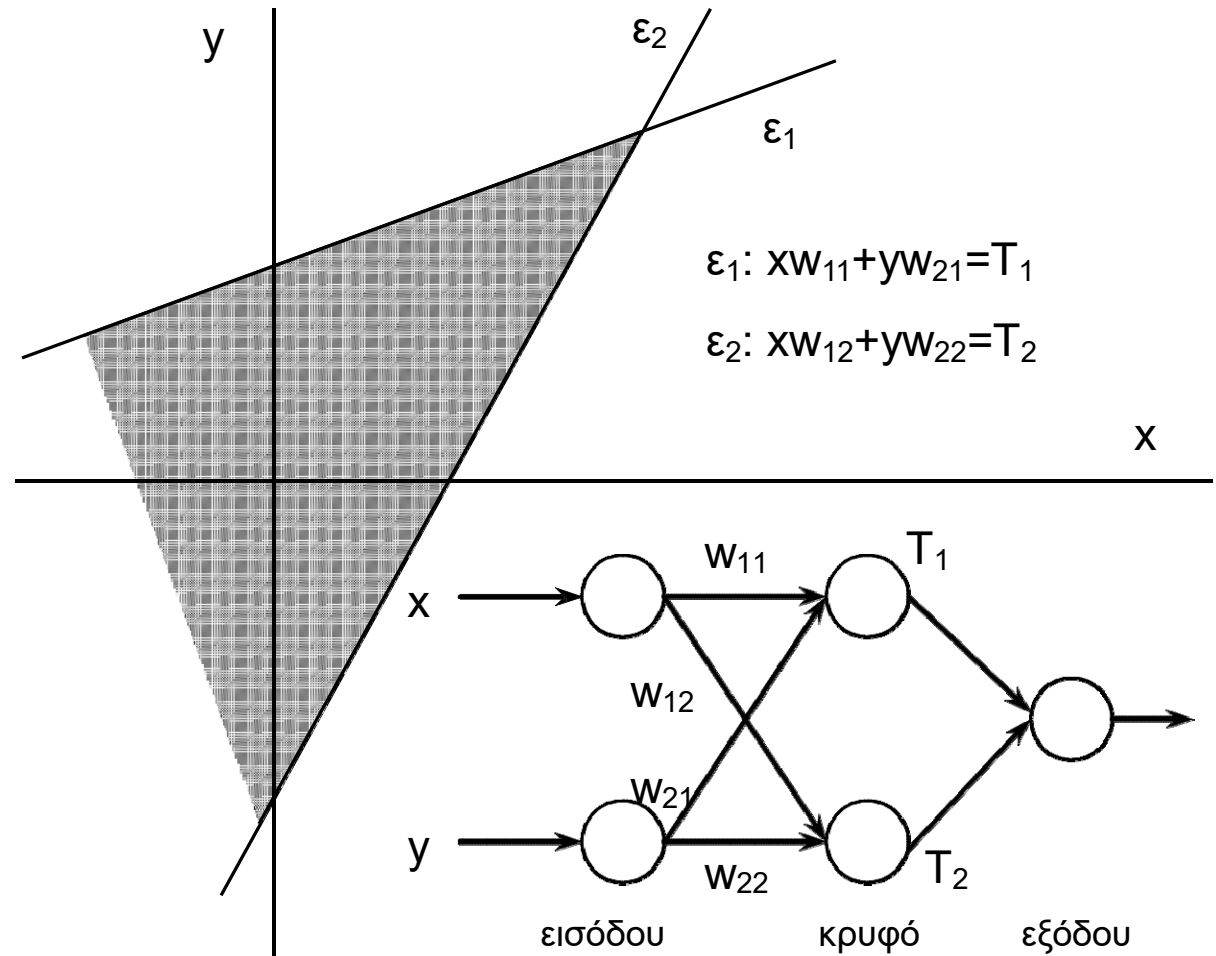
Συνάρτηση AND (γραμμικώς διαχωρίσιμη)



Συνάρτηση XOR (μη γραμμικώς διαχωρίσιμη)

Γραμμική Διαχωρισιμότητα (2/2)

- ❖ Τα μη γραμμικώς διαχωρίσιμα προβλήματα, όπως π.χ. η συνάρτηση XOR, απαιτούν τη χρήση ΤΝΔ με ενδιάμεσα κρυφά επίπεδα
- ❖ Τα ΤΝΔ με κρυφά επίπεδα (και νευρώνες) έχουν καλύτερη διαχωρισιμότητα:
 - Ο χώρος των τιμών εισόδου οριοθετείται με πιο πολύπλοκο τρόπο εξαιτίας της πολυπλοκότητας των συνδέσεων.

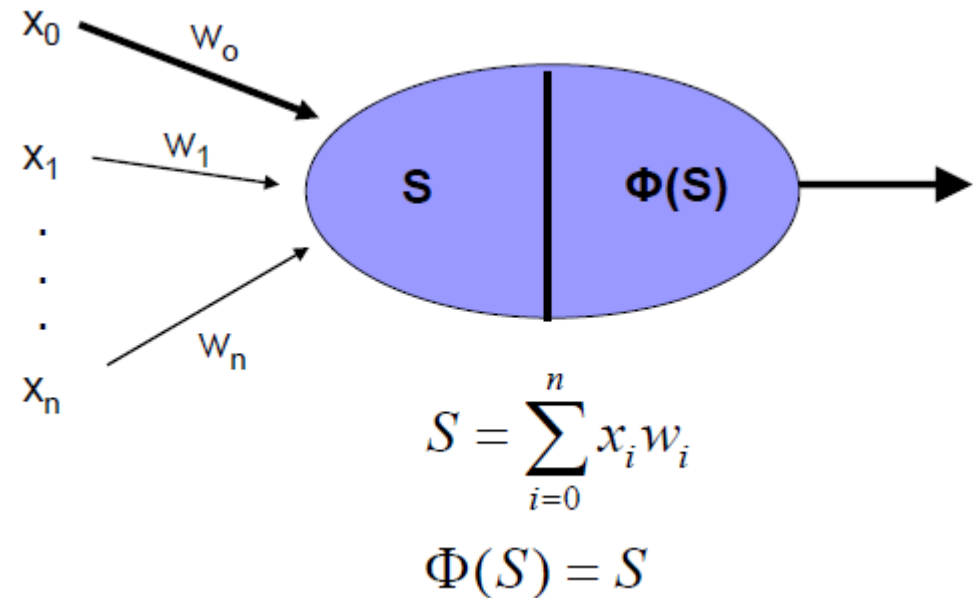


Adaptive LInear Element (Adaline)

- ❖ Το προσαρμόσιμο γραμμικό στοιχείο είναι ένας απλοποιημένος νευρώνας χωρίς συνάρτηση ενεργοποίησης.
- ❖ Η μόνη διαφορά από το perceptron είναι ότι αντί για βηματική συνάρτηση έχει γραμμική.
- ❖ Η έξοδος παίρνει συνεχείς τιμές (από $-\infty$ έως $+\infty$) $y = \sum_{i=0}^n w_i x_i = \mathbf{w}\mathbf{x}^T$
- ❖ Οι τιμές στόχοι t μπορεί να είναι πραγματικοί αριθμοί (όχι απαραίτητα)

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί:

- ❖ Για να προσεγγίσει (γραμμικά) μια συνάρτηση
- ❖ Για ταξινόμηση (απαιτεί γραμμική διαχωρισιμότητα):
 - π.χ. για 2 κλάσεις:
 $y \geq q$ (1^η κλάση),
 $y < q$ (2^η κλάση)



Εκπαίδευση Adaline

❖ Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των διανυσμάτων εκπαίδευσης.

❖ Δηλαδή η επίλυση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων:

$$y^{(1)} = \mathbf{w}\mathbf{x}^{(1)} = t^{(1)}$$

$$y^{(2)} = \mathbf{w}\mathbf{x}^{(2)} = t^{(2)}$$

⋮

$$y^{(P)} = \mathbf{w}\mathbf{x}^{(P)} = t^{(P)}$$

❖ Αν ορίσουμε $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(P)}]$ και $\mathbf{t} = [t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(P)}]$ το σύστημα γράφεται σε μορφή πινάκων:

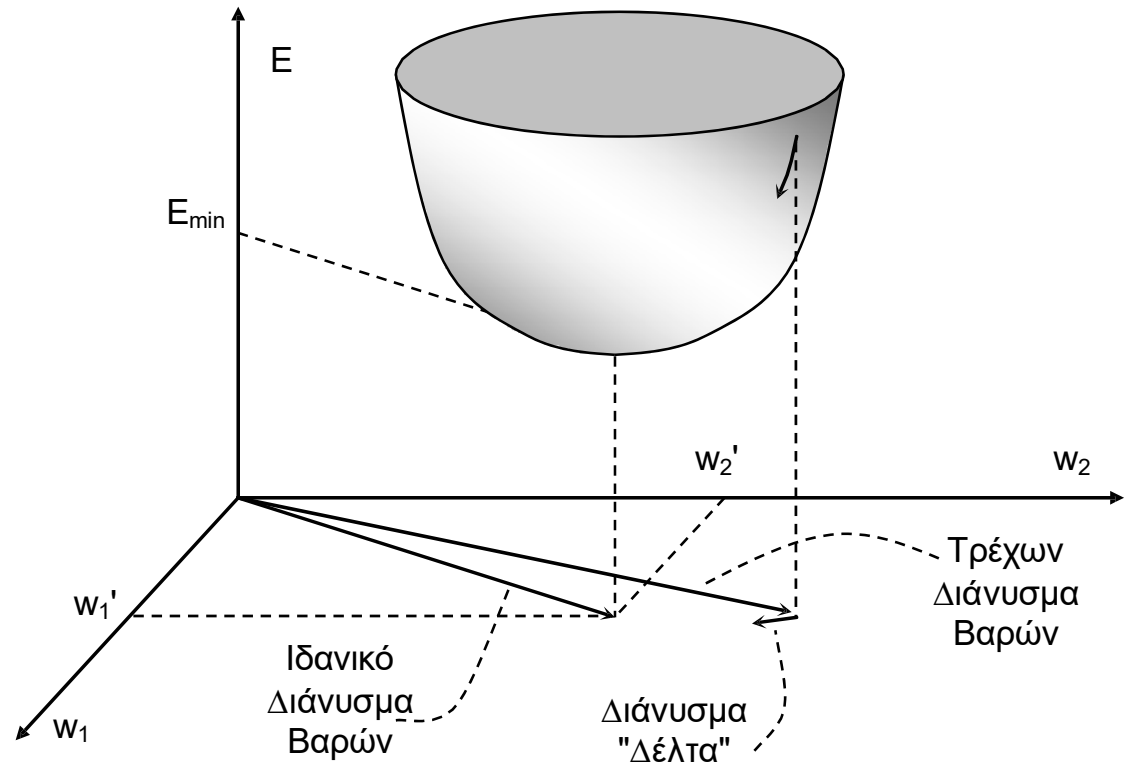
$$\mathbf{X}\mathbf{w} = \mathbf{t} \quad (P \text{ εξισώσεις με } n+1 \text{ αγνώστους – τα βάρη } w_0, w_1, \dots, w_n)$$

❖ Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη μέση τιμή του αθροίσματος των τετραγωνικών σφαλμάτων για τα P πρότυπα:

$$J = E\left\{\sum_{i=1}^P (t^{(i)} - y^{(i)})^2\right\} = \sum_{i=1}^P E\{(t^{(i)} - \mathbf{w}\mathbf{x}^{(i)})^2\}$$

Κανόνας Δέλτα για Adaline

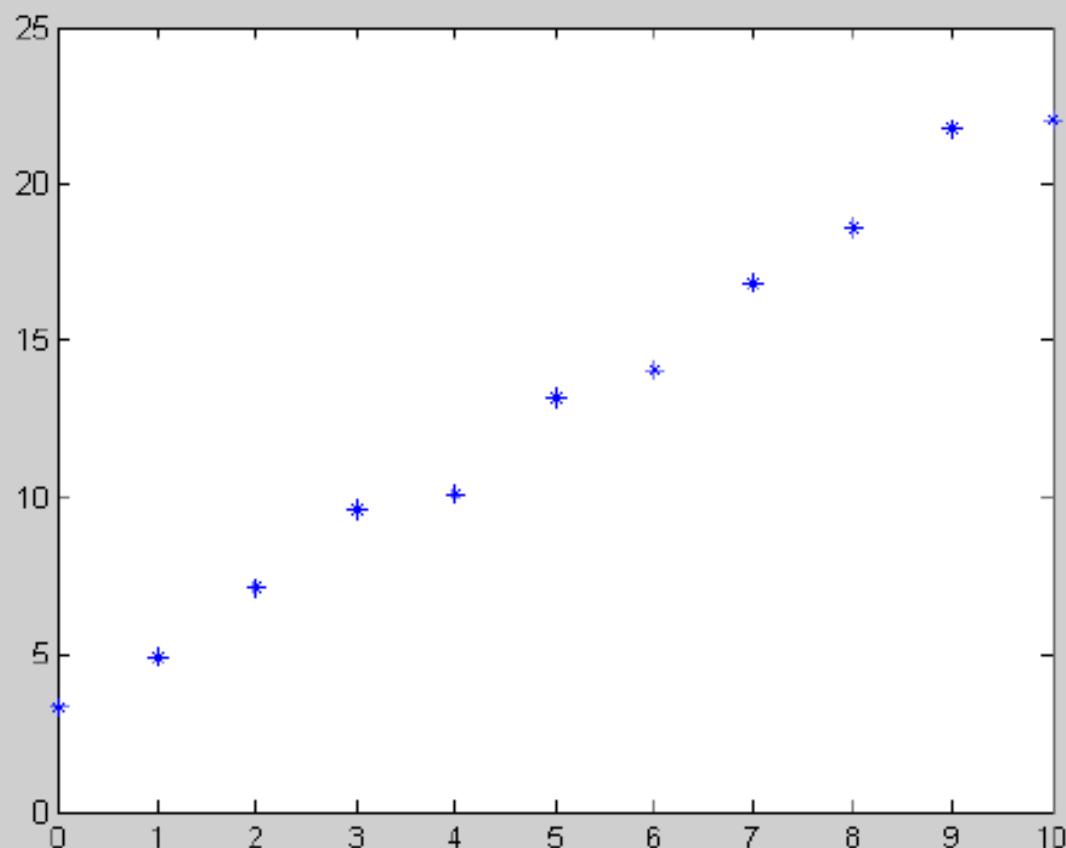
- ❖ Εφόσον έχουμε συνεχείς συναρτήσεις μπορούμε να υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο του J για κάθε βάρος.
- ❖ Εφαρμόζουμε τον κανόνα της επικλινούς καθόδου (*gradient descent rule*) για να ελαχιστοποιήσουμε το J .
- ❖ Η διαδικασία τερματίζεται όταν η τιμή του J πέσει κάτω από μια μικρή τιμή.
- ❖ Ο κανόνας Δέλτα δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε δίκτυα με κρυφά επίπεδα



Γεωμετρική αναπαράσταση κανόνα Δέλτα για στοιχειώδες adaline με 2 εισόδους

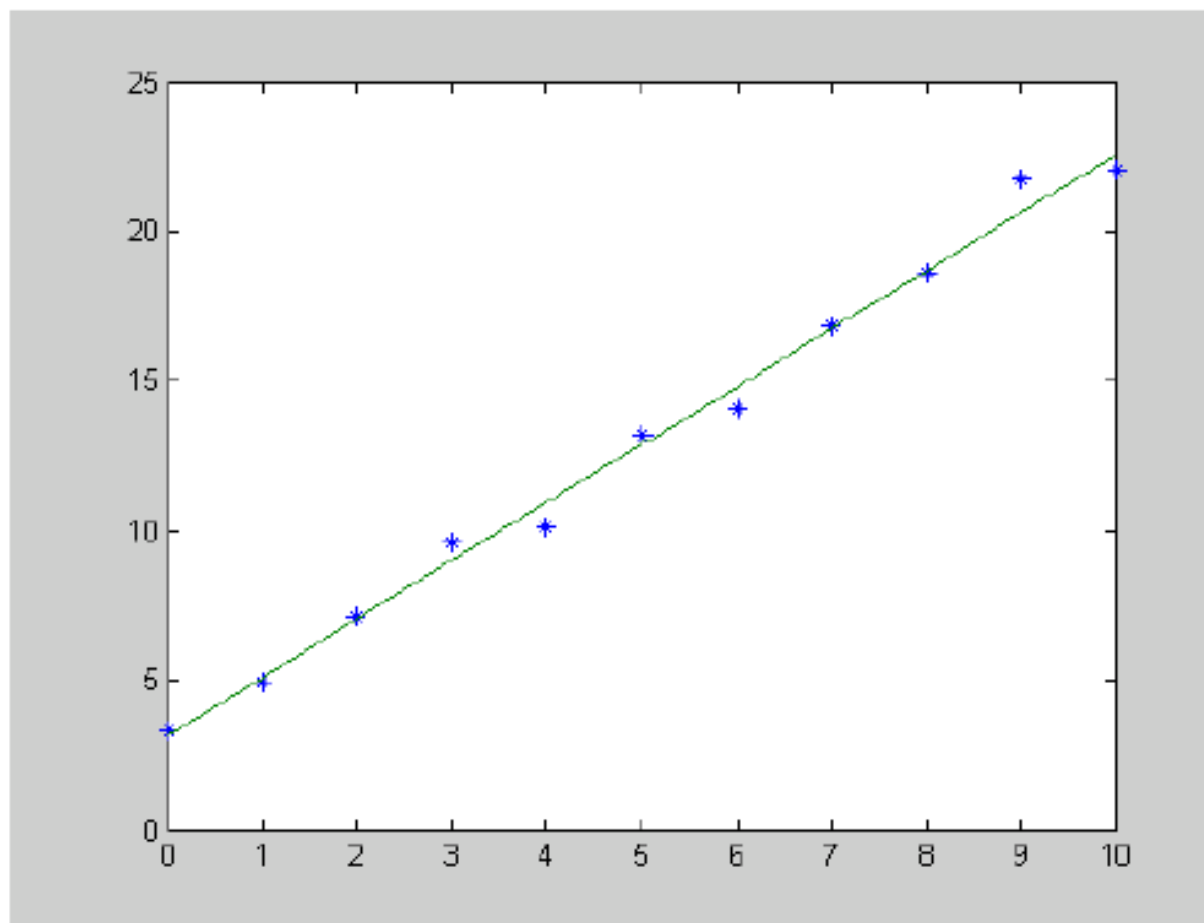
Παράδειγμα (1/2)

- Στο διπλανό σχήμα έχουμε 11 σημεία τα οποία βρίσκονται γύρω από την ευθεία $y=2x+3$.



Παράδειγμα (2/2)

- Χρησιμοποιήθηκε ένας γραμμικός νευρώνας με 1 είσοδο (και προφανώς 1 έξοδο) και εκπαιδεύτηκε βάσει των προηγούμενων παραδειγμάτων.
- Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα αρχικά παραδείγματα (αστερίσκοι) και η έξοδος του δικτύου για διάφορες τιμές του x .



Κανόνας Δέλτα (1/2)

- ❖ γενίκευση του αλγορίθμου εκπαίδευσης του perceptron
 - ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των διανυσμάτων εκπαίδευσης
 - δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε δίκτυα με κρυφά επίπεδα
- ❖ Μέσο τετραγωνικό σφάλμα E στο στοιχειώδες perceptron, για p διανύσματα εκπαίδευσης:

$$E = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p (t_k - y_k)^2$$

y_k : σήμα εξόδου του νευρώνα

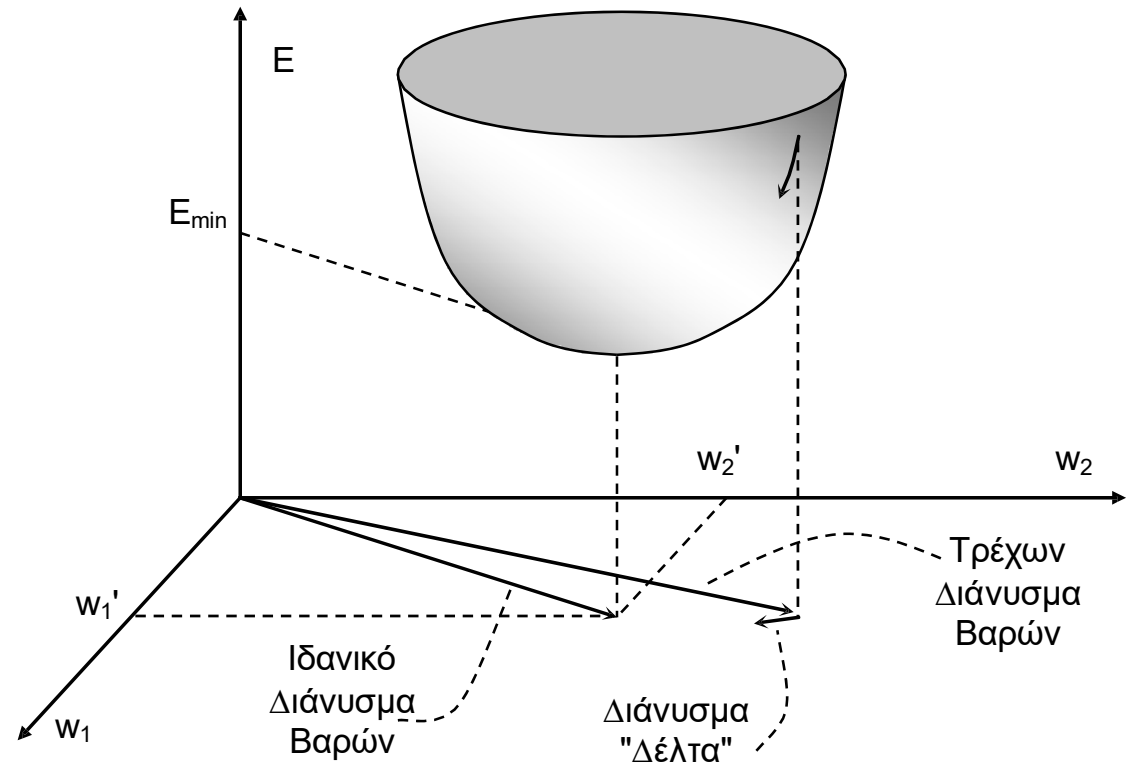
- Συνολικό σήμα εισόδου για κάποιο διάνυσμα εκπαίδευσης p :

$$y = f\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i\right)$$

t_k : επιθυμητή έξοδος

Κανόνας Δέλτα (2/2)

- ❖ Γεωμετρική αναπαράσταση κανόνα Δέλτα για στοιχειώδες perceptron με 2 εισόδους
- ❖ κανόνας της επικλινούς καθόδου (*gradient descent rule*)
- ❖ δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε δίκτυα με κρυφά επίπεδα
- ❖ **Αποτέλεσμα:** Η έρευνα στα ΤΝΔ περιορίστηκε σημαντικά για πολλά χρόνια.
- ❖ Η λύση δόθηκε με τη μέθοδο της ανάστροφης μετάδοσης του σφάλματος

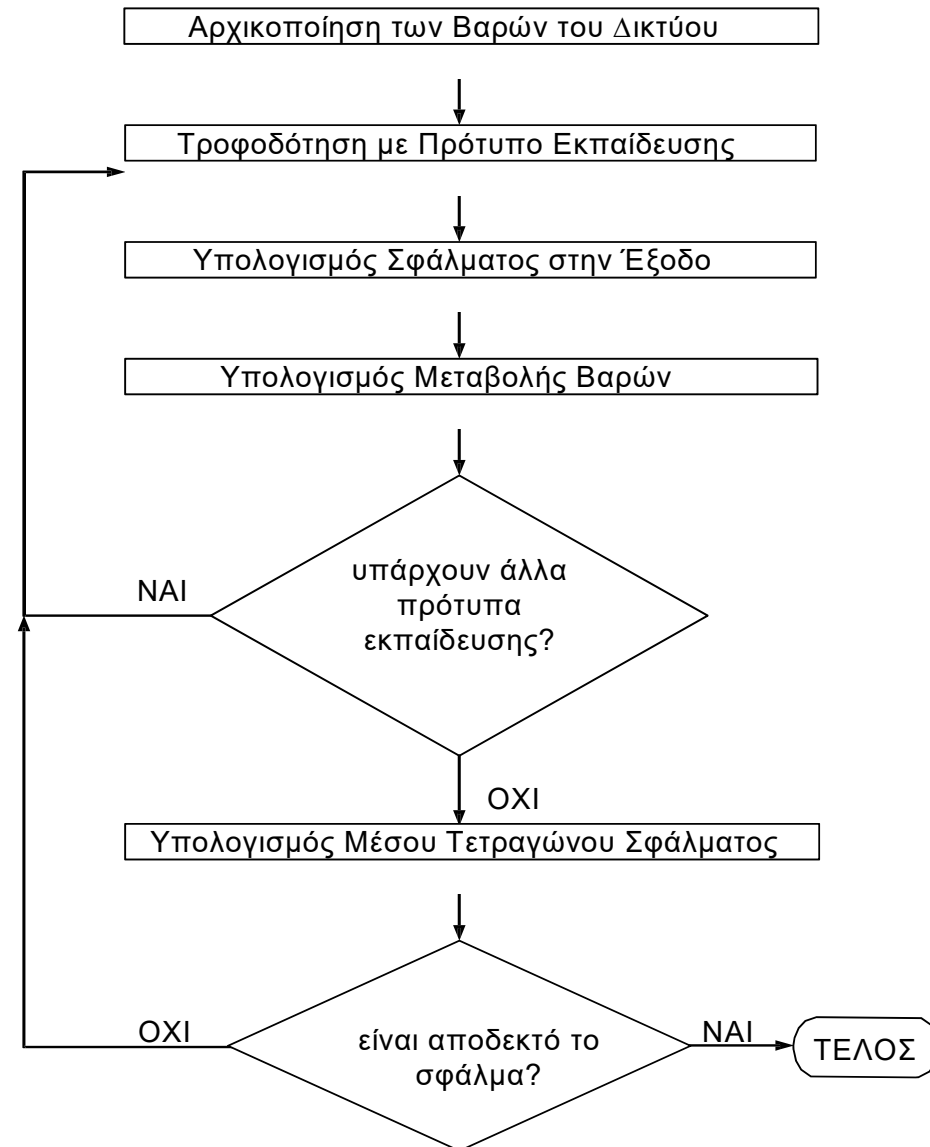


Ανάστροφη Μετάδοση Σφάλματος - *Back Propagation* (1/3)

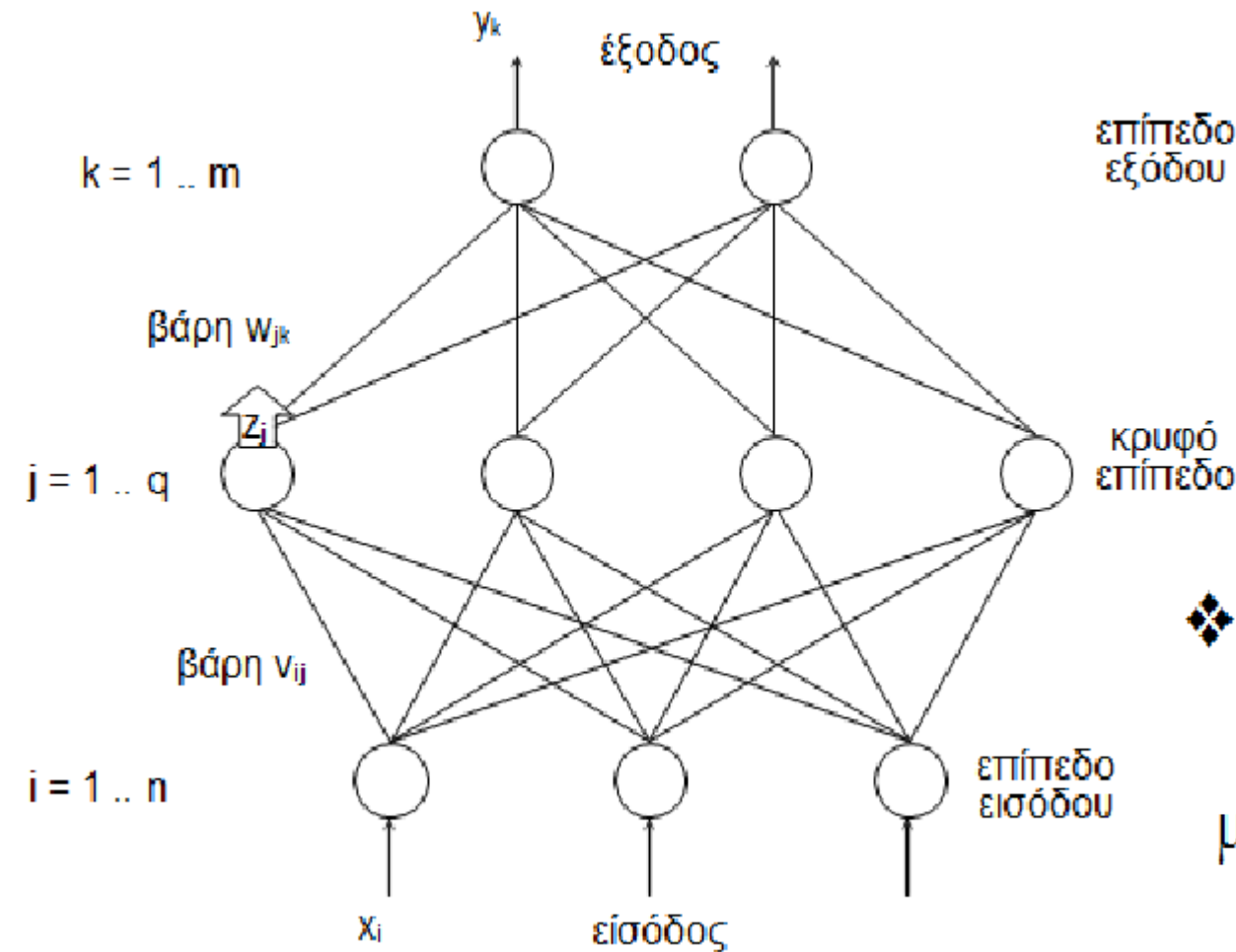
- ❖ Βασίζεται στο γενικευμένο κανόνα Δέλτα - ΓΚΔ (*generalized Delta rule*)
- ❖ Βασική Ιδέα: να καθοριστεί το ποσοστό του συνολικού σφάλματος που αντιστοιχεί σε κάθε νευρώνα, ακόμη και αυτών που ανήκουν σε κρυφά επίπεδα.
- ❖ Η διαδικασία εκπαίδευσης αρχικά περιλαμβάνει ένα πρόσθιο πέρασμα όπου εισάγεται ένα διάνυσμα εκπαίδευσης στην είσοδο & παράγεται μια έξοδος.
- ❖ Στο πρώτο πρόσθιο πέρασμα ανατίθενται τυχαία βάρη στους νευρώνες.
- ❖ Ακολουθεί το *ανάστροφο πέρασμα* όπου βάσει του σφάλματος (διαφορά επιθυμητής και παραγόμενης εξόδου) αναπροσαρμόζονται οι τιμές βαρών μεταξύ επιπέδου εξόδου & του αμέσως προηγούμενου επιπέδου

Ανάστροφη Μετάδοση Σφάλματος - *Back Propagation* (2/3)

- ❖ Για κάθε νευρώνα εξόδου υπολογίζεται το σφάλμα & γίνεται η σχετική αλλαγή στα βάρη εισόδου του.
- ❖ Τα βάρη εισόδων κάθε εσωτερικού νευρώνα (ξεκινώντας από το επίπεδο εξόδου προς το επίπεδο εισόδου) αλλάζουν με βάση τη συμμετοχή του στα σφάλματα των νευρώνων του επόμενου επιπέδου του:
 - ❖ Η συμμετοχή αυτή είναι ανάλογη της τρέχουσας εισόδου του νευρώνα & των βαρών που τον συνδέουν με τους νευρώνες του επόμενου επιπέδου



Ανάστροφη Μετάδοση Σφάλματος - *Back Propagation* (3/3)



❖ Αποδεικνύεται ότι ισχύει (ΓΚΔ):

για επίπεδο εξόδου: $\Delta w_{jk} = \alpha \cdot \delta_k \cdot z_j$

με $\delta_k = (d_k - y_k) f'(input_k)$

για κρυφό επίπεδο: $\Delta w_{ij} = \alpha \cdot \delta_j \cdot x_i$

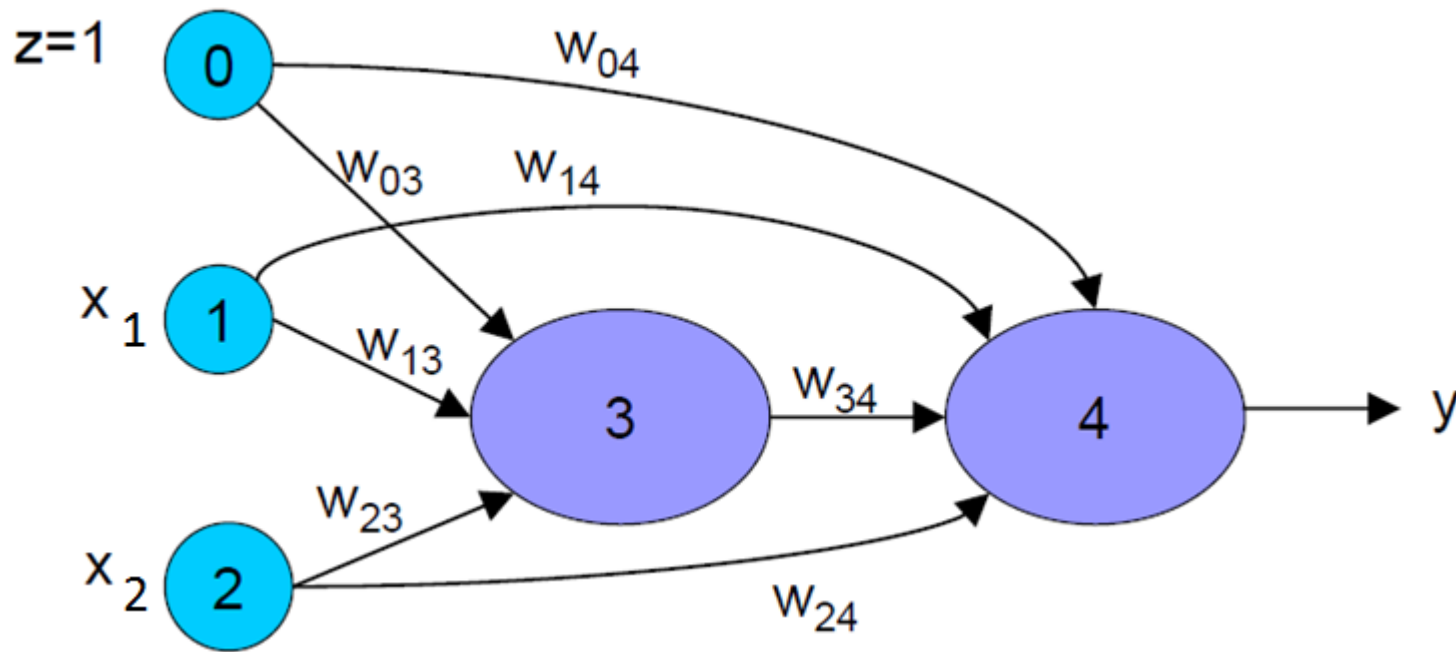
με $\delta_j = f'(input_j) \sum_{k=1}^m \delta_k w_{jk}$

$$input_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} x_i \quad z_j = f(input_j) = f\left(\sum_{i=1}^n v_{ij} x_i\right)$$

$$input_k = \sum_{j=1}^q w_{jk} z_j \quad y_k = f(input_k) = f\left(\sum_{j=1}^q w_{jk} z_j\right)$$

Παράδειγμα Ανάστροφης Μετάδοσης Σφάλματος: Λογική πύλη XOR (1/4)

- Θέλουμε να υλοποιήσουμε τη λογική πύλη XOR με το παρακάτω δίκτυο με δύο σιγμοειδείς νευρώνες (3 και 4) και την πόλωση Z .



Λογική πύλη XOR		
X_1	X_2	Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

- Το κρυφό επίπεδο αποτελείται μόνο από το νευρώνα 3
- Οι είσοδοι συνδέονται απευθείας και με το νευρώνα εξόδου (4).
- Έστω ότι αρχικά όλα τα βάρη είναι μηδενικά και ο ρυθμός μάθησης είναι ίσος με 1.

Λογική πύλη XOR (2/4)

- Δίνουμε το 1^ο πρότυπο εκπαίδευσης ($X_1=0$, $X_2=0$, επιθυμητή έξοδος $D=0$)

- Η συνολική είσοδος στο νευρώνα 3 είναι:

$$S_3 = 0*1 + 0*0 + 0*0 = 0$$

Οπότε η έξοδός του γίνεται $\Phi(S_3) = \frac{1}{1+e^0} = 0,5$

- Αντίστοιχα η συνολική είσοδος στο νευρώνα 4 είναι:

$$S_4 = 0*1 + 0*0 + 0*0 + 0*0,5 = 0$$

Οπότε η έξοδός του γίνεται $\Phi(S_4) = \frac{1}{1+e^0} = 0,5$

- Το σφάλμα στο νευρώνα εξόδου 4 είναι:

$$\delta_4 = (0 - 0,5) * \Phi'(S_4) = (0 - 0,5) * \Phi(0) * (1 - \Phi(0)) = (0 - 0,5) * 0,5 * 0,5 = -0,125$$

- Το σφάλμα στον κρυφό νευρώνα 3 είναι:

$$\delta_3 = \Phi'(S_3) * w_{34} * \delta_4 = 0 \quad (\text{αφού το βάρος } w_{34} \text{ είναι ακόμα } 0)$$

Λογική πύλη XOR (3/4)

- Τα βάρη που αλλάζουν είναι τα w_{04} , w_{14} , w_{24} και w_{34}
- Το w_{04} για παράδειγμα (με ρυθμό μάθησης $\alpha=1$) γίνεται:
$$w_{04\text{new}} = w_{04\text{old}} + \alpha * \delta_4 * z_0 = 0 + 1 * (-0.125) * 1 = -0.125$$
- Με το επόμενο πρότυπο θα αλλάξουν όλα τα βάρη.
- Θέτοντας όριο στο σφάλμα $E=0,1$ μετά από 563 εποχές εκπαίδευσης το δίκτυο συγκλίνει στα εξής βάρη:
- $w_{03} = 1,1297$
- $w_{13} = -4,2719$
- $w_{23} = -4,2966$
- $w_{04} = 2,7142$
- $w_{14} = -1,7979$
- $w_{24} = -1,7216$
- $w_{34} = -5,2145$

Λογική πύλη XOR (4/4)

