



Πολυτεχνείο
Κρήτης

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

*Εισαγωγή στην Τεχνητή
Νοημοσύνη*

Προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών

Τσαφράκης Στέλιος

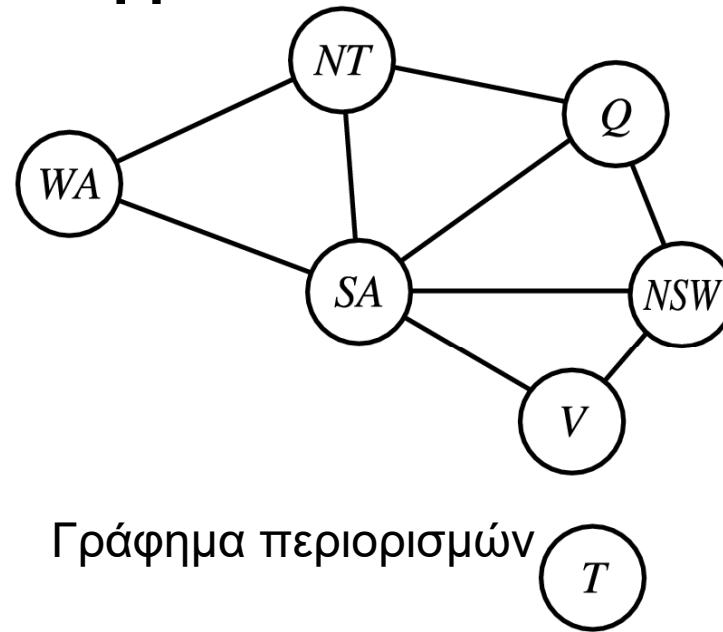
Πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών

- Ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών αποτελείται από:
- Ένα σύνολο n μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$,
- Ένα σύνολο n πεδίων τιμών $D_1, \dots, D_n$, που αντιστοιχούν σε κάθε μεταβλητή έτσι ώστε $X_i \in D_i$, και
- Ένα σύνολο σχέσεων (περιορισμών) $C_1, C_2, \dots, C_m$ όπου $C_i(X_k, \dots, X_m)$ μια σχέση μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος
- Κατάσταση του προβλήματος: Ανάθεση τιμών $\{X_i = v_i, X_j = v_j, \dots\}$
 - Μερική ή πλήρης
 - Συνεπής
- Λύση αποτελεί μια ανάθεση τιμών στις μεταβλητές του προβλήματος, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί
- Τα προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών συχνά χαρακτηρίζονται από μεγάλο αριθμό μεταβλητών και πιθανών (πεδίων) τιμών:
 - Φαινόμενο της συνδυαστικής έκρηξης (combinatorial explosion).
 - Απαιτείται μείωση του χώρου αναζήτησης.

Παράδειγμα



(α)



Γράφημα περιορισμών

(β)

- Μεταβλητές: WA, NT, Q, NSW, V, SA, T
- Πεδία ορισμού: {κόκκινο, πράσινο, μπλε} για όλες τις μεταβλητές
- Περιορισμοί: Να μην έχουν οι γειτονικές περιοχές ίδιο χρώμα

Χαρακτηριστικά

- Εναλλακτικές διατυπώσεις
 - Αυξητική (αναζήτηση πρώτα κατά βάθος)
 - Πλήρεις καταστάσεις (τοπική αναζήτηση)
- Διακριτές / Συνεχείς μεταβλητές
- Πεπερασμένα / άπειρα πεδία ορισμού
- Ανάλογα με το πόσες μεταβλητές περιλαμβάνει ένας περιορισμός χαρακτηρίζεται ως:
 - μοναδιαίος (unary) – μπορεί να απαλειφθεί με προεπεξεργασία του πεδίου τιμών της αντίστοιχης μεταβλητής
 - δυαδικός (binary)
 - ανώτερης τάξης (higher order)
- Περιορισμοί προτίμησης: υποδεικνύουν τις προτιμότερες λύσεις
 - Κωδικοποιούνται ως κόστη στις αναθέσεις τιμών σε συγκεκριμένες μεταβλητές
 - Επίλυση με Βελτιστοποίηση

Παράδειγμα

- Σειρά με την οποία θα εισαχθούν τα προϊόντα Α, Β, Γ, Δ μέσα σε ένα βιομηχανικό μύλο.
- Το προϊόν Α πρέπει να εισαχθεί στο μύλο μετά από το Δ, το Γ πριν από το Β, και το Β πριν από το Α.
- Εισάγω 4 μεταβλητές: $V_A, V_B, V_\Gamma, V_\Delta$, με πεδίο ορισμού $\{1, 2, 3, 4\}$

$V_A \neq V_B$ και $V_A \neq V_\Gamma$ και $V_A \neq V_\Delta$ έτσι ώστε να μην πάρουν

$V_B \neq V_\Gamma$ και $V_B \neq V_\Delta$ και $V_\Gamma \neq V_\Delta$ δύο προϊόντα την ίδια σειρά

$V_A > V_\Delta$ το προϊόν Α μετά από το Δ

$V_\Gamma < V_B$ το προϊόν Γ πριν από το Β

$V_B < V_A$ το προϊόν Β πριν από το Α

- Τρεις δυνατές λύσεις:

$V_A = 4, V_B = 2, V_\Gamma = 1, V_\Delta = 3$ Δηλαδή η σειρά είναι: Γ, Β, Δ, Α

$V_A = 4, V_B = 3, V_\Gamma = 1, V_\Delta = 2$ Δηλαδή η σειρά είναι: Γ, Δ, Β, Α

$V_A = 4, V_B = 3, V_\Gamma = 2, V_\Delta = 1$ Δηλαδή η σειρά είναι: Δ, Γ, Β, Α

Παραγωγή και Δοκιμή

- Γεννήτρια λύσεων και ελεγκτής.
- Η γεννήτρια λύσεων παράγει λύσεις:

$$v_A = 1, v_B = 1, v_{\Gamma}, = 1, v_{\Delta} = 1$$

$$v_A = 1, v_B = 1, v_{\Gamma}, = 1, v_{\Delta} = 2$$

...

$$v_A = 4, v_B = 4, v_{\Gamma}, = 4, v_{\Delta} = 4$$

- Ο ελεγκτής ελέγχει τις παραγόμενες λύσεις.
- Αν η γεννήτρια χρησιμοποιεί ως πληροφορία ότι το προϊόν A παρασκευάζεται πάντα τελευταίο, παράγει μόνο τις λύσεις:

$$v_A = 4, v_B = 1, v_{\Gamma}, = 1, v_{\Delta} = 1$$

$$v_A = 4, v_B = 2, v_{\Gamma}, = 1, v_{\Delta} = 1$$

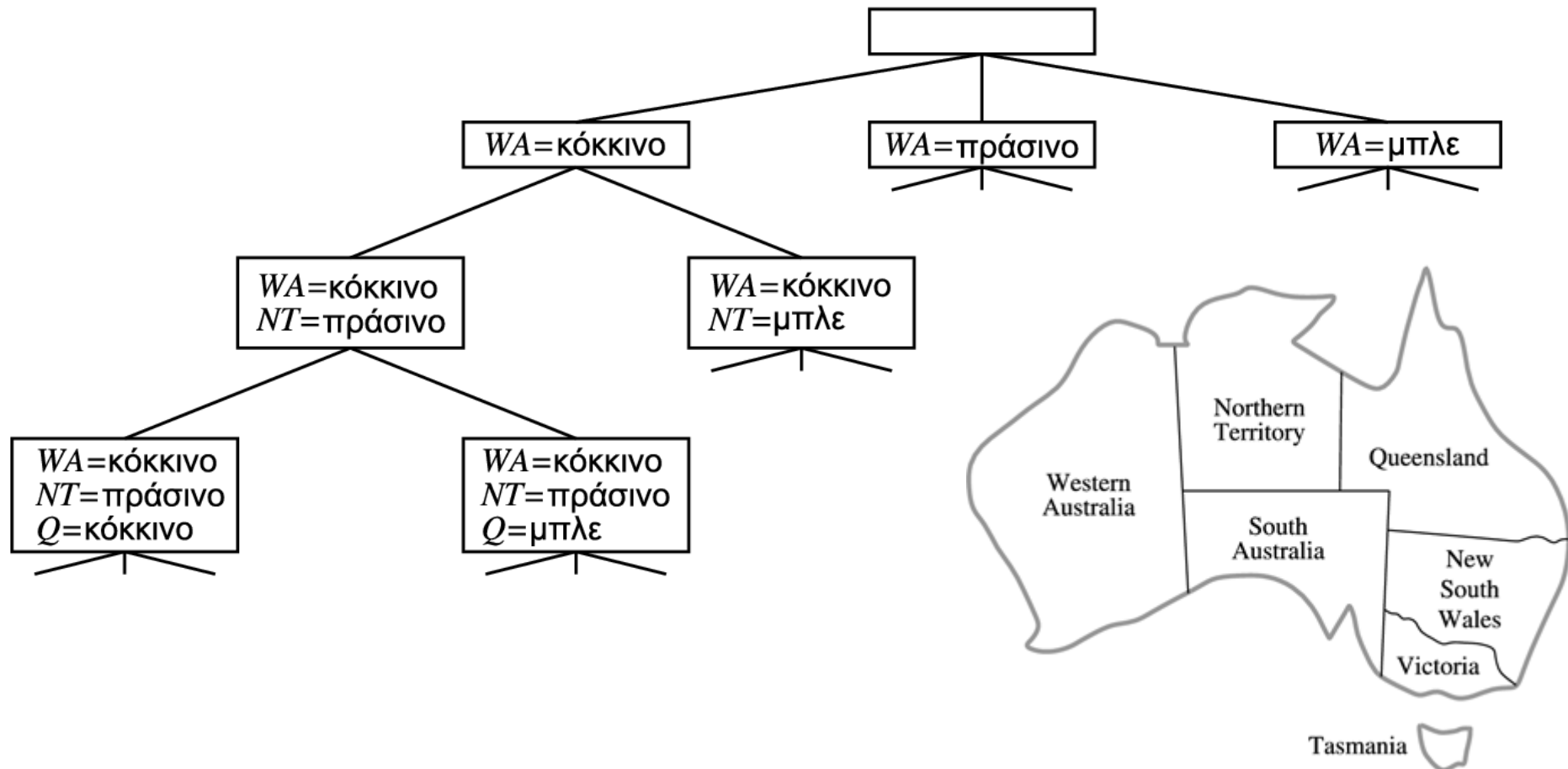
...

$$v_A = 4, v_B = 4, v_{\Gamma}, = 4, v_{\Delta} = 4$$

- Μείωση πιθανών λύσεων από $4^4 = 256$ σε $4^3 = 64$.

Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος

- Όλοι οι αλγόριθμοι αναζήτησης των προβλημάτων ικανοποίησης περιορισμών παράγουν διαδόχους εξετάζοντας τις δυνατές αναθέσεις τιμών για μία μόνο μεταβλητή σε κάθε κόμβο του δένδρου αναζήτησης.
- Επιλογή από τις επιτρεπτές τιμές, με βάση τις τρέχουσες αναθέσεις.



Κρίσιμα ζητήματα

1. Ποια είναι η επόμενη μεταβλητή στην οποία θα πρέπει να ανατεθεί τιμή και με ποια σειρά θα πρέπει να δοκιμαστούν οι τιμές της;
2. Τι συνέπειες έχουν οι τρέχουσες αναθέσεις τιμών μεταβλητών για τις άλλες μεταβλητές στις οποίες δεν έχουν ανατεθεί τιμές;
3. Όταν μια διαδρομή αποτύχει — δηλαδή, φτάσει σε μια κατάσταση στην οποία μια μεταβλητή δεν έχει νόμιμες τιμές — μπορεί η αναζήτηση να αποφύγει να επαναλάβει αυτή την αποτυχία στις επόμενες διαδρομές;

Προτεραιότητα μεταβλητών και τιμών

- Επιλογή μεταβλητής: Η πιο περιορισμένη/δεσμευμένη
 - Ευρετικός μηχανισμός *ελάχιστων απομεινουσών τιμών* (minimum remaining values, MRV)
 - π.χ. μετά από WA=κόκκινο και NT=πράσινο υπάρχει μόνο 1 δυνατή τιμή για την SA (μπλε).
 - Ευρετικός μηχανισμός *βαθμού* (degree heuristic, DH): επιλέγεται η μεταβλητή που εμπλέκεται στο μεγαλύτερο αριθμό περιορισμών
 - Ο MRV είναι συνήθως πιο ισχυρός οδηγός, αλλά ο DH μπορεί να βοηθήσει στην άρση ισοδυναμιών.
- Επιλογή τιμής: Η λιγότερο περιοριστική
 - Ευρετικός μηχανισμός της λιγότερο δεσμευτικής τιμής (least-constraining value, LCV)
 - Αποκλείει τις λιγότερες επιλογές στις γειτονικές μεταβλητές ώστε να αφήσει τη μέγιστη δυνατή ευελιξία για τις επόμενες αναθέσεις τιμών σε μεταβλητές
 - π.χ. έστω ότι μετά από WA=κόκκινο και NT=πράσινο εξετάζουμε την Q
 - Το μπλε είναι κακή επιλογή γιατί απαλείφει την τελευταία νόμιμη επιλογή για την SA.

Πρώιμος έλεγχος (forward checking)

Κάθε φορά που ανατίθεται τιμή σε μια μεταβλητή X ,
ελέγχουμε τις μεταβλητές που
συνδέονται με την X μέσω περιορισμών
και αφαιρούμε τις μη νόμιμες τιμές από
τα πεδία τους.



	WA	NT	Q	NSW	V	SA	T
Αρχικά πεδία ορισμού	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B	R G B
Μετά από $WA=κόκκινο$	R	G B	R G B	R G B	R G B	G B	R G B
Μετά από $Q=πράσινο$	R	B	G	R B	R G B	B	R G B
Μετά από $V=μπλε$	R	B	G	R	B		R G B

Αλγόριθμοι Ελέγχου Συνέπειας – Διάδοσης Περιορισμών

- Εκμετάλλευση της πληροφορίας που υπάρχει στους περιορισμούς για μείωση του χώρου αναζήτησης.
- A priori έλεγχος συνέπειας-τιμών.

Βασική ιδέα των αλγορίθμων της κατηγορίας:

- Απαλοιφή από τα αρχικά πεδία των μεταβλητών εκείνων των τιμών οι οποίες δεν μπορούν να συμμετέχουν στην τελική λύση.
- Έλεγχος συνέπειας (*consistency check*)
 - Διαγραφή από το πεδίο κάθε μεταβλητής εκείνων των τιμών οι οποίες είναι ασυνεπείς ως προς κάποιο περιορισμό.
 - Αναφέρονται και ως αλγόριθμοι διήθησης τιμών (*filtering algorithms*).

Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (1/4)

- Επιλέγουμε να αναθέσουμε τιμή στην SA, η οποία συμμετέχει σε 5 περιορισμούς.
- Έστω SA=κόκκινο.
- Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα πεδία τιμών των υπολοίπων μεταβλητών να τροποποιηθούν ως εξής:
 - SA=κόκκινο
 - WA $\in$ {πράσινο, μπλε}
 - NT $\in$ {πράσινο, μπλε}
 - Q $\in$ {πράσινο, μπλε}
 - NSW $\in$ {πράσινο, μπλε}
 - V $\in$ {πράσινο, μπλε}
 - T $\in$ {κόκκινο, πράσινο, μπλε}



Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (2/4)

- Στη συνέχεια επιλέγουμε την NT , η οποία συμμετέχει σε τρεις περιορισμούς.
- Έστω $NT = \text{πράσινο}$.
- Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα πεδία των υπολοίπων μεταβλητών να τροποποιηθούν ως εξής:
 - $SA = \text{κόκκινο}$
 - $NT = \text{πράσινο}$
 - $WA = \text{μπλε}$
 - $Q = \text{μπλε}$
 - $NSW \in \{\text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$
 - $V \in \{\text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$
 - $T \in \{\text{κόκκινο}, \text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$



Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (3/4)

- Το γεγονός ότι η μεταβλητή WA πήρε επαγωγικά την τιμή «μπλε» δεν επηρεάζει καμία άλλη μεταβλητή.
- Το γεγονός ότι η μεταβλητή Q πήρε επίσης την τιμή «μπλε» επηρεάζει τη μεταβλητή NSW , η οποία πλέον παίρνει την τιμή «πράσινο».
- Αυτό με τη σειρά του επηρεάζει τη μεταβλητή V , η οποία τελικά παίρνει την τιμή «μπλε».
- Άρα, τα νέα πεδία τιμών των μεταβλητών διαμορφώνονται ως εξής:
 - $SA = \text{κόκκινο}$
 - $WA = \text{μπλε}$
 - $NT = \text{πράσινο}$
 - $Q = \text{μπλε}$
 - $NSW = \text{πράσινο}$
 - $V = \text{μπλε}$
 - $T \in \{\text{κόκκινο}, \text{πράσινο}, \text{μπλε}\}$

Εφαρμογή: Χρωματισμός χάρτη (4/4)

- Με δεδομένο ότι η T δεν συμμετέχει σε κανέναν περιορισμό, μπορούμε για τη μεταβλητή αυτή να επιλέξουμε τυχαία μια τιμή από το πεδίο τιμών της. Έτσι λοιπόν μια δυνατή λύση είναι η εξής:
 - $SA = \text{κόκκινο}$
 - $WA = \text{μπλε}$
 - $NT = \text{πράσινο}$
 - $Q = \text{μπλε}$
 - $NSW = \text{πράσινο}$
 - $V = \text{μπλε}$
 - $T = \text{κόκκινο}$

Εφαρμογή: Πρόβλημα σειράς παρασκευής των προϊόντων για ένα βιομηχανικό μύλο (1/2)

- Οι περιορισμοί είναι:

$V_A \neq V_B$	(C1)	$V_B \neq V_\Gamma$	(C4)	$V_A > V_\Delta$	(C7)
$V_A \neq V_\Gamma$	(C2)	$V_B \neq V_\Delta$	(C5)	$V_\Gamma < V_B$	(C8)
$V_A \neq V_\Delta$	(C3)	$V_\Gamma \neq V_\Delta$	(C6)	$V_B < V_A$	(C9)

- Τα πεδία τιμών των μεταβλητών:

$$V_A \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V_B \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V_\Gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V_\Delta \in \{1, 2, 3, 4\}$$

- Λόγω C9 ($V_B < V_A$):

$$V_A \in \{2, 3, 4\}$$

$$V_B \in \{1, 2, 3\}$$

$$V_\Gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V_\Delta \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Εφαρμογή: Πρόβλημα σειράς παρασκευής των προϊόντων για ένα βιομηχανικό μύλο (2/2)

- Λόγω $V_{\Gamma} < V_B$ (C8):
 $V_A \in \{2, 3, 4\}$ $V_B \in \{2, 3\}$
 $V_{\Gamma} \in \{1, 2\}$ $V_{\Delta} \in \{1, 2, 3, 4\}$
- Λόγω $V_A > V_{\Delta}$ (C7):
 $V_A \in \{2, 3, 4\}$ $V_B \in \{2, 3\}$
 $V_{\Gamma} \in \{1, 2\}$ $V_{\Delta} \in \{1, 2, 3\}$
- Λόγω του $V_B < V_A$ (C9):
 $V_A \in \{3, 4\}$
 $V_B \in \{2, 3\}$
 $V_{\Gamma} \in \{1, 2\}$
 $V_{\Delta} \in \{1, 2, 3\}$
- Οι πιθανοί συνδυασμοί γίνονται $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$, από 256 που υπήρχαν αρχικά.

Ειδικοί περιορισμοί

- Περιορισμοί πόρων
 - π.χ. για *atmost*(10,A,B,C,D):
 - αν κάθε μεταβλητή έχει πεδίο {3,4,5,6}:
 - το πρόβλημα είναι ασυνεπές.
 - αν κάθε μεταβλητή έχει πεδίο {2,3,4,5,6}:
 - πρέπει να αφαιρεθούν οι τιμές 5 και 6 από όλες τις μεταβλητές.
 - Διάδοση φραγμάτων
 - 2 πτήσεις: $\text{Flight271} \in [0,165]$ και $\text{Flight272} \in [0,385]$
 - Πρέπει να ταξιδέψουν συνδυαστικά 420:
 - $\text{Flight271} \in [35,165]$ και $\text{Flight272} \in [255,385]$

Τοπική αναζήτηση στα προβλήματα
ικανοποίησης περιορισμών

Αλγόριθμοι Επιδιόρθωσης

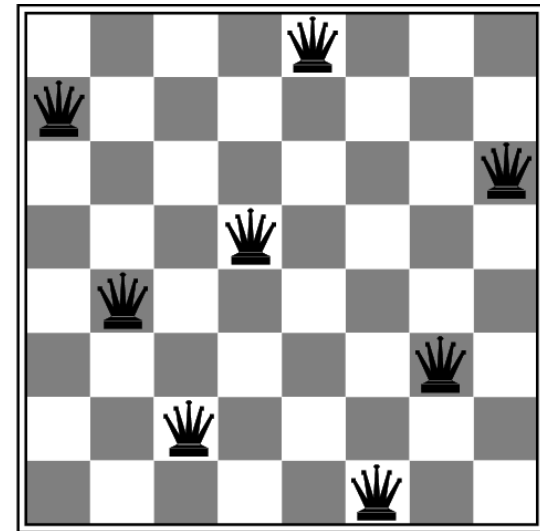
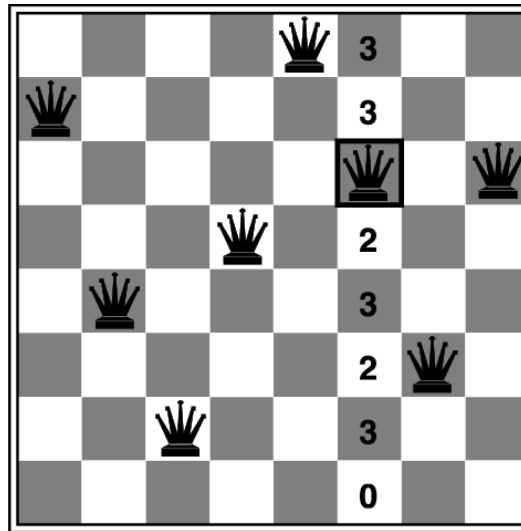
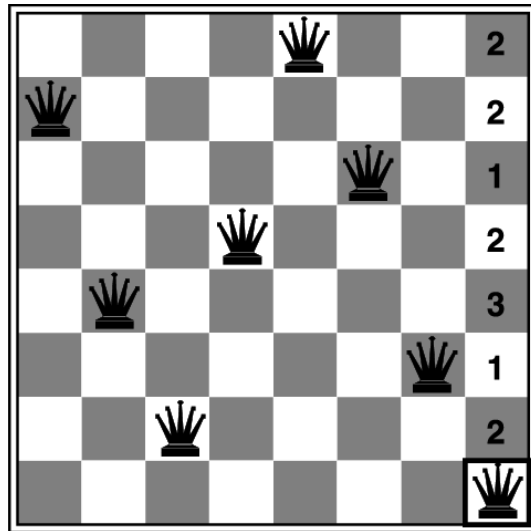
- Στον κλασικό αλγόριθμο παραγωγής και δοκιμής εξετάζεται ένας μεγάλος χώρος αναζήτησης.
- Οι αλγόριθμοι τοπικής αναζήτησης προσπαθούν να βελτιώσουν μια προτεινόμενη λύση σταδιακά.
- Αλγόριθμοι επιδιόρθωσης (*repair algorithms*).
 - *Ευρετικός αλγόριθμος των ελαχίστων συγκρούσεων* (min conflicts heuristic)
- Οι αλγόριθμοι επιδιόρθωσης αποδίδουν πολύ καλά σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Ευρετικός αλγόριθμος των ελαχίστων συγκρούσεων

Min conflicts heuristic

- Ο αλγόριθμος ξεκινά από μια τυχαία ανάθεση τιμών και μεταβάλλει την τιμή μιας μεταβλητής έτσι ώστε η νέα τιμή να παραβιάζει λιγότερους περιορισμούς.
- 1. Ανέθεσε στις μεταβλητές τυχαίες τιμές από τα πεδία τιμών τους.
- 2. Αν οι τιμές των μεταβλητών δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς του προβλήματος τότε επέστρεψε τις τιμές αυτές ως λύση.
- 3. Εξέτασε για μια τυχαία μεταβλητή όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει.
 - i. Αν κάποια από τις τιμές για τη μεταβλητή που εξετάστηκαν μειώνει το πλήθος των περιορισμών που παραβιάζονται, ανέθεσε την τιμή της στη μεταβλητή.
 - ii. Αν δεν υπάρχει τιμή που να μειώνει το πλήθος των περιορισμών που παραβιάζονται, τότε επέλεξε μια τιμή που να διατηρεί τον ίδιο αριθμό περιορισμών.
 - iii. Αν δεν υπάρχει ούτε τέτοια τιμή, τότε άφησε την τιμή της εξεταζόμενης μεταβλητής.
- 4. Επέστρεψε στο βήμα 2.
- Ο αλγόριθμος δεν εξετάζει μεγάλο πλήθος γειτονικών κόμβων.
- Διατηρεί το πρόβλημα του εγκλωβισμού σε κάποιο τοπικό ελάχιστο.

Αλγόριθμος ελάχιστων συγκρούσεων: 8 Βασίλισσες



- Ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδος (αν και όχι πλήρης).
- Κατάλληλη και για προβλήματα, όπου μικρές αλλαγές στο περιβάλλον οδηγούν σε νέες λύσεις με μικρές διαφοροποιήσεις από τις προηγούμενες:
 - π.χ. εβδομαδιαίος χρονοπρογραμματισμός αεροπορικών πτήσεων
 - Μπορεί να περιλαμβάνει χιλιάδες πτήσεις & αναθέσεις προσωπικού
 - Καθυστερήσεις πτήσεων (π.χ. κακοκαιρία) απαιτούν (μικρές) αλλαγές στον αρχικό χρονοπρογραμματισμό