Τμημα Μηχανικων Παραγωγης και Διοικησης
Πολυτεχνειο Κρητης

Σημειώσεις στα πλαίσια του μαθήματος:

ΜΠΔ 432–Δυναμική, ταλαντώσεις και έλεγχος κατασκευών

Δυναμική κατασκευαστικών και μηχανικών συστημάτων

Μια εισαγωγή με χρήση της Climax στο περιβάλλον εργασίας SDE

Χρήστος Παναγιωτόπουλος

Ακαδημαϊκό έτος 2017–2018

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Ημιτελές, και σε εξέλιξη, τεύχος σημειώσεων, ... 10 Μαΐου 2018

Προς ολοκλήρωση ...

- πρόλογος
- ενότητα 4 (έλεγχος κατασκευών)

1 Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές όπως δηλώνεται και από το τίτλο του τεύχους δημιουργήθηκαν ως ένα συνοδευτικό εργαλείο του μαθήματος «Δυναμική, Ταλαντώσεις & Έλεγχος κατασκευών». Στο σημείο αυτό θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς τους οποίους δεν διατεινόμαστε ότι έχουν καθολική ισχύ και αποδοχή αλλά περισσότερο τους καταθέτουμε για να δείξουμε τον τρόπο με το οποίο αντιλαμβανόμαστε στο πλαίσιο αυτών των σημειώσεων κάποιες έννοιες.

1.1 Ορισμοί

Δυναμική

Η δυναμική αποτελεί ιδιαίτερο κλάδο της μηχανικής που έχει ως αντικείμενο μελέτης και έρευνας τη κίνηση των σωμάτων υπό την επίδραση δυνάμεων λαμβάνοντας υπόψη τη μάζα των σωμάτων και των αδρανειακών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτή. Κύριο αντικείμενο της δυναμικής όπως τη θεωρούμε εδώ θα είναι η μοντελοποίηση και ο καθορισμός των εξισώσεων που διέπουν και περιγράφουν τη συμπεριφορά κάποιου συστήματος. Βάση αποτελεί η Νευτώνεια μηχανική όπως αυτή εκφράζεται από τους αντίστοιχους φυσικούς νόμους και η εφαρμογή που μπορεί να έχει σε συστήματα σωμάτων. Θα μελετηθούν επίσης στοιχεία της αναλυτικής δυναμικής με αξιοποίηση ενεργειακών προτάσεων και αρχών όπως αυτή του Hamilton καθώς και ο καθορισμός των εξισώσεων Lagrange που μπορεί να αποτελέσει μια μεθοδολογία διατύπωσης των εξισώσεων κίνησης ενός σύνθετου συστήματος. Θα γίνει μια προσπάθεια παρουσίασης, απαραμόρφωτων η παραμορφώσιμων, γραμμικών ή και μη-γραμμικών, διακριτών ή και συνεχών, συστημάτων.

Ταλαντώσεις

Με τον όρο ταλάντωση χαρακτηρίζεται οποιαδήποτε παλινδρόμηση κάποιου φυσικού μεγέθους γύρω από μία κεντρική τιμή που καλείται και θέση ισορροπίας. Εδώ θα θεωρήσουμε το πεδίο των ταλαντώσεων σαν την προσπάθεια επίλυσης και ανάλυσης των δυναμικών συστημάτων. Με το τρόπο αυτό η απόκριση του συστήματος λαμβάνει εκτός της ποιοτικής και αριθμητική υπόσταση. Το τμήμα της επίλυσης, αριθμητικής ή αναλυτικής, είναι και αυτό ένα σημαντικό αντικείμενο της δυναμικής των κατασκευών. Η βασική ενασχόληση στο πλαίσιο των σημειώσεων θα είναι οι ταλαντώσεις και η δυναμική συμπεριφορά των μηχανικών συστημάτων. Βασικά στοιχεία όπως ο μονοβάθμιος ταλαντωτής, το πολυβάθμιο σύστημα, οι ελεύθερες και καταναγκασμένες ταλαντώσεις, η αναλυτική και αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση, η ανάλυση στο πεδίο του χρόνου αλλά και της συχνότητας, αποτελούν αντικείμενο αυτών των σημειώσεων και θα γίνει μια προσπάθεια συνοπτικής παρουσίασης ή ενδεικτικής αναφοράς.

Έλεγχος κατασκευών

Εύκολα θα μπορέσει να παρατηρήσει κανείς ότι στο παρόν τεύχος οι όροι σύστημα και κατασκευή χρησιμοποιούνται εναλλάξ υποδηλώνοντας πολλές φορές το ίδιο πράγμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι μια κατασκευή είναι βασικά μια επιμέρους περίπτωση του γενικότερου ορισμού ενός συστήματος και πολλές φορές αναφέρεται ως κατασκευαστικό σύστημα. Ένας ορισμός του συστήματος μπορεί να είναι ο εξής αρκετά γενικός[1]: «Το *σύστημα* είναι μία απεικόνιση P, η οποία συσχετίζει μία συνάρτηση εισόδου $w(t)$ με μία συνάρτηση εξόδου $z(t) = P[w(t)]$».

Έλεγχος συστήματος είναι η διαδικασία κατάλληλου σχεδιασμού αλλά και το σύνολο ενεργητικών δράσεων επέμβασης σε ένα σύστημα ώστε να συμπεριφερθεί με συγκεκριμένο τρόπο. Από την ίδια βιβλιογραφική πηγή όπως προηγούμενα δανειζόμαστε ένα γενικό ορισμό: «Με τον όρο *έλεγχο* ή *αντιστάθμιση* εννοείται ένα άλλο (υπο)σύστημα K το οποίο συνδεδεμένο κατάλληλα με το P θα ελαχιστοποιεί κάποιο κριτήριο επιθυμητής συμπεριφοράς του συνολικού συστήματος (P και K»).

1.2 Μοντελοποίηση

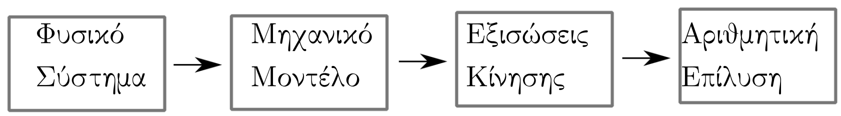
Από [1.4.2:B1] «Στόχος της δυναμικής των κατασκευών είναι ο περιορισμός των ταλαντώσεων που προέρχονται απο τις διεγέρσεις (εξωτερικά φορτία) έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ασφάλεια των μηχανικών συστημάτων σε διάφορες οριακές καταστάσεις και η λειτουργικότητα τους σε συνήθεις καταστάσεις λειτουργίας.

Η ανάλυση των συστημάτων αυτών βασίζονται στην ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων συμπεριφοράς των μηχανικών συστημάτων και μαθηματικών μοντέλων συμπεριφοράς των εξωτερικών επιδράσεων (διεγέρσεων). Τα μοντέλα αυτά αναπτύσσονται με βάση υποθέσεις. Λόγω των υποθέσεων, η συμπεριφορά των μοντέλων σε όλες τις περιπτώσεις δεν περιγράφουν επακριβώς την συμπεριφορά των συστημάτων. Τα σφάλματα μεταξύ της συμπεριφοράς των μοντέλων και της συμπεριφοράς των πραγματικών συστημάτων καλούνται σφάλματα μοντελοποίησης.

Η διαδικασία ανάλυσης μηχανικών συστημάτων περιλαμβάνει τρία γενικά βήματα τα οποία δίνονται στο Σχήμα 1.1. Το πρώτο βήμα αποτελεί την προ-

[1] Αναστάσιος Πουλιέζος, Σύγχρονη Θεωρία Ελέγχου, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, Δράση Κάλλιπος, 2016

σομοίωση της συμπεριφοράς των στοιχείων που απαρτίζουν το σύστημα με εξειδικευμένα στοιχεία (μοντέλα). Το δεύτερο βήμα αποτελεί την ανάπτυξη των εξισώσεων κίνησης για τα εξειδικευμένα στοιχεία (μοντέλα) με βάση καταστατικούς νόμους και νόμους κίνησης διαθέσιμους από την μηχανική. Το τελευταίο βήμα αποτελεί την επίλυση των εξισώσεων κίνησης.»



Σχήμα 1: Διαδικασία μοντελοποίησης και επίλυσης.

1.3 Αριθμητικά εργαλεία

Υπάρχει ένα μεγάλο εύρος γλωσσών προγραμματισμού, εφαρμογών και γενικότερα λογισμικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για εκπαιδευτικούς λόγους στα πλαίσια του αντικειμένου με το οποίο ασχολούνται οι σημειώσεις αυτές. Παραδείγματα αποτελούν εφαρμογές όπως η Matlab, το Simulink, και το LS-DYNA, που είναι εμπορικά πακέτα κάθε ένα από αυτά με διαφορετικό πεδίο εφαρμογών και χρήσης. Ταυτόχρονα υπάρχουν και πακέτα ελεύθερου και ανοικτού κωδικά όπως το Octave, η OpenModelica και το Salome-Meca. Οι Simulink και OpenModelica είναι βασικά γλώσσες προγραμματισμού με επιστημονικο-τεχνική κατεύθυνση που συνοδεύονται από αντίστοιχα περιβάλλοντα εργασίας, το Matlab και η Octave αφορούν εργαλεία λογισμικού για το σχεδιασμό και έλεγχο ενός συστήματος ενώ τέλος τα LS-DYNA και Salome-Meca, αποτελούν ολοκληρωμένα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση απλών ή και πολυσύνθετων προβλημάτων δυναμικής και ταλαντώσεων. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόγραμμα Salome-Meca αποτελεί την συνεργασία του επιλύτη πεπερασμένων στοιχείων Code-Aster με το περιβάλλον προ- και μετα-επεξεργασίας Salome. Επιπλέον υπάρχουν και γλώσσες προγραμματισμού γενικής εφαρμογής με scripting δυνατότητες αλλά και δυναμικό καθορισμό μεταβλητών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν και να αξιοποιηθούν πολύ αποτελεσματικά για την αντιμετώπιση προβλημάτων δυναμικής, ταλαντώσεων και ελέγχου κατασκευών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων γλωσσών αποτελούν η πολύ διαδεδομένη τα τελευταία χρόνια Python καθώς και η σχετικά νεοεμφανιζόμενη Julia. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε τη σταθερά ευρείας διάδοσης, σε πολλαπλά πεδία εφαρμογής, γλώσσα προγραμματισμού Java η οποία είναι και μια από τις πλέον κατάλληλες για την ανάπτυξη εφαρμογών. Όλα τα προηγούμενα αναφέρονται ενδεικτικά και μόνο και δεν αποτελούν σε καμία περίπτωση προσπάθεια πλήρους παράθεσης. Σε ότι παρακάτω ακολουθεί θα αναφέρουμε επιλογές που έχουν γίνει στο παρόν τεύχος για τις ανάγκες του μαθήματος και του αντικείμενου μελέτης της δυναμικής, ταλαντώσεων και ελέγχου των κατασκευών. Η γλώσσα προγραμματισμού Java αλλά και το εικονικό περιβάλλον υπολογισμών της Java Virtual Machine (JVM), όπως θα γίνει εμφανές αποτελούν το βασικό άξονα γύρω από τον οποίο κατασκευάστηκαν τα εργαλεία που θα αξιοποιηθούν εδώ.

Η γλώσσα Groovy

Η γλώσσα προγραμματισμού που, για μια σειρά από λόγους, επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί στα πλαίσια των σημειώσεων είναι η Groovy η οποία θα μπορούσε να ιδωθεί ως ένα υπερσύνολο της Java. Η Groovy είναι μια δυναμική, αντικειμενοστραφής γλώσσα προγραμματισμού με χαρακτηριστικά παρόμοια με αυτά από γλώσσες όπως οι Python, Ruby, Perl, και η Smalltalk, «τρέχει» στο JVM συνεργάζεται και αλληλεπιδρά πλήρως με πακέτα που έχουν δημιουργηθεί σε Java. Η Groovy μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν γλώσσα σεναρίων scripting. Για περισσότερα στοιχεία μπορεί κανείς να ανατρέξει στην επίσημη ιστοσελίδα της γλώσσας[2] καθώς και στο παρόν τεύχος στο παράρτημα Α′.

Η εφαρμογή Dynasoft

Το λογισμικό πακέτο Dynasoft[3] (`http://dynasoft.civil.auth.gr`), σε γλώσσα Java, δημιουργήθηκε για εκπαιδευτικές εφαρμογές στα πλαίσια της δυναμικής των κατασκευών και έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στη σχολή Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Α.Π.Θ. (Δυναμική Ι & ΙΙ) αλλά και από τη Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου της Κρήτης στα πλαίσια του μαθήματος «Δυναμική, ταλαντώσεις και έλεγχος κατασκευών» κατά το ακαδημαϊκό έτος 2016–2017. Πρόκειται για μια απλή και εύκολη στη χρήση εφαρμογή που αφορά τις οντότητες της παρακάτω λίστας:

- Μονοβάθμιος ταλαντωτής (`sdof`)
- Πολυβάθμιο σύστημα περίπτωση μονώροφου κτιρίου στον 3Δ χώρο (`storey`)
- Πολυβάθμιο σύστημα, περίπτωση επίπεδου κτιρίου τριών ορόφων (`frame`)
- Υπολογισμός φασμάτων (`specalc`)

[2] `http://groovy-lang.org`

[3] C.G. Panagiotopoulos, G.D. Manolis, A web-based educational software for structural dynamics. Computer Applications in Engineering Education, 24(4), pp. 599–614, 2016

- Συνθετικά επιταχυνσεογραφήματα (ground)

κάποιες από τις οποίες οντότητες μπορούν να φανούν χρήσιμες και στα πλαίσια του μαθήματος «Δυναμική, ταλαντώσεις και έλεγχος κατασκευών».

Η βιβλιοθήκη Climax και το περιβάλλον εργασίας SDE

Για γενικότερου ενδιαφέροντος αλλά και πιο προχωρημένες εφαρμογές και επίλυση προβλημάτων δυναμικής, ταλαντώσεων και ελεγχου κατασκευων, θα γίνει χρήση πακέτων λογισμικού ανοικτού κώδικα αναπτυγμένου σε Java. Πιο συγκεκριμένα η βιβλιοθήκη climax είναι μία βιβλιοθήκη αριθμητικών εφαρμογών ενώ έχει και δυνατότητες υπολογιστικών μεθόδων (μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, συνοριακών στοιχείων, πεπερασμένες διαφορές, υβριδικές μέθοδοι). Επιπλέον το περιβάλλον εργασίας SDE είναι εφοδιασμένο με τη βιβλιοθήκη climax καθώς και άλλων παρόμοιων μονάδων, ενώ μπορεί να λειτουργήσει σαν μια διεπιφάνεια χρήσης και αξιοποίησης της Groovy. Το εν λόγω λογισμικό,το οποίο από εδώ και στο εξής θα αποκαλούμε στο σύνολο του και ως Symplegma, είναι προσβάσιμο από την ιστοσελίδα (`http://symplegma.org/`) χρησιμοποιήθηκε πειραματικά στα πλαίσια του μαθήματος «Υπολογιστική Μηχανική» (2016–2017)[4] της Σχολής Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου της Κρήτης και του μαθήματος «Σεμινάριο (Ακουστική)-Εφαρμοσμένη Ακουστική με χρήση Η/Υ» (2017–2018)[5] του τμήματος Μηχανικών Μουσικής Τεχνολογίας & Ακουστικής Τ.Ε. του Τ.Ε.Ι. Κρήτης. Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με τη χρήση των Climax/SDE στα προηγούμενα μαθήματα, μπορεί κανείς να ανατρέξει στο τεύχος αναφοράς μίας πιο εξειδικευμένης εφαρμογής στο μάθημα της Υπολογιστικής Μηχανικής[6] και στις σημειώσεις του μαθήματος Σεμινάριο-Ακουστική[7].

Το πακέτο `courses.structuraldynamics`

Ειδικά για το μάθημα «Δυναμική, ταλαντώσεις και έλεγχος κατασκευών», αναπτύχθηκε ειδικής κατεύθυνσης πακέτο, ως μέρος του συνόλου της βιβλιοθήκης Climax. Πιο συγκεκριμένα αφορά την δημιουργία κλάσεων που αναπαριστούν συνήθεις οντότητες της δυναμικής και των ταλαντώσεων ιδιαίτερης σημασίας στην κατανόηση αλλά και εμβάθυνση του αντικειμένου.

[4] `https://www.eclass.tuc.gr/courses/MPD138/index.php`

[5] `https://eclass.teicrete.gr/courses/TA191/`

[6] Ανάλυση πλαισιακής κατασκευής, με επίπεδα στοιχεία πλήρωσης, σε στατικό και δυναμικό φορτίο. `http://symplegma.org/pdfs/CA2017gr.pdf`

[7] Αριθμητικές Μέθοδοι στην Εφαρμοσμένη Ακουστική: Χρήση της Climax στο περιβάλλον εργασίας SDE. `http://symplegma.org/pdfs/CompAcoustIntro.pdf`

1.4 Αναφορές

Μέρος του τεύχους των σημειώσεων αυτών προέρχεται από αυτούσια κομμάτια προηγούμενου βιβλίου[8] ύστερα από κατάλληλες μετατροπές και, σε κάποιες περιπτώσεις, διορθώσεις. Τμήματα έχουν υιοθετηθεί και από το πρώτο στη σειρά βιβλίο της πιο κάτω λίστας.

Σε καμιά περίπτωση οι σημειώσεις αυτές δεν υπολογίζονται ως αντικατάσταση ολοκληρωμένων βιβλίων όπως αυτά της λίστας που ακολουθεί. Τα βιβλία αυτά, και σε διαφορετικό βαθμό και με ξεχωριστό τρόπο το καθένα, έχουν εν πολλοίς λειτουργήσει ως εργαλεία εκμάθησης και κατανόησης άλλα και ως εφαλτήριο για περαιτέρω διερεύνηση και πειραματισμό. Όσο αφορά το παρόν τεύχος, έχει γίνει προσπάθεια να διατηρηθεί μαζί με την απλότητα και μια κάποια συνεκτικότητα και πληρότητα.

1.4.1 Βιβλία

A1 Γ. Μανώλης, Π. Κολιόπουλος, Χ. Παναγιωτόπουλος, Δυναμική των κατασκευών, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, Δράση Κάλλιπος, 2016.

A2 Ι. Κατσικαδέλης, Δυναμική ανάλυση των κατασκευών - θεωρία και εφαρμογές, εκδ. Συμμετρία, 2012.

A3 Κ. Αναστασιάδης, Δυναμική των κατασκευών τόμοι Ι & ΙΙ, εκδ. Ζήτη, 1983.

A4 Α. Καναράχος, Ι. Αντωνιάδης, Δυναμική Μηχανών, εκδ. Παπασωτηρίου, 1998

A5 Σ. Νατσιάβας, Ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων, εκδ. Ζήτη, 2001

1.4.2 Σημειώσεις και οπτικοακουστικό υλικό

B1 Κ. Παπαδημητρίου, http://eclass.uth.gr/eclass/courses/MHXB114/

B2 Σημειώσεις (Δρ. Δ. Βενετσάνος, Δρ. Ι. Αντωνιάδης) http://courseware.mech.ntua.gr/ml23065/

B3 http://dynamikimixanon.wikispaces.com/

[8] Χ. Παναγιωτόπουλος, Π. Κολιόπουλος, Εγχειρίδιο δυναμικής των κατασκευών, εκδ. Σοφία, 2007.

1.4.3 Εκπαιδευτικό λογισμικό

Γ1 Dynasoft, `http://dynasoft.civil.auth.gr/`

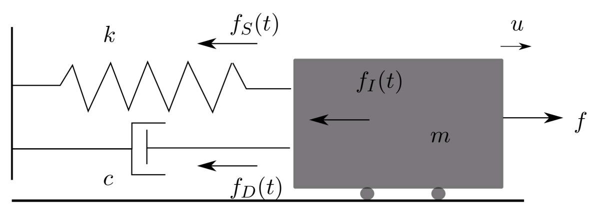
Γ2 Edusoft, `http://edusoft.civil.auth.gr/`

Γ3 Symplegma, `http://symplegma.org/`

2 Ο μονοβάθμιος ταλαντωτής

2.1 Σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας

Στην εικόνα 2 φαίνεται ένα απλό σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, δηλαδή της μετατόπισης ενός σώματος , από την αρχική θέση ισορροπίας. Τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος αυτού είναι η μάζα του m, η δυσκαμψία k του ελατήριου που το συνδέει με το υπόβαθρο, ο συντελεστής απόσβεσης c λόγω του αποσβεστήρα και η εξωτερική χρονικά εξαρτώμενη δύναμη $f(t)$. Με



Σχήμα 2: Σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας.

χρήση της αρχής του d'Alembert μπορεί εύκολα να γραφτεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος από την εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων. Οι δυνάμεις που ασκούνται επί του σώματος όπως φαίνεται και στο σχήμα είναι η εξωτερική φόρτιση f, η αδρανειακή δύναμη f_I, η δύναμη του ελατήριου f_S και τέλος η δύναμη του αποσβεστήρα f_D. Η αδρανειακή δύναμη δίνεται από το 2^o νόμο του Νεύτωνα ως το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την επιτάχυνση του, η ελαστική δύναμη (δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου), από το νόμο του Hooke, είναι το γινόμενο της σταθεράς του ελατηρίου (δυσκαμψίας) επί τη μετατόπιση του συστήματος (η οποία ισούται της επιμήκυνσης του ελατηρίου), ενώ τέλος, θεωρώντας ιξώδη αποσβεστικό μηχανισμό, η δύναμη αυτού θα είναι το γινόμενο του συντελεστή απόσβεσης επί την ταχύτητα του σώματος. Ως γνωστόν, η ταχύτητα είναι η πρώτη χρονική παράγωγος της μετατόπισης ενώ η επιτάχυνση η δεύτερη χρονική παραγωγός της μετακίνησης. Στο εξής με την άνωθεν τέλεια θα συμβολίζεται η παράγωγος συνάρτησης ως προς το χρόνο. Συνεπώς η εξίσωση ισορροπίας θα είναι:

$$\begin{aligned} & f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = f(t) \rightarrow \\ & m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Ελεύθερη ταλάντωση

Στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης εξ. (1) και εξ. (24) πρέπει να λάβουμε υπόψη και τις αρχικές συνθήκες που περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος κατά την έναρξη του φαινομένου. Συνήθως, ως χρόνος έναρξης λαμβάνεται το μηδέν χωρίς αυτό να είναι δεσμευτικό. Για να καθοριστούν οι αρχικές συνθήκες του συστήματος πρέπει να δώσουμε τιμές σε δύο (και μόνο δύο) από τις τρεις μεταβλητές απόκρισης του συστήματος (τη μετατόπιση και την ταχύτητα), ενώ η επιτάχυνση προκύπτει από τη δεσμευτική εξίσωση ισορροπίας στο χρόνο έναρξης. Συμβολίζουμε την αρχική μετατόπιση $u(t_0)$ με u_0 και την αρχική ταχύτητα $\dot{u}(t_0)$ με $\dot{u}_0$, οπότε η αρχική επιτάχυνση προκύπτει ως:

$$\ddot{u}(t_0) = \ddot{u}_0 = \frac{f_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m} \tag{2}$$

όπου $f_0{=}f(t_0)$. Για να κινηθεί λοιπόν ένα σύστημα θα πρέπει είτε να διεγερθεί από μία εξωτερική δύναμη, είτε να υποβληθεί σε κάποιες μη μηδενικές αρχικές συνθήκες, είτε τέλος να συμβούν και τα δύο ταυτόχρονα. Η κίνηση του συστήματος όταν υπόκειται σε αρχικές συνθήκες απουσία εξωτερικής διέγερσης ονομάζεται ελεύθερη ταλάντωση, και η διατύπωση του προβλήματος συνίσταται στο να βρεθεί η απόκριση του μονοβάθμιου συστήματος που ικανοποιεί την ομογενη μορφη της διαφορικής εξίσωσης (1) και τις αρχικές συνθήκες u_0, $\dot{u}_0$.

Η ιδιοσυχνότητα του μονοβάθμιου ταλαντωτή $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ και $T_0{=}2\pi/\omega_0$ η ιδιοπερίοδος του. Η ιδιοσυχνότητα ω_0 είναι ο αριθμός των κύκλων ταλάντωσης ανά μονάδα χράνου πολλαπλασιασμένος με 2π. Αντίστοιχα η ιδιοπερίοδος T_0 είναι ο χρόνος στον οποίο ολοκληρώνεται ένας πλήρης κύκλος ταλάντωσης.

Ανάλογα με την τιμή του συντελεστή απόσβεσης c η ελεύθερη ταλάντωση ονομάζεται αναπόσβεστη όταν $c{=}0$ και αποσβεσμένη για $c{\neq}0$. Επιπλέον, η αποσβεσμένη ταλάντωση διακρίνεται σε υποκρίσιμη, κρίσιμη και υπερκρίσιμη όταν ο συντελεστής απόσβεσης είναι αντίστοιχα μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος του συντελεστή κρίσιμης απόσβεσης, $c_{cr} = 2m\omega_0$. Η τιμή αυτή του συντελεστή απόσβεσης (κρίσιμη) είναι η ελάχιστη τιμή απόσβεσης για την οποία το σύστημα δεν θα εκτελέσει ταλάντωση υπό την έννοια της αλλαγής του πρόσημου της μετακίνησης του συστήματος (ταλάντωση γύρω από την θέση ισορροπίας). Ορίζεται επίσης το ποσοστό κρίσιμης απόσβεσης ως:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_0}. \tag{3}$$

Στον πίνακα 1 δίνονται οι λύσεις $u(t)$ της ομογενούς εκδοχής της εξίσωσης κίνησης (1) για όλες τις περιπτώσεις απόσβεσης.

Για την αποσβεσμένη ταλάντωση ορίζεται ο συντελεστής λογαριθμικής μείωσης δ_n, ο οποίος δίνεται από το λογάριθμο του λόγου της μετατόπισης σε μία

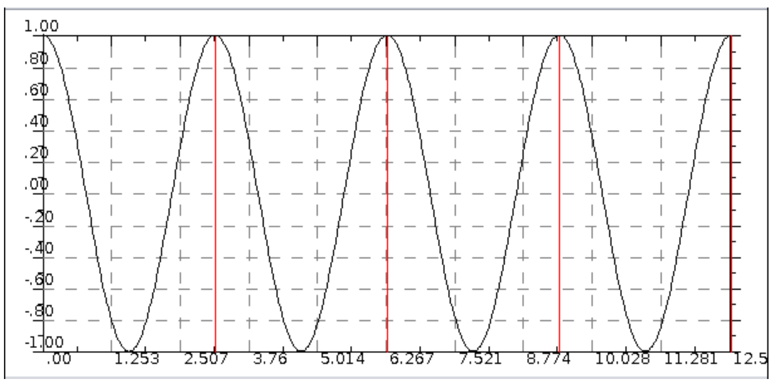
Πίνακας 1: Ελεύθερη ταλάντωση μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος

Αναπόσβεστη ταλάντωση	$\xi = 0$	$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos(\omega_0 t) + \dot{u}_0 \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \\ &= p \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned} \quad (4)$$
Υποκρισιμη αποσβεσμενη ταλαντωση	$\xi < 1$	$$\begin{aligned} u(t) &= \left(u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\omega_d} \sin(\omega_0 t) \right) e^{-\xi \omega_0 t} \\ &= p \cos(\omega_0 t + \theta) e^{-\xi \omega_0 t} \end{aligned} \quad (5)$$
Κρίσιμη αποσβεσμένη ταλάντωση	$\xi = 1$	$$u(t) = \left(u_0 (1 + \omega_0 t) + \dot{u}_0 t \right) e^{-\omega_0 t} \quad (6)$$
Υπερκρίσιμη αποσβεσμένη ταλάντωση	$\xi > 1$	$$u(t) = \left(u_0 \cosh(\omega_d t) + \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\omega_d} \sinh(\omega_0 t) \right) e^{-\xi \omega_0 t} \quad (7)$$
ω_d η συχνότητα αποσβεσμένης ταλάντωσης $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ για την υποκρίσιμη, και $\omega_d = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$ για την υπερκρίσιμη απόσβεση. Το εύρος στη σχέση (4) υπολογίζεται ως $p = \sqrt{u_0^2 + \frac{\dot{u}_0^2}{\omega_0^2}}$ ενώ $\theta = \tan^{-1}(-\frac{\dot{u}_0}{\omega_0 u_0})$ είναι η γωνία φάσης. Αντίστοιχα στη σχέση (5) το εύρος είναι $p = \sqrt{u_0^2 + \frac{(\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0)^2}{\omega_0^2}}$ και η γωνία φάσης $\theta = -\tan^{-1}(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\omega_0 u_0})$.		

χρονική στιγμή προς τη μετατόπιση μετά την πάροδο n κύκλων ταλάντωσης

$$\delta_n = \ln \frac{u(t_i)}{u(t_i + nT_d)} = \ln \frac{u_i}{u_{i+n}} = n \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \xrightarrow{\xi \ll 1} \delta_n = n2\pi\xi \tag{8}$$

Η περίοδος T_d είναι η περίοδος της αποσβεσμένης ταλάντωσης και δίνεται ως $T_d = 2\pi/\omega_d$. Στον παραπάνω τύπο χρειάζεται προσοχή στις χρονικές στιγμές μηδενισμού της απόκρισης, για τις οποίες δε νοείται περαιτέρω μείωση. Είθισται πάντως να υπολογίζουμε τη λογαριθμική μείωση μεταξύ μεγίστων (ακρότατων) τιμών της απόκρισης. Εδώ θα μας απασχολήσουν κυρίως προβλήματα συστημάτων υποκρίσιμης απόσβεσης, καθώς αυτά είναι που εμφανίζονται στην πλειοψηφία προβλημάτων ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων.



Σχήμα 3: Αναπόσβεστη ελεύθερη ταλάντωση.

2.3 Αρμονική ταλάντωση

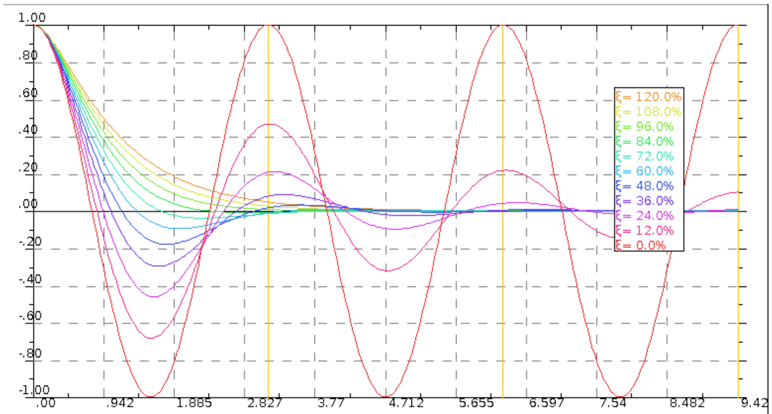
Η ταλάντωση του συστήματος όταν αυτό διεγείρεται από μία αρμονική φόρτιση της μορφής $f(t){=}f_0 \sin(\omega t)$ ή $f(t){=}f_0 \cos(\omega t)$ ονομάζεται αρμονική ταλάντωση. Η εξίσωση κίνησης στην περίπτωση ημιτονοειδούς φόρτισης είναι η εξής:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_0 \sin(\omega t) \tag{9}$$

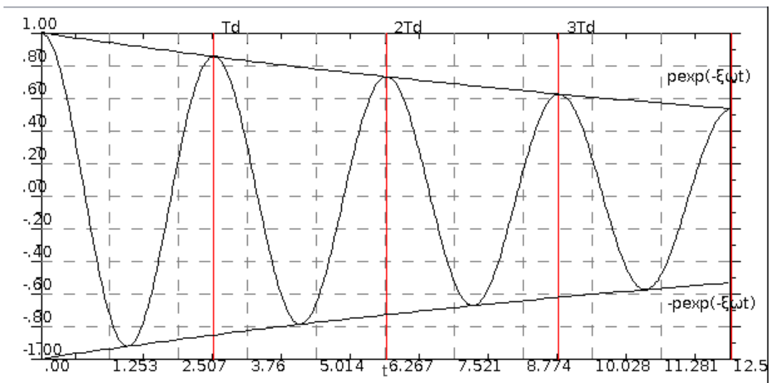
με αρχικές συνθήκες u_0, $\dot{u}_0$. Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από δύο μέρη και δίνεται ως $u(t){=}u_c(t){+}u_p(t)$, όπου $u_c(t)$ είναι η *μεταβατική* ταλάντωση και $u_p(t)$ η *μόνιμη* ή *παραμένουσα* ταλάντωση. Ο λόγος της συχνότητας της διέγερσης προς την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι ένα πολύ χρήσιμο μέγεθος και ορίζεται ως $\beta{=}\omega/\omega_0$.

Πίνακας 2: Αρμονική (ημιτονοειδής) ταλάντωση

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) \qquad (10)$$	
Μεταβατική ταλάντωση	$$u_c(t) = \left(C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos\omega_d t\right) e^{-\xi\omega_0 t} \qquad (11)$$ οι σταθερές C_1, C_2 εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.
Παραμένουσα ταλάντωση	$$\begin{aligned} u_p(t) &= \frac{f_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left((1-\beta^2)\sin(\omega t) - 2\xi\beta\cos(\omega t)\right) \\ &= \frac{f_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}\sin(\omega t-\theta) \\ &= p\sin(\omega t-\theta) \end{aligned} \qquad (12)$$ όπου $p = \frac{f_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$ το εύρος, και η γωνία φάσης $\theta = \tan^{-1}\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$.



Σχήμα 4: Αποσβεσμένη ελεύθερη ταλάντωση για διάφορες τιμές του λόγου κρίσιμης απόσβεσης $\xi = c/c_{cr}$.

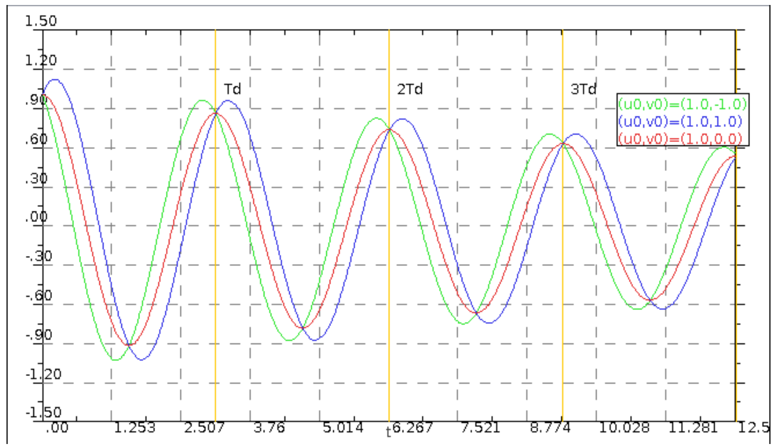


Σχήμα 5: Περίπτωση υποκρίσιμης ελεύθερης αποσβεσμένης ταλάντωσης.

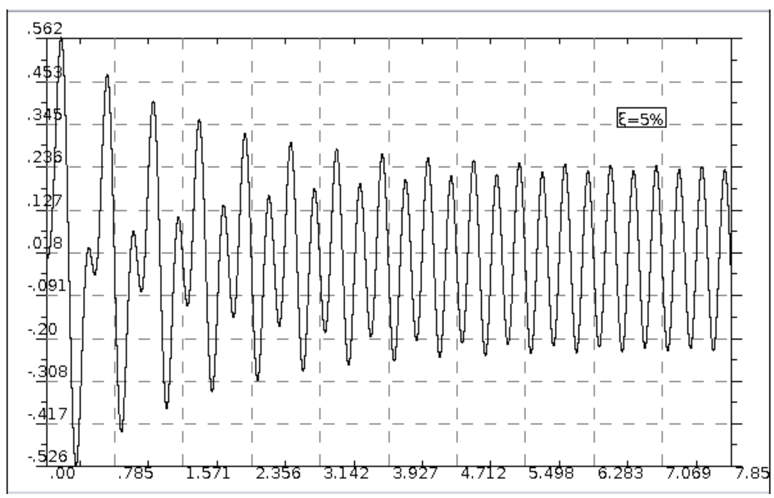
Ένα πολύ χρήσιμο μέγεθος (που εμφανίζεται στις σχέσεις της εξ. (12) του πίνακα 2 είναι ο συντελεστής δυναμικής μεγέθυνσης ή ενίσχυσης D, που εκφράζει το πόσες φορές είναι μεγαλύτερη (ή μικρότερη) η μέγιστη παραμένουσα αρμονική μετατόπιση από την αντίστοιχη στατική.

$$\mathrm{D} = \frac{\max(u)}{u_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{13}$$

Η τιμή του β για την οποία θα έχουμε το μέγιστο συντελεστή δυναμικής μεγέθυνσης για ξ=0 είναι β=1, και τότε έχουμε D(β, ξ)=D(1, 0)=∞. Πρόκειται δηλαδή για φαινόμενο συντονισμού, αφού β=1 $\rightarrow$ ω/ω_0=1 $\rightarrow$ ω=ω_0. Στην

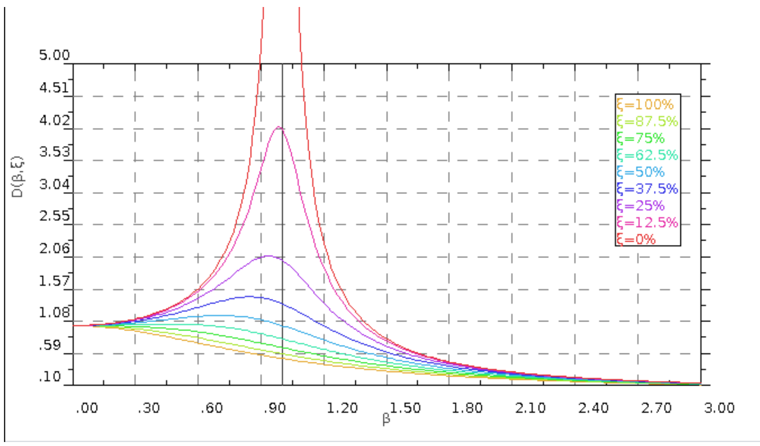


Σχήμα 6: Επιρροή αρχικής ταχύτητας στην ελεύθερη ταλάντωση.



Σχήμα 7: Απόκριση σε αρμονική διέγερση, η διαφοροποίηση της αρχικής μεταβατικής από αυτήν της ύστερης μόνιμης ταλάντωσης είναι εμφανής.

περίπτωση όπου $\xi \neq 0$ αποδεικνύεται πως ο μέγιστος συντελεστής δυναμικής μεγέθυνσης εμφανίζεται όταν $\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$ και είναι $D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$. Αν θέλουμε να μιλήσουμε για συχνότητα συντονισμού θα έχουμε $\omega_{res} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.



Σχήμα 8: Γραφική παράσταση της $\mathrm{D}(\beta,\xi)$ με το λόγο $\beta{=}\omega/\omega_0$ για διάφορες τιμές του συντελεστή κρίσιμης απόσβεσης ξ.

2.3.1 Προσδιορισμός του λόγου κρίσιμης απόσβεσης από το εύρος της περιοχής συντονισμού

Για τιμές του β στην γειτονιά του $\beta{=}\sqrt{1-2\xi^2}{\approx}1$ που αντιστοιχεί στο μέγιστο της $\mathrm{D}(\beta,\xi)$, παρουσιάζονται οι μεγαλύτερες τιμές του συντελεστή ενίσχυσης. Η περιοχή αυτή αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως περιοχή συντονισμού. Το εύρος της περιοχής συντονισμού καθορίζεται από τις τιμές β_1 και β_2 για τις οποίες ο συντελεστής ενίσχυσης πέφτει από την μέγιστη τιμή $\mathrm{D}_{\max}$ στην τιμή $\mathrm{D}_{\max}/\sqrt{2}$, όπως δείχνεται στην εικ. 9, όπου . Επομένως οι τιμές β_1 και β_2 προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης,

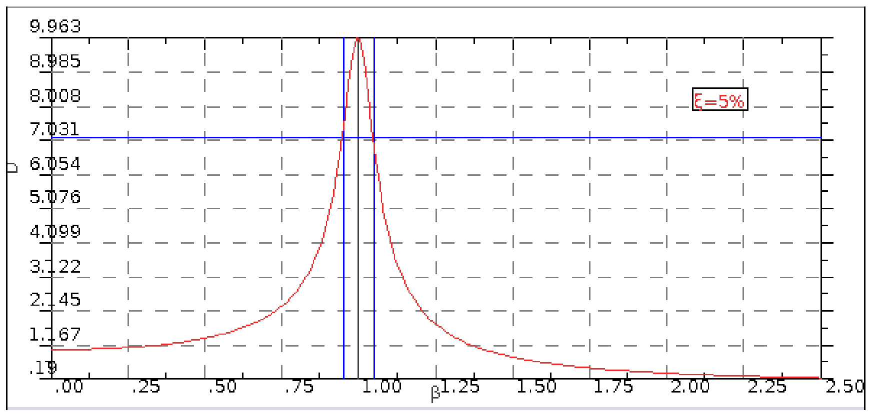
$$\mathrm{D}(\beta,\xi) = \mathrm{D}_{\max}/\sqrt{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi\sqrt{1-\xi^2}} \tag{14}$$

από την οποία προκύπτει μια αλγεβρική τετραγωνική εξίσωση οι λυσεις της οποιας για $\xi \ll 1$, ειναι

$$\beta_{1,2} = 1 \pm \xi \tag{15}$$

ενώ το εύρος της περιοχής συντονισμού είναι $\beta_2 - \beta_1 = 2\xi$. Επομένως το εύρος της περιοχής συντονισμού είναι ανάλογο του ξ. Αντικαθιστώντας το λόγο $\beta = \omega/\omega_0$ προκύπτει ότι $\omega_2 - \omega_1 = 2\omega_0$. Στην περίπτωση που είναι πειραματικά διαθέσιμο το φάσμα απόκρισης του ταλαντωτή σε αρμονική διέγερση (βλ. εικ. 8), οι τιμές β_1 και β_2 (ή αντίστοιχα ω_1 και ω_2) προκύπτουν από το φάσμα και επομένως η εξίσωση χρησιμοποιείται για να δώσει πειραματικά μια καλή εκτίμηση του συντελεστή απόσβεσης από τη σχέση

$$\xi = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0} \tag{16}$$



Σχήμα 9: Διάγραμμα ποιοτικής μεταβολής του $\mathrm{D}(\beta, \xi) =$ ως προς β με εύρος της περιοχής συντονισμού για $\xi = 0.05$. Η οριζόντια μπλε γραμμή διασχίζει την τιμή $\mathrm{D}_{\max}/\sqrt{2}$, ενώ οι κατακόρυφες μπλε τις τιμές $\beta_{1,2} = 1 \pm \xi$.

2.4 Γενική δυναμική φόρτιση (ολοκλήρωμα Duhamel)

Έστω δυναμικό μονοβάθμιο σύστημα υπό εξωτερική φόρτιση $f(t)$ και αρχικές συνθήκες μετατόπισης u_0 και ταχύτητας $\dot{u}_0$ στον χρόνο t_0=0. Η λύση σε αυτή τη περίπτωση δίνεται από το άθροισμα της ομογενούς λύσης (ελεύθερη ταλάντωση λόγω αρχικών συνθηκών) και της μη-ομογενούς (συμπεριλαμβάνοντας τον φορτιστικό όρο) απουσία αρχικών συνθηκών.

$$\begin{aligned} u(t) = &\left(u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) e^{-\xi \omega_0 t} \\ &+ \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega_d (t - \tau)) e^{-\xi \omega_0 (t-\tau)} \, d\tau \end{aligned} \tag{17}$$

Ο δεύτερος όρος στη σχέση της εξ. (17) είναι το ολοκλήρωμα του Duhamel, με τη βοήθεια του οποίου μπορεί να εκφραστεί η απόκριση για οποιαδήποτε εξωτερική δυναμική φόρτιση. Για την περίπτωση της αναπόσβεστης ταλάντωσης αρκεί στην εξ. (17) να αντικαταστήσουμε με ξ=0 και ω_d=ω_0 Το ολοκλήρωμα του Duhamel της εξ. (17) μπορεί να υπολογιστεί είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά.

Αξίζει επιπλέον να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα του Duhamel είναι η συνέλιξη της εξωτερικής φόρτισης με τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης κίνησης του γραμμικού μονοβάθμιου ταλαντωτή. Η θεμελιώδης λύση:

$$h(t-\tau) = \frac{e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}}{m\omega_d}\sin\left(\omega_d(t-\tau)\right) \tag{18}$$

είναι η λύση για εξωτερική διέγερση ένα ωστικό φορτίο της μορφής $\delta(t-\tau)/m$, με θεώρηση μηδενικών αρχικών συνθηκών, όπου η συνάρτηση δέλτα είναι η γνωστή γενικευμένη συνάρτηση δ-Dirac με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα φορτίο συγκεντρωμένο στη χρονική στιγμή τ. Για την περίπτωση της αναπόσβεστου συστήματος, κατά τη οποία ξ=0 η θεμελιώδης λύση (18) και η σχέση (17) εκφυλίζονται με απλή αντικατάσταση. Για την περίπτωση, του συστήματος κρίσιμης απόσβεσης, ξ=1, η θεμελιώδης λύση θα είναι,

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m}(t-\tau)e^{-\omega(t-\tau)} \tag{19}$$

ενώ για την υπερκρίσιμη, ξ>1,

$$h(t-\tau) = \frac{e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}}{m\omega\sqrt{\xi^2-1}}\sinh\left(\omega\sqrt{\xi^2-1}\,(t-\tau)\right) \tag{20}$$

για τι οποίες περιπτώσεις κανείς θα πρέπει κατάλληλα να μετατρέψει τη συμβολή της ελεύθερης ταλάντωσης λόγω των αρχικών συνθηκών στη σχέση της εξ. (17).

Είναι πολύ σημαντικό να γίνει εδώ κατανοητό ότι γνωρίζοντας την απόκριση του ταλαντωτή σε ωστική διέγερση (θεμελιώδης λύση) $h(t)$, τότε η απόκριση $u(t)$ σε οποιαδήποτε εξωτερική διέγερση $f(t)$, δίνεται από τη συνέλιξη:

$$u(t) = f(t) * h(t) + \text{Ε.Α.Σ.} \tag{21}$$

συνυπολογίζοντας την επιρροή των αρχικών συνθηκών (Ε.Α.Σ.). Η $h(t)$ αναφέρεται και ως συνάρτηση μεταφοράς στο πεδίο του χρόνου.

2.4.1 Αριθμητικός υπολογισμός ολοκληρώματος Duhamel

Είναι σημαντικό να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι ο υπολογισμός της απόκρισης σε γενικής μορφής διέγερση μέσω του ολοκληρώματος Duhamel ισχύει μόνο για τη περίπτωση γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων συστημάτων. Εντούτοις είναι ένας πολύ καλός τρόπος, στη περίπτωση γραμμικών συστημάτων, για να λαμβάνει κανείς την απόκριση ενός συστήματος, αξιοποιώντας της συνελικτική σχέση της εξ. (21) αφού η λύση αυτή είναι η ακριβής λύση σε ολοκληρωτική μορφή. Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, το ολοκλήρωμα του Duhamel της εξ. (17) μπορεί να υπολογιστεί είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά. Εδώ θα σταθούμε στον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος αναπαράγοντας[9], ύστερα από κατάλληλη μετατροπή στην παρουσίαση, ένα αλγόριθμο επίλυσης που βασίζεται σε αριθμητικό σχήμα ολοκλήρωσης με τον κανόνα του Simpson, για τον οποίο:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{x_2 - x_1}{6}\left(f(x_1) + 4f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f(x_2)\right). \tag{22}$$

Τα βήματα επίλυσης δίνονται στον πινάκα 3, όπου δίνεται έμφαση στη περίπτωση της υποκρίσιμης, και ως συνεπακόλουθο και αναπόσβεστης, ταλάντωσης. Με μικρές παραλλαγές μπορεί παρόμοια να αναπτυχθεί η μέθοδος για τις περιπτώσεις κρίσιμης και υπερκρίσιμης ταλάντωσης.

Η κλάση `sdof`

Εδώ γίνεται μια πρώτη αναφορά και μια συνοπτική παρουσίαση της οντότητας του πακέτου `courses.structuraldynamics` που αφορά το μονοβάθμιο γραμμικό ταλαντωτή και που πραγματώνεται μέσω της κλάσης `sdof`. Οι αναφορές που επισημαίνονται αφορούν τον Κώδικα [1]. Για να χρησιμοποιήσουμε τη κλάση `sdof` πρέπει πρώτα να εισαγάγουμε το πακέτο `courses.structuraldynamics` (βλ. γραμμή 1). Στη γραμμή 3 καθορίζεται ένα συναρτησιακό αντικείμενο που θα περιγράφει την εξωτερική διέγερση. Ο μονοβάθμιος γραμμικός ταλαντωτής ορίζεται στη γραμμή 5 με όρισμα πέντε μεταβλητές πραγματικών αριθμών `sdof(double k, double m, double c, double u0, double vo)`, οι οποίοι αφορούν τη δυσκαμψία, τη μάζα, την απόσβεση, την αρχική μετατόπιση και την αρχική ταχύτητα, αντίστοιχα. Στη γραμμή 6 εισάγεται και η φόρτιση στον ταλαντωτή ενώ στη γραμμή 7 ζητάμε την επίλυση μέσω της μεθόδου (συνάρτησης) `duhamel()`. Τέλος και αφού έχει γίνει η πιο πάνω εισαγωγή μεταβλητών και επίλυση, στη γραμμή 9 του κώδικα χρησιμοποιούμε τις μεθόδους `Disp()`, `Velc()` και `Accl()` της κλάσης `sdof` για να ανακτήσουμε αντίστοιχα τις χρονοϊστορίες της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

[9] Ι. Κατσικαδέλης, Δυναμική ανάλυση των κατασκευών - θεωρία και εφαρμογές, εκδ. Συμμετρία, 2012.

Πίνακας 3: Μέθοδος Simpson για τον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος Duhamel στη περίπτωση της υποκρίσιμης ταλάντωσης

Βήμα	**Διαδικασία**
Α. Δεδομένα	Εισαγωγή και καθορισμός μονοβάθμιου ταλαντωτή: k, m, c
Β. Αρχικοί υπολογισμοί	Υπολογισμοί δυναμικών χαρακτηριστικών: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ Αρχικοποίηση: $p_1 = f_0$, $g_1 = 0$, $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $t = \Delta t$
Γ. Επαναληπτικοί υπολογισμοί για κάθε βήμα $i = 1..N$	1. Υπολογισμός για j=2, 3 $\tau_j = t + (j-1)\Delta t/2$ $p_j = f(\tau_j)e^{\xi\omega_0\tau_j}\cos(\omega_d\tau_k)$ $g_j = f(\tau_j)e^{\xi\omega_0\tau_j}\sin(\omega_d\tau_k)$ 2. Υπολογισμός συντελεστών κανόνα Simpson $A_t = \frac{\Delta t}{6}(p_1 + 4p_2 + p_3) + A_{t-\Delta t}$ $B_t = \frac{\Delta t}{6}(g_1 + 4g_2 + g_3) + B_{t-\Delta t}$ 3. Υπολογισμός απόκρισης (ολοκλήρωμα Duhamel) $u(i\Delta t) = e^{\xi\omega_0 t}(A_t\sin(\omega_d t) - B_t\cos(\omega_d t))/(m\omega_d)$ $\dot{u}(i\Delta t) = e^{\xi\omega_0 t}(A_t\cos(\omega_d t) + B_t\sin(\omega_d t))/m - \xi\omega_0 u(i\Delta t)$ $\ddot{u}(i\Delta t) = -2\xi\omega_0\dot{u}(i\Delta t) - \omega_0^2 u(i\Delta t) + f(i\Delta t)/m$

Κώδικας 1: Σύντομη παρουσίαση του αντικείμενου του μονοβάθμιου ταλαντωτή `sdof`

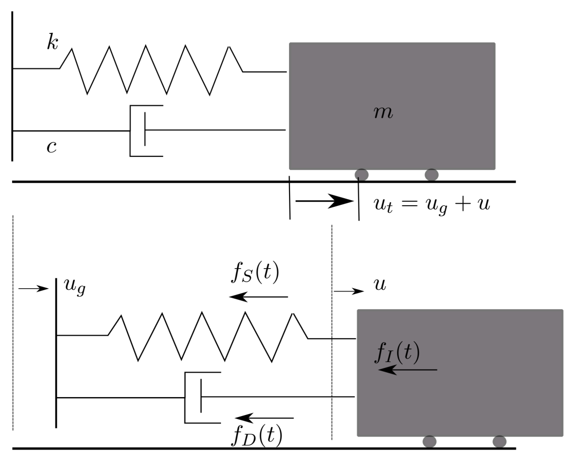
```
import courses.structuraldynamics.*

f={sin(it*sqrt(100.0)*0.8)}

theSDOF=new sdof(100.0, 1.0, 0.1, 0.0, 0.0)
theSDOF.setRHS(f as DoubleFunction)
theSDOF.duhamel()

u=theSDOF.Disp(); v=theSDOF.Velc(); a=theSDOF.Accl()
```

2.5 Απόκριση σε κρουστική διέγερση πλήγματος

Τα πλήγματα είναι φορτίσεις 'μικρής' χρονικής διάρκειας σε σύγκριση με την ιδιοπερίοδο του ταλαντωτή. Λόγω της μικρής τους διάρκειας η μέγιστη τιμή απόκρισης του ταλαντωτή εμφανίζεται πολύ γρήγορα, πριν προλάβουν να αναπτυχθούν οι μηχανισμοί απόσβεσης, με συνέπεια στη μελέτη τους να αγνοούμε την ύπαρξη απόσβεσης. Για την ανάλυση των πληγμάτων εξετάζουμε την απόκριση σε δυο φάσεις. Η πρώτη διαρκεί όσο και το πλήγμα και τότε η απόκριση του ταλαντωτή μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά μέσω του ολοκληρώματος Duhamel (συνήθως υποθέτουμε αρχική ηρεμία). Η δεύτερη φάση ξεκινάει τη χρονική στιγμή που τελειώνει η φόρτιση του πλήγματος, και από εκείνη τη στιγμή και μετά η απόκριση του ταλαντωτή αποτελεί ελεύθερη ταλάντωση υπό αρχικές συνθήκες. Οι αρχικές συνθήκες για τη έναρξη της δεύτερης φάσης υπολογίζονται από τη μετακίνηση και τη ταχύτητα της πρώτης φάσης, για χρόνο $t = t_\delta$, το χρόνο δηλαδή που διαρκεί η πρώτη φάση. Πολύ χρήσιμο μέγεθος και στην περίπτωση των πληγμάτων είναι ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathrm{D} = u_{max}/u_{st}$ όπου u_{st} είναι η στατική μετατόπιση του συστήματος αν αυτό φορτιζόταν με τη μέγιστη τιμή φορτίου f_0 του αντίστοιχου πλήγματος, οπότε $u_{st} = f_0/k$.

2.6 Διέγερση της στήριξης

Ας υποθέσουμε πως στο σώμα δεν ασκείται κάποια εξωτερική δύναμη, αλλά για κάποιο λόγο (π.χ. σεισμός) έχουμε μια διαταραχή της στήριξης του συστήματος (εικόνα 10) Η φύση των δυνάμεων που ασκούνται και σ' αυτήν την περίπτωση δεν αλλάζει, όμως αυτό που διαφέρει τώρα είναι η απουσία της εξωτερικής δύναμης αλλά και το γεγονός ότι η ολική μετατόπιση του σώματος δε συμπίπτει με την επιμήκυνση του ελατηρίου, η οποία ισούται με τη σχετική μετατόπιση του σώματος ως προς τη στήριξη του. Επιπλέον, η ταχύτητα σύμφωνα με την



Σχήμα 10: Διέγερση στήριξης μονοβάθμιου δυναμικού συστήματος.

οποία θα υπολογίσουμε τη δύναμη απόσβεσης είναι η σχετική ταχύτητα του σώματος ως προς την ταχύτητα της στήριξης του. Όπως φαίνεται και από την εικόνα 10) η ολική μετατόπιση του σώματος u_t θα είναι το διανυσματικό άθροισμα της μετακίνησης του εδάφους u_g και της σχετικής μετατόπισης του ελατηρίου-αποσβεστήρα u, δηλαδή θα ισχύει η σχέση:

$$u_t(t) = u_g(t) + u(t) \tag{23}$$

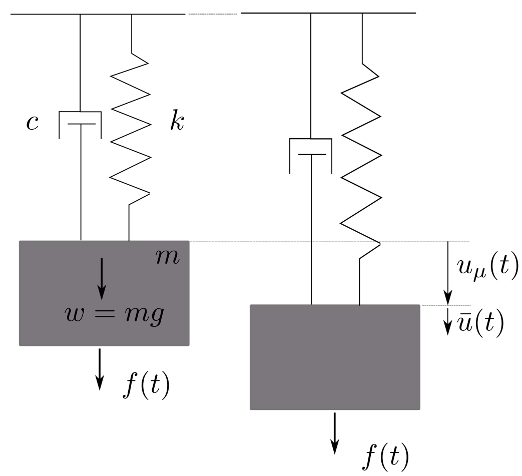
και οι χρονικές παράγωγοι αυτής. Η αδρανειακή δύναμη θα είναι το γινόμενο της ολικής επιτάχυνσης επί τη μάζα του συστήματος, ενώ όσον αφορά τις δυνάμεις του ελατηρίου και της ιξώδους απόσβεσης, αυτές θα εξαρτώνται από τη σχετική μετατόπιση και ταχύτητα αντίστοιχα. Έτσι, η εξίσωση ισορροπίας θα είναι:

$$\begin{aligned}
&f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = 0 \rightarrow \\
&m\ddot{u}_t(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \rightarrow \\
&m(\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \rightarrow \\
&m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \qquad (24)
\end{aligned}$$

Στην τελευταία σχέση, βλέπουμε πως η ισοδύναμη «εξωτερική» φόρτιση είναι $f(t) = -m\ddot{u}_g(t)$, ενώ δεν πρέπει να ξεχνάμε πως όπου $u, \dot{u}$ και $\ddot{u}$, πρόκειται για τις σχετικές και όχι ολικές μετατοπίσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις.

2.7 Επίδραση φορτίων βαρύτητας

Η προσέγγιση που γίνεται σε αυτή τη περίπτωση είναι η σε πρώτη φάση «σταθεροποίηση» του σώματος σε μια (παραμορφωμένη) θέση ισορροπίας όπου η μετατόπιση θα είναι u_μ (βλ. εικ. (11) και σε δεύτερη φάση η ταλάντωση γύρω από αυτή τη θέση ισορροπίας $\bar{u}(t)$ λόγω της δράσης της εξωτερικής δύναμης $f(t)$. Η μετακίνηση $u(t)$ απο τη θέση όπου το ελατήριο δεν έχει υποστεί καμιά επιμήκυνση είναι το άθροισμα $u(t) = u_\mu + \bar{u}(t)$, ενώ η εξίσωση κίνησης του συστήματος:



Σχήμα 11: Συνυπολογισμός μόνιμων φορτίων βαρύτητας.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) + w \tag{25}$$

Η επιμήκυνση του ελατηρίου λόγω του βάρους θα είναι $u_\mu = w/k$, ενώ η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της u ως προς το χρόνο θα είναι $\dot{u} = \dot{\bar{u}}$ και $\ddot{u} = \ddot{\bar{u}}$ αντίστοιχα. Με αντικατάσταση στην εξ. (25), έχουμε:

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{u}}(t) + c\dot{\bar{u}}(t) + k\bar{u}(t) + ku_\mu &= f(t) + w \rightarrow \\ m\ddot{\bar{u}}(t) + c\dot{\bar{u}}(t) + k\bar{u}(t) &= f(t) \end{aligned} \tag{26}$$

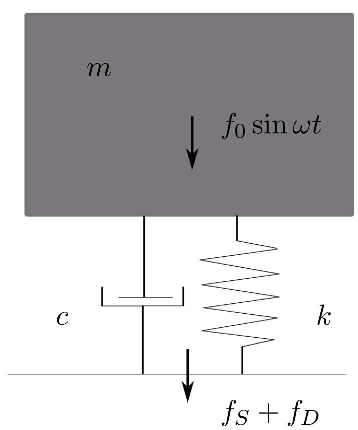
και συμπερασματικά μπορεί να ειπωθεί ότι στη δυναμική απόκριση ενός συστήματος τα μόνιμα φορτία της βαρύτητας μπορούν να αγνοηθούν αρκεί τα η δυναμική παραμόρφωση να μετριέται σε σχέση με το παραμορφωμένο σχήμα λόγω των μόνιμων φορτίων. Τα συνολικά μεγέθη απόκρισης θα δίνονται απο την υπέρθεση των δύο πεδίων, αυτό της παραμόρφωσης λόγω μόνιμων φορτίων με αυτό της δυναμικής απόκρισης.

2.8 Μόνωση ταλαντώσεων

Το πρόβλημα της μόνωσης των ταλαντώσεων εμφανίζεται σε κυρίως δύο εκδοχές, (α) σε αυτή της ελαχιστοποίησης των δυνάμεων δόνησης που μεταφέρονται από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον μέσο (στηρίξεις, έδαφος, άλλο φέρον σύστημα), (β) σε αυτή της ελαχιστοποίησης των κινηματικών δονήσεων που μεταφέρονται από το περιβάλλον μέσο στο σύστημα. Ένας κατάλληλος τρόπος προσέγγισης είναι αυτός της θεώρησης αρμονικής μόνιμης κατάστασης.

2.8.1 Μεταβίβαση δύναμης προς το περιβάλλον

Η θεώρηση της αρμονικά επιβαλλόμενης δύναμης πέρα από ρεαλιστική, καθώς εμφανίζεται πολύ συχνά σε προβλήματα μηχανικών συστημάτων, είναι και κατάλληλη για εμβάθυνση αφού μας δίνει τη δυνατότητα να εξάγουμε συμπεράσματα για τη λειτουργία του συστήματος σε πλήθος άλλων μορφών φορτίσεων (βλ. 2.10). Η κίνηση μόνιμης ταλάντωσης του μονοβάθμιου συστήματος κάτω από τη δράση της εξωτερικής αρμονικής δύναμης $f(t) = f_0 \sin \omega t$ δίνεται από την εξ.(12) του πιν. 2. Όπως είναι εμφανές και από το σχήμα στην εικ. 12, η



Σχήμα 12: Μεταβίβαση δύναμης (π.χ., αρμονικής) προς το περιβάλλον

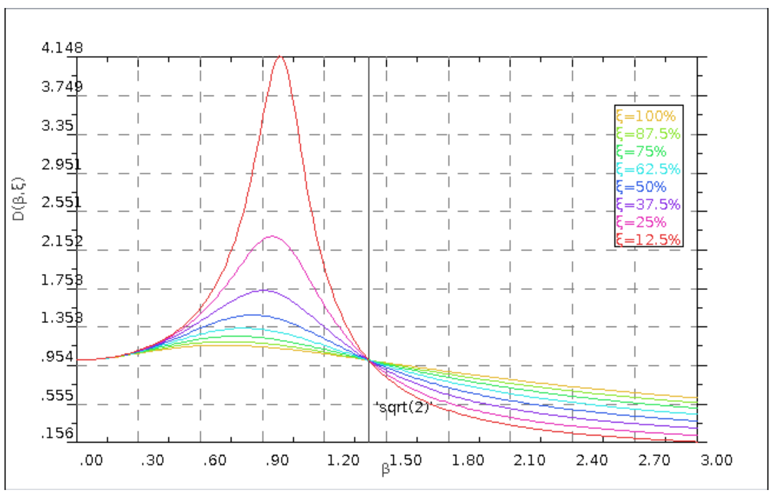
δύναμη που μεταβιβάζεται στο περιβάλλον μέσο στήριξης (αντίδραση) θα είναι ίση με το άθροισμα των δυνάμεων του ελατηρίου και του αποσβεστήρα,

$$\begin{aligned} f(t) &= f_S(t) + f_D(t) \\ &= ku(t) + c\dot{u}(t) \\ &= f_T \sin(\omega t - \theta - \phi) \end{aligned} \tag{27}$$

όπου, $\phi = tan^{-1}(2\xi\beta)$ και

$$f_T = f_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{28}$$

Το μέγεθος $\mathrm{D}_f(\beta, \xi) = f_T/f_0$ είναι ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης από τη μεταβίβαση της δύναμης. Στο σχήμα της εικ. 13 μπορούμε να διακρίνουμε ότι μείωση της μεταβιβαζόμενης δύναμης έχουμε για $\beta > \sqrt{2}$. Σε αυτή τη περιοχή όσο πιο μικρή τιμή του ξ τόσο μικρή και η τιμή του D_f που συνεπάγεται και μικρή τιμή μεταβιβαζόμενης δύναμης. Στην περιοχή συντονισμού επιτυγχάνεται η διατήρηση σχετικά μικρών τιμών του συντελεστή D_f για μεγάλες τιμές του ξ.



Σχήμα 13: Γραφική παράσταση της $\mathrm{D}_f(\beta, \xi)$ με το λόγο β=ω/ω_0 για διάφορες τιμές του συντελεστή κρίσιμης απόσβεσης ξ.

2.8.2 Επιβολή κίνησης από το περιβάλλον

Ουσιαστικά πρόκειται για την ίδια περίπτωση που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 2.6 και εκφράζεται από την εξ. 24. Εδώ για να διαμορφώσουμε μια πιο εποπτική εικόνα θεωρούμε την διέγερση της στήριξης (καταναγκασμός) ως μια αρμονική συνάρτηση, $u_g(t) = u_0 \sin \omega t$. Αποδεικνύεται πως ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης $\mathrm{D}_u(\beta, \xi)$ για τη μεταβίβαση της κίνησης είναι ίδιος με αυτόν της προηγούμενης παραγράφου $\mathrm{D}_f(\beta, \xi)$.

$$\mathrm{D}_u(\beta, \xi) = \frac{(\ddot{u}_t)_{max}}{(\ddot{u}_g)_{max}} = \frac{(u_t)_{max}}{(u_g)_{max}} = \mathrm{D}_f(\beta, \xi) \tag{29}$$

2.9 Μηχανική ενέργεια

Η μηχανική ενέργεια $\mathcal{E}(t)$ του μονοβ·αθμιου συστήματος ειναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας $\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} m\dot{u}^2$ και της δυναμικής ενέργειας $\mathcal{V}(t) = \frac{1}{2} mu^2$,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{V}(t) = \frac{1}{2} m\dot{u}^2 + \frac{1}{2} mu^2 \tag{30}$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση κίνησης (1) στο χρόνο, αφού την πολλαπλασιάσουμε με τη ταχύτητα $\dot{u}$,

$$\int_0^t (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku)\, \dot{u}\, dt = \int_0^t f\dot{u}\, dt \tag{31}$$

μπορεί να προκύπτει η σχέση,

$$\int_0^t (m\ddot{u} + ku)\, \dot{u}\, dt = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0) = \int_0^t (f - c\dot{u})\, \dot{u}\, dt \tag{32}$$

η οποία σχέση δηλώνει πως η αλλαγή στη μηχανική ενέργεια στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ ισούται με το έργο της εξωτερικής φόρτισης $f(t)$ μείον αυτό της δύναμης απόσβεσης $c\dot{u}(t)$. Η χρονική παράγωγος της εξ. (32) είναι ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας (δηλαδή η ισχύς),

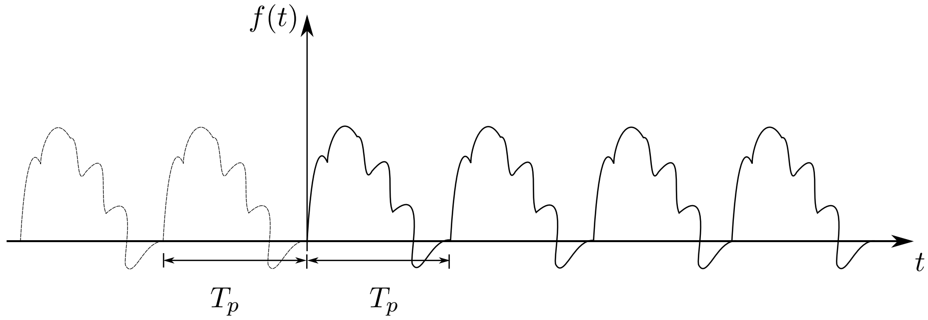
$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = (m\ddot{u} + ku)\, \dot{u} = -c\dot{u}^2 + f\dot{u}. \tag{33}$$

2.10 Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας

2.10.1 Ανάλυση περιοδικής συνάρτησης σε τριγωνομετρική σειρά Fourier

Μια περιοδική συνάρτηση $f(t)$ μπορει να παρασταθεί με την τριγωνομετρική σειρά άπειρων όρων

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_p t + b_n \sin n\omega_p t) \tag{34}$$



Σχήμα 14: Περιοδική συνάρτηση $f(t)$ που εκτείνεται από το $-\infty$ στο ∞ με περίοδο T_p.

όπου a_n, b_n προσδιοριστέες σταθερές και $\omega_p = T_p/2\pi$ η κυκλική συχνότητα της συνάρτησης $f(t)$. Με αξιοποίηση της ιδιότητας της ορθογωνικότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές a_0, a_n και b_n ως

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int\limits_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)\, dt \tag{35α′}$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int\limits_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t) \cos n\omega_p t\, dt \tag{35β′}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int\limits_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t) \sin n\omega_p t\, dt \tag{35γ′}$$

Η σειρά (34) προσεγγίζει τη συνάρτηση $f(t)$ καθώς το $n \to \infty$, όταν η περιοδική συνάρτηση πληροί τις προϋποθέσεις γνωστές ως συνθήκες Dirichlet.

(α) Το πλήθος των σημείων ασυνέχειας της $f(t)$ μέσα σε μια περίοδο είναι πεπερασμένο.

(β) Το πλήθος των ακρότατων μέσα σε μια περίοδο είναι πεπερασμένο.

(γ) Η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη μέσα σε μια περίοδο, δηλαδή

$$\int_{-T_p/2}^{T_p/2} |f(t)|\, dt = k < \infty.$$

Η συνάρτηση που πληροί τις συνθήκες (α) και (β) ονομάζεται τμηματικά συνεχής. Σε κάποιο σημείο ασυνέχειας, έστω το t_d η σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή

$$\frac{1}{2}\left(f(t_d^-) + f(t_d^+)\right)$$

Στα σημεία ασυνέχεια η προσέγγιση με τη σειρά Fourier ακόμα και για μεγάλο πλήθος όρων παρουσιάζει ένα σφάλμα το οποίο περιγράφεται και ως φαινόμενο Gibbs.

2.10.2 Μόνιμη απόκριση σε περιοδική διέγερση

Υποθέτουμε ότι η περιοδική διέγερση επιβάλλεται αρκετό χρόνο ώστε η παροδική ταλάντωση να έχει αποσβεστεί, οπότε και ενδιαφερόμαστε για τη μόνιμη απόκριση του συστήματος. Η μόνιμη απόκριση σε περιοδική διέγερση προέρχεται από τρία διαφορετικά είδη φόρτισης, σε αντιστοιχία με τους όρους της εξ. (34). Η μόνιμη απόκριση για το σταθερό όρο a_0 θα είναι η στατική απόκριση,

$$u_{a_0}(t) = \frac{a_0}{k}. \tag{36}$$

Για αρμονική φόρτιση ημίτονου η μόνιμη απόκριση δίνεται από την εξ. (12), που επαναλαμβάνουμε εδώ στην πιο κάτω μορφή,

$$u_{b_n}(t) = \frac{b_n}{k}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\left((1-\beta_n^2)\sin(n\omega_p t) - 2\xi\beta_n\cos(n\omega_p t)\right), \tag{37}$$

όπου $\beta_n = \frac{n\omega_p}{\omega_0}$. Αντίστοιχα, για την αρμονική διέγερση συνημιτόνου η μόνιμη απόκριση είναι,

$$u_{a_n}(t) = \frac{a_n}{k}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\left(2\xi\beta_n\sin(n\omega_p t) + (1-\beta_n^2)\cos(n\omega_p t)\right). \tag{38}$$

Η απόκριση του μονοβάθμιου ταλαντωτή στη περιοδική διέγερση της σχέσης στην εξ. (34) θα δίνεται από τη σύνθεση των επιμέρους αποκρίσεων, που μετά από κάποιες απλοποιήσεις μπορεί να γραφτεί ως,

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2} \Big(\big(a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2) \big) \sin(n\omega_p t) \\ & + \big(a_n(1-\beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n \big) \cos(n\omega_p t) \Big) \end{aligned} \tag{39}$$

2.10.3 Μιγαδική μορφή σειράς Fourier και απόκριση

Χρήσιμες ταυτότητες για τη περαιτέρω διερεύνηση αποτελούν οι σχέσεις του Euler που επιτρέπουν την μεταφορά από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε εκθετική μορφή,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \tag{40α′}$$

$$\sin\theta = -\frac{i}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \tag{40β′}$$

και το αντίστροφο ζεύγος εξισώσεων,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{41α′}$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{41β′}$$

Η σειρά Fourier που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο και που εκφράζεται από την εξ. (34), μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Euler της εξ. (40) ως,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_p t} \tag{42}$$

όπου οι συντελεστές δίνονται ως

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t) e^{-in\omega_p t}\, dt \tag{43α′}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t) e^{in\omega_p t}\, dt \tag{43β′}$$

$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t)\, dt = a_0. \tag{43γ′}$$

Να σημειωθεί εδώ πως η απάντηση στο εύλογο ερώτημα του πως γίνεται μια πραγματική συνάρτηση $f(t)$ να δίνεται ως ένα άπειρο άθροισμα μιγαδικών όρων της εξ.(42), έγκειται στο γεγονός ότι σε κάθε όρο $c_n e^{in\omega_p t}$,στο δεξιά μέλος της εξ. (42), αντιστοιχεί ένας όρος $c_{-n} e^{-in\omega_p t}$, των οποίων το άθροισμα δίνει μια πραγματική συνάρτηση.

Στο σημείο αυτό παρουσιάζουμε τη μόνιμη απόκριση του μονοβάθμιου ταλαντωτή σε μια περιοδική φόρτιση της εκθετικής μιγαδικής μορφής της εξ. (42),

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_0 e^{i\omega t} \tag{44}$$

θεωρώντας μια λύση της μορφής $Ce^{i\omega t}$ καταλήγουμε στη συνάρτηση,

$$u(t) = H(\omega) f_0 e^{i\omega t} \tag{45}$$

με $H(\omega)$ τη *μιγαδική συνάρτηση συχνότητας*,

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} = \frac{1}{k(1-\beta^2+2i\xi\beta)}. \tag{46}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε f_0=c_n της εξ. (43α′) και ω=$n\omega_p$, βάση της αρχής της επαλληλίας μπορούμε να γράψουμε τη συνολική μόνιμη απόκριση στο φορτίο της εξ. (42),

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(\omega_p) e^{in\omega_p t}. \tag{47}$$

2.10.4 Ολοκλήρωμα Fourier μη περιοδικής διέγερσης και απόκριση

Από το ανάπτυγμα της εξ. (42) και χρησιμοποιώντας τη σχέση της εξ. (43α′) για τους συντελεστές c_n καθώς και για $\frac{1}{T_p} = \frac{\omega_p}{2\pi}$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T_p/2}^{T_p/2} f(t) e^{-in\omega_p t}\, dt \right) e^{in\omega_p t} \omega_p \tag{48}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να γράψουμε και το ολοκλήρωμα Fourier μιας μη περιοδικής συνάρτησης. Για τη μη περιοδική συνάρτηση $f(t)$ θεωρείται ότι $T_p \to \infty$ και $\omega_p \to d\omega$ απειροστό, ενώ θέτουμε το γινόμενο $n\omega_p$ ως ω. Η πιο πάνω σχέση της εξ. (48) από άπειρο άθροισμα όρων στο ω_p παίρνει τη μορφή ολοκληρώματος στο $d\omega$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \tag{49}$$

και

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{50}$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις καθορίζουν το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον *(ευθύ) μετασχηματισμό Fourier*, $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ της συνάρτησης $f(t)$ της εξ. (50), ενώ η συνάρτηση $f(t)$ που υπολογίζεται απο την εξ. (49) ονομάζεται *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier* της $F(\omega)$ ενώ συμβολίζεται και ως $\mathcal{F}^{-1}[f(\omega)] = f(t)$.

Μια ιδιότητα που καθιστά τον μετασχηματισμό Fourier χρήσιμο εργαλείο στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι αυτή του μετασχηματισμού των παραγώγων,

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dt^n}(t)\right] = (i\omega)^n F(\omega). \tag{51}$$

Για να υπολογίσουμε την απόκριση του συστήματος κάτω από τυχαία διέγερση με χρήση του μετασχηματισμού (η ολοκληρώματος) Fourier, δηλαδή για να θέσουμε και να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα στο πεδίο της συχνότητας, μπορούμε να ξεκινήσουμε από την εξίσωση κίνησης στο πεδίο του χρόνου. Πολλαπλασιάζοντας την εξ. (1) με $e^{-i\omega t}$ και ολοκληρώνοντας στον χρόνο από $-\infty$ έως ∞, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned}
&m\mathcal{F}\left[\frac{d^2 u}{dt^2}(t)\right] + c\mathcal{F}\left[\frac{du}{dt}(t)\right] + k\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \rightarrow \\
&m(i\omega)^2 U(\omega) + ic\omega U(\omega) + kU(\omega) = F(\omega) \rightarrow \\
&(-m\omega^2 + ic\omega + k)U(\omega) = F(\omega) \rightarrow \\
&U(\omega) = F(\omega)\frac{1}{(k - m\omega^2 + ic\omega)}
\end{aligned}$$

καταλήγουμε δηλαδή στην αντίστοιχη της συνελικτικής εξίσωσης (21) στο πεδίο του χρόνου

$$U(\omega) = F(\omega)H(\omega) \tag{52}$$

η οποία όμως στο πεδίο της συχνότητας δίνεται από απλό γινόμενο συναρτήσεων. Η συνάρτηση $H(\omega)$ ονομάζεται και *συνάρτηση μεταφοράς*, αφού μεταφέρει το σήμα της διέγερσης σε απόκριση, είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης κρουστικής απόκρισης $h(t)$, ενώ μπορεί να γραφτεί και ως,

$$H(\omega) = \frac{1}{k\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \tag{53}$$

Στον Κώδικα [2] υπολογίζεται η μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού μονοβάθμιου ταλαντωτή και δημιουργείται το διάγραμμα του μέτρου της σε ένα εύρος του ω.

Κώδικας 2: Συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$, πραγματικό μέρος μιγαδικής.

```
k=100; m=1; c=3.5
om0=sqrt(k/m)
UnitReal=new Complex(1.0, 0.0)

H={
  C=new Complex(k-m*(it*om0)**2, c*(it*om0))
  return ((UnitReal/C).abs())
}
thePlot.clear()
thePlot.addFunction(new plotfunction(linspace(0.0, 201, 0.01),H as DoubleFunction))
thePlot.show()
```

Έχοντας λοιπόν τη συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ αν γνωρίζουμε ή αν μπορούμε να υπολογίσουμε (εξ.(50)) τη διέγερση στο πεδίο της συχνότητας μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την απόκριση, και αυτή στο πεδίο της συχνότητας, και να ανακατασκευάσουμε τη λύση στο πεδίο του χρόνου με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier από την εξ.(49)),

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega. \end{aligned} \tag{54}$$

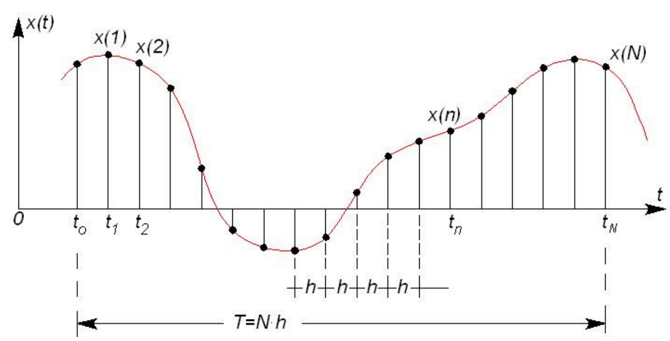
Παρόλα αυτά οι υπολογισμοί των μετασχηματισμών Fourier τις περισσότερες φορές δεν είναι μια απλή αναλυτική διαδικασία. Ο υπολογισμοί αυτοί μπορούν όμως εύκολα να γίνουν αριθμητικά χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του ταχέως μετασχηματισμού FFT (Fast Fourier Transform). Για να αξιοποιηθούν οι αλγόριθμοι αυτοί θα πρέπει να περάσουμε από το συνεχές σήμα στο χρόνο στο ψηφιοποιημένο ανάλογο σε διακριτά χρονικά σημεία.

Προκειμένου να μετατραπεί ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ σε ψηφιακό $f(n)$, πρέπει να αφαιρεθεί η συντριπτική πλειονότητα τιμών στα σημεία του χρόνου. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται δειγματοληψία και τα ολιγάριθμα χρονικά σημεία που απομένουν θα πρέπει να αποδίδουν με επαρκή ακρίβεια το φυσικό φαινόμενο. Εάν θεωρήσουμε το τυχαίο αναλογικό σήμα $x(t)$ του Σχήματος (15), πρέπει πρώτα να επιλέξουμε τον αριθμό των N χρονικών διαστημάτων ίσου μήκους h. Θεωρώντας ότι ο αξιόπιστος χρόνος καταγραφής (record time length) είναι T_{tot}, με έναρξη μέτρησης του χρόνου τη χρονική στιγμή t_0, προκύπτει ότι T_{tot}=Nh. Σημειώνεται ότι παρά το γεγονός πως τα τυχαία σήματα δεν έχουν περιοδικότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε πως έχουν περίοδο ίση με το συνολικό χρόνο καταγραφής τους T=T_{tot}. Η παραδοχή αυτή οδηγεί στην ελάχιστη δυνατή συχνότητα κύκλων επανάληψης του ψηφιακού σήματος ως $f_{min} = 1/T_{tot}$. Η επιλογή του h καθορίζει και τις, μέγιστη δυνατή συχνότητα f_{max} και ελάχιστη περίοδο T_{min}, που μπορούν να ανιχνευτούν στο ψηφιακό σήμα, αναφερόμαστε δηλαδή στη συχνότητα Nyquist που ορίζεται ως,

$$f_{max} = \frac{1}{T_{min}} = \frac{1}{2h}. \tag{55}$$

Ο αλγόριθμος FFT στο SDE

Στην Climax έχει επιλεγεί, για τις ανάγκες της εφαρμογής του αριθμητικού διακριτού μετασχηματισμού Fourier, η χρήση της FFT της βιβλιοθήκης Apache Commons Mathematics. Σε αντίστοιχη ενότητα δίνονται παραδείγματα, μαζί με τον συνοδευτικό κώδικα, που βοηθούν στην εξοικείωση της χρήσης των σχετικών εργαλείων στο περιβάλλον SDE.



Σχήμα 15: Ψηφιοποίηση αναλογικού σήματος

2.11 Αριθμητική επίλυση της εξισωσης κίνησης

Είδαμε σε προηγούμενη ενότητα πως μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή σε τυχαία διέγερση αν υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα του Duhamel. Η μέθοδος αυτή έχει δύο πολυ βασικούς περιορισμούς, ο πρώτος είναι ότι είναι πολύ δύσκολη η επέκταση στη περίπτωση συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας (πολυβάθμιος ταλαντωτής) και ο δεύτερος έγκειται στην αδυναμία εφαρμογής της στη περίπτωση μη γραμμικού συστήματος. Για την αντιμετώπιση του συνόλου των προβλημάτων αυτών έ-χουν αναπτυχθεί εξειδικευμένες μέθοδοι τις οποίες θα καλούμε και ως μεθοδους χρονικής ολοκλήρωσης.

Η διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης κίνησης (εξ. 1) με χρονική ολοκλήρωση βασίζεται στις εξής δυο βασικές παραδοχές:

- ικανοποίηση της εξ. (1), ή της αντίστοιχης μητρωικής μορφής στην περίπτωση των πολυβάθμιων συστημάτων, σε διακριτά χρονικά σημεία $t_n = n\Delta t$
- προκαθορισμός της χρονικής μεταβολής των αγνώστων μεταβλητών και του φορτιστικού όρου εντός του χρονικού βήματος Δt.

Εφαρμόζοντας τις δύο αυτές παραδοχές, οποιαδήποτε χρονική συνάρτηση $g(t)$ αντικαθίσταται από ακολουθίες g_n=$g(t_n)$, ενώ η διαφορική εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή εξίσωσης διαφορών.

Θα μπορούσαμε να πούμε πως δύο μεγάλες κατηγοριοποιήσεις υπάρχουν για τις μεθόδους αυτές. Η πρώτη αναφέρεται στη μορφή της διαφορικής εξίσωσης που αυτές επιλύουν, και χωρίζονται σε μεθόδους επίλυσης των *εξισώσεων δεύτερης τάξης* και σε αυτές της επίλυσης διαφορικών *εξισώσεων πρώτης τάξης*. Η δεύτερη κατηγοριοποίηση αφορά την αλγοριθμική μόρφωση ενός σχήματος ολοκλήρωσης που μπορεί να είναι *ρητή* (explicit) ή *πεπλεγμένη* (implicit). Στη ρητή μορφή η επίλυση για το τρέχον καινούργιο χρονικό βήμα εξαρτάται από παραμέτρους αποκλειστικά προηγούμενων χρονικών βημάτων ενώ στη πεπλεγμένη όχι.

Κρίσιμα χαρακτηριστικά για την αξιοπιστία και απόδοση ενός αλγόριθμου χρονικής ολοκλήρωσης είναι (i) η αριθμητική ευστάθεια και (ii) η ακρίβεια του. Η αριθμητική ευστάθεια είναι επιβεβλημένη προκειμένου να εξασφαλίζεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων του αλγόριθμου. Αν η απαίτηση της αριθμητικής ευστάθειας εισάγει περιορισμούς στο μέγεθος της χρονικής παραμέτρου διακριτοποίησης Δt (χρονικό βήμα), τότε ο αλγόριθμος χαρακτηρίζεται ως υπό συνθήκη ευσταθής (conditionally stable). Σε αντίθετη περίπτωση, χαρακτηρίζεται ως άνευ συνθήκης ευσταθής (unconditionally stable).

2.11.1 Αριθμητική ολοκλήρωση εξισώσεων δεύτερης τάξης

Παρακάτω παρουσιάζουμε συνοπτικά και σε μορφή πινάκων δύο εξαιρετικά διαδεδομένες αλλά και χαρακτηριστικές μέθοδοι χρονικής ολοκλήρωσης για τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης δεύτερης τάξης, μονοβάθμιων και πολυβάθμιων ταλαντωτών. Επισημαίνουμε πως στη περίπτωση των πολυβάθμιων συστημάτων θα έχουμε αντί βαθμωτών μεγεθών, μητρώα (π.χ. δυσκαμψία k, μάζα m, απόσβεση c) και διανύσματα (π.χ. μετακίνηση u, ταχύτητα v, επιτάχυνση a και εξωτερική διέγερση f).

Μέθοδος κεντρικής διαφοράς

Η μέθοδος της κεντρικής διαφοράς μπορεί να προκύψει με αξιοποίηση της προσέγγισης των χρονικών παραγώγων της απόκρισης με τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών, για τη μεν ταχύτητα,

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(t+\Delta t) - u(t-\Delta t)}{2\Delta t} \rightarrow \dot{u}_n = v_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t},$$

ενώ για τη δε επιτάχυνση,

$$\ddot{u}(t) \approx \frac{u(t+\Delta t) - 2u(t) + u(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \rightarrow \ddot{u}_n = \dot{v}_n = a_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta t^2}.$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην εξίσωση κίνησης μπορούμε να διαμορφώσουμε τη μέθοδο της κεντρικής διαφοράς για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης. Εδώ δίνουμε στη μορφή του Πινάκα 4 τα βήματα για την υλοποίηση της μεθόδου σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η μέθοδος αυτή είναι υπό συνθήκες ευσταθής, με την αντίστοιχη συνθήκη να είναι,

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_0\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} = \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{\omega_0} \tag{56}$$

εντούτοις η μέθοδος χρησιμοποιείται πολύ σε προβλήματα που εμπλέκουν υψηλές συχνότητες (π.χ. διάδοση κύματος) καθώς σε αυτές τις περιπτώσεις το βήμα χρονικής ολοκλήρωσης Δt απαιτείται, για λόγους ακρίβειας, να είναι πολύ μικρό. Επιπλέον, αν η μέθοδος συνδυάζεται με ένα σύστημα το οποίο μπορεί να περιγραφεί κατάλληλα και αξιόπιστα από ένα διαγώνιο μητρώο μάζας (βλ. ενότητα πολυβάθμιων συστημάτων) μπορεί να δώσει πολυ αποδοτικές υπολογιστικά διαδικασίες επίλυσης.

Οικογένεια μεθόδων β-Newmark

Πρόκειται για μια από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους επίλυσης προβλημάτων της δυναμικής των κατασκευών με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αυτό οφείλεται στην ευκολία προγραμματισμού της και στη δυνατότητα να αποδώσει, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων της, αλγόριθμους χωρίς συνθήκη ευσταθείς. Οι παράμετροι αυτές είναι οι συντελεστές β και γ οι οποίοι και ρυθμίζουν την επιρροή της αρχικής και τελικής επιτάχυνσης, μέσα σε ένα χρονικό βήμα, Πίνακας 4: Μέθοδος κεντρικής διαφοράς

Βήμα	**Διαδικασία**
Α. Δεδομένα και αρχικοί υπολογισμοί	1. Εισαγωγή και καθορισμός συστήματος ταλάντωσης και εξωτερικής διέγερσης: k, m, c, f 2. Καθορισμός αρχικών συνθηκών μετακίνησης και ταχύτητας u_0, v_0 3. Υπολογισμός επιτάχυνσης από τη σχέση ισορροπίας $a_0{=}m^{-1}(f-ku_0-cv_0)$ 4. Καθορισμός χρονικού βήματος Δt 5. Υπολογισμός σταθερών ολοκλήρωσης, $w_0=\frac{1}{\Delta t^2}$, $w_1=\frac{1}{2\Delta t}$, $w_2=2w_0$, $w_3=\frac{1}{w_2}$ 6. Υπολογισμός, $u_{-1}=u_0-\Delta t v_0+w_3 a_0$ 7. Καθορισμός του ενεργού μητρώου «δυσκαμψίας», $\hat{k}=w_0 m+w_1 c$
Β. Επαναληπτικοί υπολογισμοί για κάθε βήμα $i=1..N$	1. Υπολογισμός ενεργής διέγερσης βήματος i $\hat{f}_i=f_i-(k-w_2 m)u_{i-1}-(w_0 m-w_1 c)u_{i-2}$ 2. Επίλυση βήματος i για τον υπολογισμό της μετακίνησης $u_i=\hat{k}^{-1}\hat{f}_i$ 3. Αποκατάσταση ταχύτητας και επιτάχυνσης βήματος $v_i=\frac{2}{\Delta t}(u_i-u_{i-1})-v_{i-1}$ $a_i=\frac{4}{\Delta t^2}(u_i-u_{i-1}-\Delta t v_i)-a_{i-1}$

πάνω στην προσέγγιση της μετακίνησης και της ταχύτητας, αντίστοιχα. Οι σχέσεις για τις δύο αυτές προσεγγίσεις δίνονται για την ταχύτητα ως,

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1-\gamma)\Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1}, \tag{57}$$

και αντίστοιχα για τη μετακίνηση,

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + (\frac{1}{2} - \beta)\Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1}. \tag{58}$$

Με έκφραση της $\ddot{u}_{n+1}$ από τη δεύτερη των εξισώσεων και αντικατάσταση στη πρώτη λαμβάνουμε εκφράσεις για τη ταχύτητα και επιτάχυνση στο βήμα $n+1$ ως συναρτήσεις, των συντελεστών της μεθόδου β και γ, αλλά και μεγεθών της επιτάχυνσης, της ταχύτητας και της μετακίνησης στο προηγούμενο βήμα n καθώς και της μετακίνησης στο $n+1$. Με αντικατάσταση αυτών των σχέσεων στη εξίσωση κίνησης για τη χρονική θέση που αντιστοιχεί στο βήμα $n+1$, λαμβάνουμε μια σχέση που μπορεί να γραφτεί ως $\hat{k}u_{n+1}$=$\hat{f}_{n+1}$, από την επίλυση του οποίου προκύπτει η u_{n+1}. Εδώ δίνουμε στη μορφή του Πίνακα 5 τα βήματα για την υλοποίηση της μεθόδου σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Η ομάδα μεθόδων β-Newmark για επιλογή των παραμέτρων τέτοια ώστε:

$$0.5 \leq \gamma \leq 2\beta$$

διαμορφώνει σχήματα χρονικής ολοκλήρωσης άνευ συνθηκών ευσταθή. Σε άλλη περίπτωση η συνθήκη ευστάθειας στο βήμα χρονικής διακριτοποίησης θα είναι:

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\xi(\gamma - 0.5) + \sqrt{0.5\gamma - \beta + \xi^2(\gamma-0.5)^2}}{0.5\gamma - \beta}. \tag{59}$$

Δύο πολυ συχνές επιλογές από την πιο πάνω ομάδα μεθόδων είναι,

(α) μέθοδος μέσης σταθερής επιτάχυνσης, $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{4}$

(β) μέθοδος γραμμικής επιτάχυνσης, $\gamma = \frac{1}{2}$ και $\beta = \frac{1}{6}$

η οποία πρώτη είναι άνευ συνθηκών ευσταθής αλλά με μικρότερη ακρίβεια της δεύτερης η οποία όμως είναι υπό συνθήκη ευσταθής. Η συνθήκη ευστάθειας πάνω στο εύρος του βήματος χρονικής διακριτοποίησης Δt για τη περίπτωση της μεθόδου γραμμικής επιτάχυνσης, καθορίζεται αν στη σχέση της εξ. (59) αντικαταστήσουμε τις τιμές των συντελεστών γ=$\frac{1}{2}$ και β=$\frac{1}{6}$, ώστε να λάβουμε,

$$\Delta t_{cr} = \frac{2\sqrt{3}}{\omega_0}, \tag{60}$$

το οποίο όπως βλέπουμε δεν εξαρτάται και από το συντελεστή ξ, δηλαδή είναι ανεξάρτητο της απόσβεσης του συστήματος.

Πίνακας 5: Μέθοδος β-Newmark

Βήμα	**Διαδικασία**
Α. Δεδομένα και αρχικοί υπολογισμοί	1. Εισαγωγή και καθορισμός συστήματος ταλάντωσης και εξωτερικής διέγερσης: k, m, c, f 2. Καθορισμός αρχικών συνθηκών μετακίνησης και ταχύτητας u_0, v_0 3. Υπολογισμός επιτάχυνσης από τη σχέση ισορροπίας $a_0{=}m^{-1}(f - ku_0 - cv_0)$ 4. Καθορισμός χρονικού βήματος Δt 5. Υπολογισμός σταθερών ολοκλήρωσης, $w_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}$, $w_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}$, $w_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}$, $w_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$, $w_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1$, $w_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - 2\right)$, $w_6 = \Delta t(1-\gamma)$, $w_7 = \Delta t \gamma$ 6. Καθορισμός του ενεργού μητρώου «δυσκαμψίας», $\hat{k} = k + w_0 m + w_1 c$
Β. Επαναληπτικοί υπολογισμοί για κάθε βήμα $i = 1..N$	1. Υπολογισμός ενεργής διέγερσης βήματος i $\hat{f}_i = f_i + m(w_0 u_{i-1} + w_2 v_{i-1} + w_3 a_{i-1}) + c(w_1 u_{i-1} n + w_4 v_{i-1} + w_5 a_{i-1})$ 2. Επίλυση βήματος i για τον υπολογισμό της μετακίνησης $u_i = \hat{k}^{-1} \hat{f}_i$ 3. Αποκατάσταση επιτάχυνσης και ταχύτητας βήματος $a_i = w_0(u_i - u_{i-1}) - w_2 v_{i-1} - w_3 a_{i-1}$ $v_i = v_{i-1} + w_6 a_{i-1} + w_7 a_i$

2.11.2 Αριθμητική ολοκλήρωση εξισώσεων πρώτης τάξης

Παραδοσιακά η χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης γίνονταν αξιοποιώντας αλγόριθμους αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Οι μέθοδοι αυτές προέρχονται κυρίως από το πεδίο της αριθμητικής επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων και προβλημάτων αρχικών τιμών. Υπάρχει μεγάλη ποικιλία τέτοιων μεθόδων και η σχετική βιβλιογραφία είναι πολυ πλούσια. Εδώ θα παρουσιάσουμε συνοπτικά μόνο μερικές από αυτές τις μεθόδους οι οποίες είναι και από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες και στα πλαίσια της δυναμικής και του ελέγχου των κατασκευών.

Για να γίνει εφικτή η αξιοποίηση τέτοιων μεθόδων, θεωρούμε τη μεταβλητή της ταχύτητας ως $v{=}\frac{du}{dt}{=}\dot{u}$ και γράφουμε την εξίσωση κίνησης (1) ως:

$$\dot{v} = \frac{f}{m} - \frac{c}{m}v - \frac{k}{m}u. \tag{61}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε το διάνυσμα $y{=}\{u \quad v\}^T$, μπορούμε να γράψουμε το σύστημα εξισώσεων,

$$\dot{u}(t) = v(t) \tag{62}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{f(t)}{m} - \frac{c}{m}v(t) - \frac{k}{m}u(t). \tag{63}$$

η αλλιώς, στη πιο κλασική του μορφή,

$$\dot{y} = \tilde{f}(y,t) \tag{64}$$

με την αρχική συνθήκη,

$$y(t_0) = y_0 = \begin{bmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t_0) \\ \dot{u}(t_0) \end{bmatrix} \tag{65}$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι ο χώρος που περιγράφεται από τις μεταβλητές της μετακίνησης και της ταχύτητας του διανύσματος $y{=}\{u \quad v\}^T$, ονομάζεται και χώρος κατάστασης (state space) και αποτελεί μια πολύ χρήσιμη αναπαράσταση σε εφαρμογές ελέγχου των κατασκευών. Παρόμοια απεικόνιση συναντούμε και στα πλαίσια της μηχανικής όπου εκεί μπορεί να τη βρούμε ως απεικόνιση στο χώρο φάσης (phase space), σε αντιδιαστολή με το θεσεογραφικό χώρο (configuration space), με ιδιαίτερη χρησιμότητα στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα.

Μέθοδος Euler

Με απευθείας ολοκλήρωση της σχέσης της εξ. (64) μπορούμε προσεγγιστικά να γράψουμε ότι,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \tilde{f}(y_n, t_n) \tag{66}$$

μια προσέγγιση που ονομάζεται και *forward Euler*, αφού προκύπτει έχοντας θεωρήσει την παράγωγο

$$\dot{y}(t_n)= \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{\Delta t}, \tag{67}$$

και η οποία όπως είναι φανερό είναι μια ρητή (άμεση) μέθοδος. Παρόμοια, με χρήση του σχήματος

$$\dot{y}(t_n)= \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{\Delta t}. \tag{68}$$

για την προσέγγιση της παραγώγου λαμβάνουμε την *backward Euler* μέθοδο,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \tilde{f}(y_{n+1}, t_{n+1}) \tag{69}$$

η οποία είναι μια πεπλεγμένη (έμμεση) μέθοδος.

Μέθοδοι Runge-Kutta

Μια από τις πλέον κλασικές κατηγορίες μεθόδων επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι η μεθόδους Runge-Kutta, που σπάνια όμως χρησιμοποιείται για την επίλυση συστημάτων της δυναμικής των κατασκευών. Αυτό οφείλεται σε δυο βασικούς λόγους, (i) την πολυπλοκότητα της μόρφωσης του αλγόριθμου για πολυβάθμια συστήματα και (ii) δεν υπάρχει μια σαφής συνθήκη ευστάθειας. Η μέθοδος όμως έχει ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο και η ακρίβεια της μπορεί να είναι υψηλή

Στη μέθοδο *Runge-Kutta δεύτερης τάξης* σε κάθε βήμα n υπολογίζεται αρχικά μια βοηθητική ενδιάμεση «λύση» η y^*_{n+1} και με χρήση αυτής καθορίζεται η λύση y_{n+1}. Ο αλγόριθμος μπορεί να γραφτεί σε δύο βήματα, όπως παρακάτω.

$$\begin{aligned} y^*_{n+1} &= y_n + \Delta t \tilde{f}(y_n, t_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{2}\left[\tilde{f}(y_n, t_n) + \tilde{f}(y^*_{n+1}, t_{n+1})\right] \end{aligned} \tag{70}$$

Μια ακριβέστερη μέθοδος είναι η *Runge-Kutta τέταρτης τάξης* για την οποία σε κάθε βήμα n υπολογίζονται πρώτα τέσσερις βοηθητικές ποσότητες και μετά με χρήση αυτών υπολογίζεται η λύση στο βήμα $n + 1$.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t \tilde{f}(y_n, t_n) \\
k_2 &= \Delta t \tilde{f}(y_n + k_1/2, t_{n+1/2}) \\
k_3 &= \Delta t \tilde{f}(y_n + k_2/2, t_{n+1/2}) \\
k_4 &= \Delta t \tilde{f}(y_n + k_3, t_{n+1}) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{6}\left[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right]
\end{aligned} \tag{71}
$$

Η μορφή αυτή της Runge-Kutta είναι και η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην υλοποίηση της συνάρτησης `solve` της οντότητας `sdof` (βλ. ενότητα 2.13.1) για την αριθμητική επίλυση και καθορισμό της απόκρισης του μονοβάθμιου ταλαντωτικού συστήματος σε τυχούσα διέγερση.

2.12 Μη-γραμμικός μονοβάθμιος ταλαντωτής

Έως αυτό το σημείο θεωρούμε ότι οι φυσικές ιδιότητες του μονοβάθμιου ταλαντωτή (μάζα, δυσκαμψία, απόσβεση) παραμένουν αναλλοίωτες στο χρόνο με συνέπεια οι αντίστοιχες δυνάμεις (αδράνειας, ελαστικές, απόσβεσης) να είναι γραμμικές ως προς το αίτιο που τις προκαλεί. Ισχύουν δηλαδή, για τις επιμέρους δυνάμεις, οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται στην εξ. (1). Επακόλουθο αυτής της σχέσης είναι η ισχύς της αρχής της επαλληλίας, η οποία είναι και μια πάρα πολύ σημαντική ιδιότητα ενός γραμμικού συστήματος.

Η *αρχή της επαλληλίας* με απλά λόγια, στη περίπτωση του μονοβάθμιου ταλαντωτικού συστήματος μας λέει ότι, αν για εξωτερική διέγερση f_{I} το σύστημα αποκρίνεται με την u_{I} και για εξωτερική διέγερση f_{II} με την u_{II}, τότε στην εξωτερική διέγερση $f_{\mathrm{I}}+f_{\mathrm{II}}$ το σύστημα θα αποκριθεί με την $u_{\mathrm{I}}+u_{\mathrm{II}}$.

Επιπλέον για τα γραμμικά συστήματα ισχύει η *αρχή της ομογένειας*, που μας λέει πως αν το σύστημα αποκρίνεται με u στην εξωτερική διέγερση f τότε στην αντίστοιχη αf θα αποκρίνεται με αu.

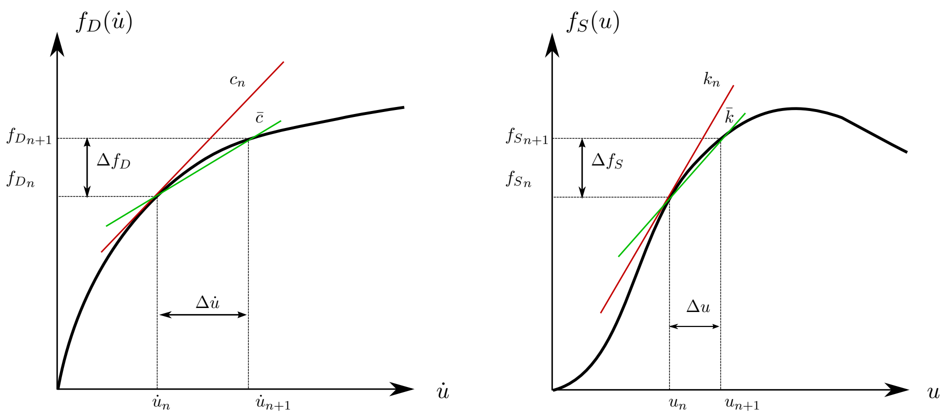
Η μη-γραμμικότητα στα πλαίσια των κατασκευαστικών και μηχανικών συστημάτων διακρίνεται σε δυο είδη, στη γεωμετρική μη-γραμμικότητα και στη μη-γραμμικότητα του υλικού. Στη περίπτωση του μη-γραμμικού συστήματος οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στον ταλαντωτή είναι δυνατόν να έχουν την πιο κάτω μορφή που φαίνεται στην εξίσωση ισορροπίας,

$$m(t)\ddot{u}(t) + f_D(u, \dot{u}, t) + f_S(u, \dot{u}, t) = f(t). \tag{72}$$

Συχνά συναντάμε συστήματα που εκφράζονται από μια υποπερίπτωση της πιο πάνω γενικότερης μορφής, και μπορεί να εκφραστεί ως,

$$m\ddot{u}(t) + f_D(\dot{u}) + f_S(u) = f(t). \tag{73}$$

Στην περίπτωση των μη-γραμμικών συστημάτων μια πιο κατάλληλη μορφή για



Σχήμα 16: Μη-γραμμική απόσβεση και δυσκαμψία.

να γράψουμε την εξίσωση ισορροπίας είναι σε μια αυξητική σχέση. Θεωρούμε δηλαδή ότι σε ένα βήμα ανάμεσα σε δυο διαδοχικά χρονικά σημεία t και $t{+}\Delta t$, επιβάλλεται η προσαυξητική εξωτερική διέγερση $\Delta f{=}f(t{+}\Delta t){-}f(t)$ και η εξίσωση ισορροπίας θα ειναι,

$$m\Delta\ddot{u} + c(t)\Delta\dot{u} + k(t)\Delta u = \Delta f \tag{74}$$

Στη πιο πάνω εξίσωση οι συντελεστές $c(t)$ και $k(t)$ αντιπροσωπεύουν μέσες τιμές καθώς μέσα στο βήμα Δt είναι δυνατό να μεταβάλλονται. Στην πράξη αυτές οι μέσες τιμές ($\bar{c}$ και $\bar{k}$ στο Σχήμα 16) μπορούν να υπολογιστούν μέσω επαναληπτικής διαδικασίας, αφού η μετακίνηση και η ταχύτητα στο χρόνο $t{+}\Delta t$ μόνο μετά από την επίλυση είναι γνωστές. Μια εξαιρετικά απλουστευτική πρακτική είναι να θεωρήσουμε αυτή τη μέση τιμή των συντελεστών ίση με την αρχική κλίση στο χρόνο t. Αν δηλαδή ο χρόνος t στην αρχή του βήματος είναι ο t_n και μετά από Δt είναι t_{n+1}, θεωρούμε ότι,

$$c(t) \doteq \left.\frac{df_D}{dt}\right|_n = c_n \qquad k(t) \doteq \left.\frac{df_S}{dt}\right|_n = k_n \tag{75}$$

και να αντικαταστήσουμε στη σχέση ισορροπίας,

$$m\Delta\ddot{u} + c_n\Delta\dot{u} + k_n\Delta u = \Delta f \tag{76}$$

όπου στη τελευταία έχει γίνει η θεώρηση

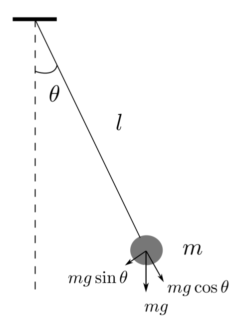
$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_{n+1} - u_n, \\
\Delta \dot{u} &= \dot{u}_{n+1} - \dot{u}_n, \\
\Delta \ddot{u} &= \ddot{u}_{n+1} - \ddot{u}_n.
\end{aligned} \tag{77}$$

Την εξ. (76) μπορούμε να λύσουμε με οποιαδήποτε από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 2.11.1, ένα σχετικό παράδειγμα παρουσιάζεται στην παράγραφο 2.14.8.

Η αυξητική μέθοδος που παρουσιάστηκε πιο πάνω μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά αν με κάποια επαναληπτική διαδικασία, μέσα σε κάθε βήμα, ελαχιστοποιούμε το σφάλμα που εισάγεται από τη θεώρηση της εφαπτομενικής δυσκαμψίας και απόσβεσης που δίνεται στις σχέσεις της εξ. (75). Μια τέτοια πολύ διαδεδομένη επαναληπτική διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί με χρήση της μεθόδου γνωστής ως Newton-Raphson.

Για την περίπτωση που είναι εφικτό να περιγράψουμε τις εξισώσεις κίνησης στη μορφή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, οι αλγόριθμοι επίλυσης που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο (2.11.2) αποτελούν ένα πολύτιμο εργαλείο αριθμητικής επίλυσης και η περίπτωση των μη-γραμμικών εξισώσεων μπορεί να άμεσα να συμπεριληφθεί. Σχετικά παραδείγματα δίνονται σε αντίστοιχες παραγράφους της ενότητας των εφαρμογών.

2.12.1 Το απλό εκκρεμές



Σχήμα 17: Το απλό εκκρεμές.

Η εξίσωση του απλού εκκρεμούς μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{78}$$

όπου θ η γωνιακή μετατόπιση που εκφράζεται από τη γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές στη χρονική στιγμή t με τον κατακόρυφο άξονα. Επιπλέον στην εξίσωση g η επιτάχυνση της βαρύτητας και l το μήκος της αβαρούς και παραμορφωτής ράβδου ανάρτησης της μάζας του εκκρεμούς. Για πολύ μικρή γωνιακή μετατόπιση $\theta \ll 1$ ισχύει η προσέγγιση $\sin\theta \approx \theta$, οπότε και η εξίσωση μπορεί να πάρει τη γραμμική μορφή

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{79}$$

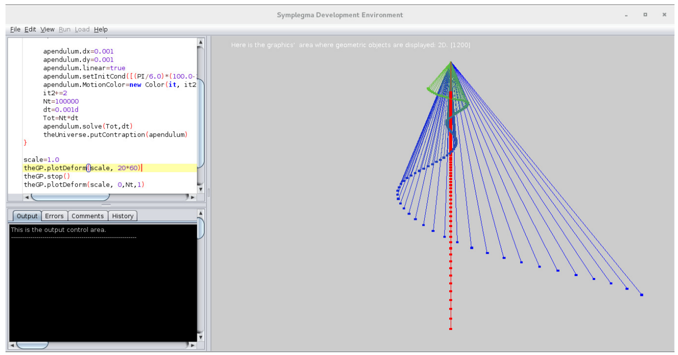
Από τις πιο πάνω εξισώσεις γίνεται φανερό ότι η μάζα του απλού εκκρεμούς δεν παίζει κανένα ρόλο στην κίνηση της ελεύθερης ταλάντωσης. Για να οριστεί το πρόβλημα ολοκληρωμένα, οποιαδήποτε από τις παραπάνω δυο εξισώσεις, θα πρέπει να συνοδεύεται από κατάλληλες αρχικές συνθήκες στην γωνιακή μετατόπιση και ταχύτητα εκφρασμένες στο χρόνο έναρξης που συνήθως λαμβάνεται ίσος με το μηδέν,

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{και} \quad \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0. \tag{80}$$

Το απλό εκκρεμές αποτελεί ίσως το απλούστερο παράδειγμα γεωμετρικής μη-γραμμικότητας, και για το λόγο αυτό προσφέρεται για σκοπούς εκπαιδευτικούς. Προς τούτο, έχει δημιουργηθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού πακέτου `courses.structuraldynamics` ειδική οντότητα που εισάγουμε αρχικά εδώ ενώ θα περιγράψουμε πληρέστερα στην ενότητα των πολυβάθμιων συστημάτων.

Σε εκπαιδευτικό βίντεο[10] παρουσίασης, στιγμιότυπο του οποίου δίνεται στην εικόνα του Σχήματος 18, αναπαράγεται παρόμοιο ενός κλασσικού πειράματος[11] της μηχανικής γνωστό και ως κύματα συστοιχίας ανεξάρτητων εκκρεμών. Επισημαίνεται εδώ πως η απόκριση με τη χρήση της οντότητας `pendulum` καθορίζεται μέσω αριθμητικής επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης του εκκρεμούς στη μη-γραμμική της ή στη γραμμική προσέγγιση αυτής.

[10] `https://youtu.be/aYeT_u19oXE`
[11] `https://youtu.be/yVkdfJ9PkRQ`



Σχήμα 18: Στιγμιότυπο από παρόμοιο βίντεο (https://youtu.be/aYeT_u19oXE) παρουσίασης προσομοίωσης του πειράματος κυμάτων συστοιχίας ανεξάρτητων εκκρεμών.

Η κλάση pendulum

Εδώ γίνεται μια πρώτη αναφορά και μια συνοπτική παρουσίαση της οντότητας του πακέτου courses.structuraldynamics που αφορά το μονοβάθμιο γραμμικό ταλαντωτή και που πραγματώνεται μέσω της κλάσης pendulum. Οι αναφορές που επισημαίνονται αφορούν τον Κώδικα [3]. Για να χρησιμοποιήσουμε τη κλάση pendulum πρέπει πρώτα να εισαγάγουμε το πακέτο courses.structuraldynamics (βλ. γραμμή 1). Το εκκρεμες ορίζεται στη γραμμή 3 με χρήση εδώ ενός κονστράκτορα με όρισμα μια μοναδική μεταβλητή, αυτή του μήκους της ράβδου του εκκρεμούς. pendulum(double leng). Στη γραμμή 4 ορίζεται αν η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς θα είναι η μη-γραμμικη ή η αντίστοιχη γραμμική της θεώρηση. Οι αρχικές συνθήκες γωνίας θ_0 από τη θέση ισορροπίας και γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}_0$ στη γραμμή 5 με χρήση της setInitCond συνάρτησης της οντότητας pendulum. Στη γραμμή 7 του κώδικα επιλύεται αριθμητικά η διαφορική εξίσωση (γραμμική ή μη-γραμμική) του εκκρεμούς μέσω της συνάρτησης solve η οποία και αποτελεί μια εφαρμογή της μεθόδου Runge–Kutta τέταρτης τάξης. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης στο χρόνο αναφέρεται στη γωνιακή μετατόπιση, δηλαδή τη γωνία γύρω από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας. Για την ανάκτηση της χρονοϊστορίας της γωνιακής μετατόπισης χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Theta ενώ αντίστοιχα για τη χρονοϊστορία της γωνιακής ταχύτητας τη συνάρτηση DTheta, όπως φαίνεται στη γραμμή 8 κώδικα. Η οντότητα pendulum αποτελεί μια υλοποίηση της διεπαφής/διασύνδεσης contraption και ως εκ τούτου μπορεί να έχει και την αντίστοιχη γραφική απεικόνιση. Οι γραμμές κώδικα 10 έως 13 διευθετούν αυτή τη διασύνδεση και την γραφική απεικόνιση της απόκρισης σε μορφή animation.

Κώδικας 3: Σύντομη παρουσίαση του αντικείμενου του εκκρεμούς pendulum

```
import courses.structuraldynamics.*

apendulum = new pendulum(1.0)
apendulum.linear=true
apendulum.setInitCond([PI/8.0] as double[], [0.0] as double[])
Nt=1000; dt=0.01d ; Tot=Nt*dt
apendulum.solve(Tot,dt)
th=apendulum.Theta(); dth=apendulum.DTheta()

theGP.setIsoScale(true)
theUniverse.putContraption(apendulum)
scale=1.0
theGP.plotDeform(1.0, 0,Nt,10)
```

2.12.2 Μη-γραμμικά ελαστικό μονοβάθμιο σύστημα – ταλαντωτής Duffing

Ο κλασσικός νόμος του Hooke ορίζει πως η σχέση της δύναμης επαναφοράς και της προκαλούμενης επιμήκυνσης του ελατηρίου περιγράφονται ικανοποιητικά από τη γραμμική σχέση $f_s = ku$. Υπάρχουν ελατήρια που δεν υπακούν σε αυτό το νόμο ή τουλάχιστον ο κλασσικός αυτός νόμος ισχύει μόνο για μικρές τιμές της επιμήκυνσης. Ένας πιο γενικός μη-γραμμικός νόμος της ελαστικότητας είναι αυτός που περιγράφει τη σχέση δύναμης με την αντίστοιχη επιμήκυνση ως συνάρτηση τρίτου βαθμού, δηλαδή $f_s = ku + \mu u^3$. Αν $\mu > 0$, η ισοδύναμη δυσκαμψία αυξάνεται με αύξηση της τιμής της μετατόπισης, ενώ αν $\mu < 0$ η δυσκαμψία μειώνεται με αύξηση της μετατόπισης. Συστήματα τα οποία αποτελούνται από ελατήρια αυτής της μορφής είναι γνωστά και ως συστήματα με θετική ή αρνητική κράτυνση, αντίστοιχα. Σε τέτοιες περιπτώσεις με την εισαγωγή όρων γραμμικής απόσβεσης και εξωτερικής διέγερσης η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή παίρνει τη μορφή,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + \mu u^3 = f(t) \tag{81}$$

γνωστή και ως εξίσωση Duffing. Εξισώσεις αυτής της μορφής προκύπτουν και από τη μελέτη της ταλαντωτικής συμπεριφοράς συνεχών μηχανικών φορέων[12].

Τη μη-γραμμική διαφορική σχέση δεύτερου βαθμού της εξ. (81) μπορούμε να

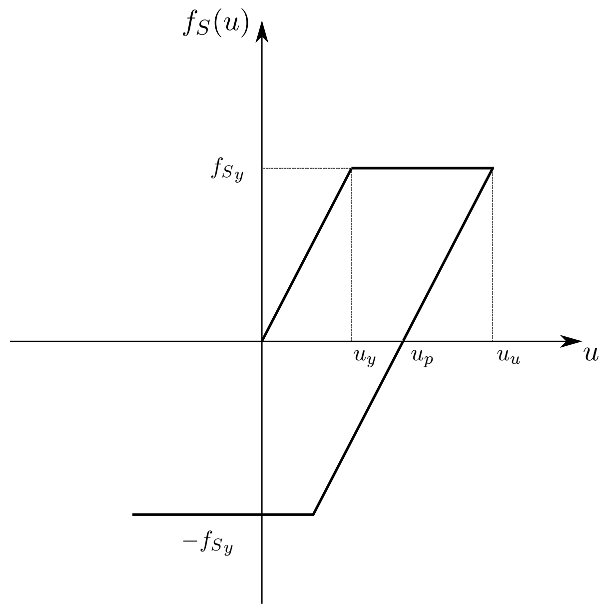
[12]Σ. Νατσιάβας, Ταλαντωσεις δυναμικων συστηματων με μη γραμμικα χαρακτηριστικά, εκδ. Ζήτη, 2000

γράψουμε σαν σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού,

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= \frac{f(t)}{m} - \frac{c}{m}v - \frac{k}{m}u - \frac{\mu}{m}u^3\end{aligned} \tag{82}$$

το οποίο εύκολα μπορεί να αντιμετωπιστεί με μεθόδους όπως η Runge-Kutta, κάτι το οποίο θα δείξουμε και σε αντίστοιχο παράδειγμα στην ενότητα των εφαρμογών.

2.12.3 Μονοβάθμιο σύστημα με γραμμικά ελαστικό – απολύτως πλαστικό ελατήριο



Σχήμα 19: Καταστατική σχέση παραμόρφωσης και δύναμης επαναφοράς του γραμμικά ελαστικού – απολύτως πλαστικού ελατηρίου.

Ένα ακόμα παράδειγμα μη-γραμμικού ταλαντωτικού συστήματος αποτελεί η απόκριση του *ελαστοπλαστικού ελατηρίου*. Ο ταλαντωτής αυτός θεωρείται ότι έχει σταθερά ελατηρίου η οποία εξαρτάται από τη παραμόρφωση. Το ελατήριο αποκρίνεται γραμμικά ελαστικά,με σταθερά ελατηρίου ή αλλιώς δυσκαμψία k, μέχρι κάποια τιμή της αναπτυσσόμενης δύναμης επαναφοράς (f_{S_y}) καθώς και της παραμόρφωσης του (u_y). Όταν όμως καταπονηθεί εντονότερα υπερβαίνει το όριο διαρροής και για οποιαδήποτε περαιτέρω καταπόνηση δεν μπορεί να αυξήσει τη δύναμη επαναφοράς και η καμπύλη εσωτερικής δύναμης παραμόρφωσης είναι μια οριζόντια ευθεία (k_h=0). Στην αποφόρτιση το ελατήριο θα αποκριθεί ξανά με την αρχική δυσκαμψία (ελατηριακή σταθερά) όμως μετά από τη πλήρη αποφόρτιση (f_S=0) θα υπάρχει μια παραμένουσα παραμόρφωση του ελατηρίου (u_p).

2.13 Οντότητες πακέτου courses.structuraldynamics

2.13.1 Κλάση sdof

Περιγραφή:
Το αντικείμενο αυτό αφορά ενα μονοβάθμιο γραμμικό ταλαντωτή και την επίλυση κάτω από αρχικές συνθήκες και για οποιαδήποτε εξωτερική διέγερση.

Δημιουργία στιγμιότυπου:
Ο κονστράκτορας (constructor) ενός στιγμιότυπου του αντικείμενου εμφανίζεται σε τρεις εκδοχές. Στην πρώτη το όρισμα του αποτελείται από πέντε αριθμητικές μεταβλητές διπλής ακρίβειας που αντιστοιχούν με τη σειρά, στη δυσκαμψία, τη μάζα και την απόσβεση του ταλαντωτή καθώς και τις αρχικές συνθήκες στην αρχική μετακίνηση και ταχύτητα, αντίστοιχα. Στις επόμενες εκδοχές του κονστράκτορα οι μεταβλητές που δεν συμπεριλαμβάνονται στο όρισμα θεωρούνται αρχικά μηδενικές, ενώ υπάρχει η δυνατότητα επανακαθορισμού τους στην πορεία.

- `sdof(double k, double m, double c, double u0, double v0)`
- `sdof(double k, double m, double c)`
- `sdof(double k, double m)`

Μέθοδοι:
Η ονομασία των μεθόδων έχει γίνει με τρόπο τέτοιο ώστε να είναι, το δυνατό, επεξηγηματική.

- void setCritDampRatio(double xsi)
- void setInitCond(double u0, double v0)
- void setRHS(DoubleFunction df)
- double getCritDampRatio()
- double getDamping()
- double getNaturalFrequency()
- double getNaturalPeriod()

συνεχίζεται ...

Κλάση sdof (...συνέχεια)

Μέθοδοι:

- double maxDisp()
- double maxVelc()
- double minDisp()
- double minVelc()
- double[ ] Disp()
- double[ ] Velc()
- double[ ] Accl()
- void duhamel(double tot, double dt)
- void duhamel(int N)
- void duhamel(int N, double dt)
- void duhamel(int N, int M)
- double dt()
- Complex TransferFunction(double omega)

Με παρόμοια λειτουργία αλλά και χρήση (ορίσματα) της μεθόδου `duhamel`, η οποία ουσιαστικά αφορά την αριθμητική προσέγγιση του αντίστοιχου ολοκληρώματος, υπάρχει η μέθοδος **`solve`**, η οποία επιλύει αριθμητικά την εξίσωση κίνησης του μονοβάθμιου ταλαντωτή με τη μέθοδο Runge-Kutta.

συνεχίζεται ...

Κλάση sdof (...συνέχεια)
Το αντικείμενο sdof επιπλέον υλοποιεί τις μεθόδους της διεπαφής/διασύνδεσης (interface) της Climax που ονομάζεται contraption. Η διεπαφή contraption εξυπηρετεί και στην απόδοση γραφικής αναπαράστασης σε κάποια οντότητα. Για να πραγματοποιηθεί η απεικόνιση αυτή στο περιβάλλον του θα πρέπει αφού δημιουργηθεί το στιγμιότυπο κάποιου αντικειμένου sdof να εισαχθεί στο «σύμπαν», theUniverse, του περιβάλλοντος SDE, με χρήση της μεθόδου του putContraption.

Μέθοδοι:

- void setOrigin(double x0, double y0)
- void setLength(double elen)
- void setWidth(double w)
- void setHeight(double h)

2.14 Παραδείγματα και αριθμητικές εφαρμογές

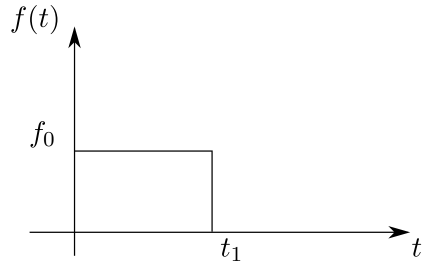
2.14.1 Φάσμα απόκρισης σε ορθογωνικό πλήγμα

Έστω μονοβάθμιος ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, ο οποίος υπόκειται στη δράση του ορθογωνικού πλήγματος του σχήματος της εικ. 20. Η μελέτη της απόκρισης του συστήματος και ο προσδιορισμός των τιμών αιχμής, απαιτεί την διάκριση δύο χρονικών φάσεων κατά τις οποίες ο ταλαντωτής εκτελεί διαδοχικά την καταναγκασμένη και την ελεύθερη ταλάντωση. Η πρώτη φάση, αφορά στο χρονικό διάστημα δράσης του πλήγματος, $t \leq t_1$, οπότε και έχουμε καταναγκασμένη ταλάντωση. Η δεύτερη φάση αφορά στο χρονικό διάστημα που ακολουθεί, $t > t_1$, οπότε και έχουμε ελεύθερη ταλάντωση με αρχικές συνθήκες ίσες με την μετατόπιση και ταχύτητα του συστήματος κατά το τέλος της πρώτης φάσης. Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, η μέγιστη τιμή μετάθεσης που ενδιαφέρει άμεσα τον μελετητή μηχανικό, είναι δυνατόν να συμβεί κατά τη διάρκεια της πρώτης ή της δεύτερης φάσης της μετάθεσης, ανάλογα με τον λόγο της διάρκειας του πλήγματος (t_1) προς την ιδιοπερίοδο του ταλαντωτή ($T_0 = 2\pi/\omega_o$).

Κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης (I), δηλαδη για $0 < t \leq t_1$, η διέγερση είναι σταθερή $f(t) = f_o$, οπότε η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας είναι:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f_0$$

Το ολοκλήρωμα Duhamel της εξ. (17) που αντιστοιχεί στο σταθερό φορτίο,



Σχήμα 20: Εξωτερική διέγερση ορθογωνικού πλήγματος, εν. 2.14.1.

για μηδενικές αρχικές συνθήκες, είναι:

$$u^I(t) = \frac{f_0}{m\omega_0}\int_0^t \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)d\tau = \frac{f_0}{m\omega_0}\left[\frac{\cos\left(\omega_0(t-\tau)\right)}{\omega_0}\right]_0^t$$
$$= \frac{f_0}{k}\left(1-\cos\left(\omega_0 t\right)\right)$$

ενώ ισχύει για τη στατική μετατόπιση στο σταθερό φορτίο, $u_s t{=}f_0/k$.

Για τη δεύτερη φάση (II) όπου $t > t_1$ ο αναπόσβεστος μονοβάθμιος ταλαντωτής θα εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση την οποία για να προσδιορίσουμε θα πρέπει να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες. Οι αρχικές συνθήκες αυτής της ταλάντωσης θα αντιστοιχούν με την μετακίνηση και τη ταχύτητα του συστήματος στο τέλος της φάσης II, δηλαδή θα ισχύει $u_0^{II} = u^I(t_1)$ και $\dot{u}_0^{II} = \dot{u}^I(t_1)$. Η ταχύτητα στη φάση I θα υπολογιστεί με απευθείας χρονική παραγώγιση της μετατόπισης, ως:

$$\dot{u}^I(t) = \frac{f_0}{k}\sin\left(\omega_0 t\right)$$

οπότε και θα έχουμε για αρχικές συνθήκες της δεύτερης φάσης,

$$u_0^{II} = u^I(t_1) = \frac{f_0}{k}\left(1-\cos\left(\omega_0 t_1\right)\right) \text{ και } \dot{u}_0^{II} = \dot{u}^I(t_1) = \frac{f_0}{k}\sin\left(\omega_0 t_1\right)$$

και η λύση θα δίνεται από την εξ. (4), όπου έχει ληφθεί υπόψη η χρονοκαθυστέρηση $\tilde{t}{=}t-t_1$ ενώ επισημαίνουμε ότι ισχύει για $t > t_1$.

$$u^{II}(t-t_1) = u_0^{II}\cos\left(\omega_0(t-t_1)\right) + \dot{u}_0^{II}\frac{\sin\left(\omega_0(t-t_1)\right)}{\omega_0} \rightarrow$$
$$u^{II}(\tilde{t}) = \frac{f_0}{k}\left(1-\cos\left(\omega_0 t_1\right)\right)\cos\left(\omega_0\tilde{t}\right) + \frac{f_0}{k}\sin\left(\omega_0 t_1\right)\frac{\sin\left(\omega_0\tilde{t}\right)}{\omega_0}$$

Για να υπολογίσουμε το συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης D, θα υποθέσουμε αρχικά ότι η μέγιστη μετατόπιση εμφανίζεται στη φάση (I). Κατά τα γνωστά η $\dot{u}^I(t)$ θα εμφανίζει μέγιστο σε σημείο που θα ισχύει $\dot{u}^I(t)$=0, από την οποία σχέση θα προκύψει

$$\dot{u}^I(t) = \frac{f_0}{k}\sin{(\omega_0 t)} = 0 \rightarrow \omega_0 t = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{T_0}{2}$$

που σημαίνει ότι η μέγιστη μετατόπιση μπορεί να εμφανιστεί τη φάση (I) μόνο αν $t_1 \geq T_0/2$ και στη περίπτωση αυτή θα είναι D=2. Στη συνέχεια αν υποθέσουμε πως $t_1 < T_0/2$, τότε η μέγιστη μετακίνηση θα μπορεί να βρεθεί από το εύρος της ταλάντωσης όπως δίνεται στον πινάκα 1,

$$u_{max} = p = \sqrt{\left(u_0^{II}\right)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0^{II}}{\omega_0}\right)^2} = \frac{2f_0}{k}\sin{(\pi\frac{t_1}{T_0})}$$

και στη περίπτωση αυτή ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης θα είναι όπως στην ακόλουθη σχέση.

$$\text{D}{=}2\sin{(\pi\frac{t_1}{T_0})}$$

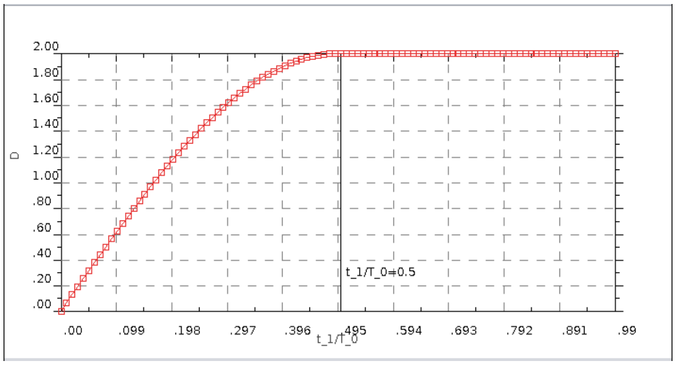
Αξίζει να επισημανθεί ότι ο συντελεστής δυναμικής ενίσχυσης εξαρτάται μόνο από το λόγο t_1/T_0, όπου t_1 ο χρόνος διάρκειας του πλήγματος προς την ιδιοπερίοδο του ταλαντωτή $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Η γραφική παράσταση του συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης D συναρτήσει της ιδιοπεριόδου (η κάποιας μεταβλητής που εξαρτάται από την ιδιοπερίοδο) ονομάζεται φάσμα απόκρισης. Το διάγραμμα αυτό είναι σημαντικό καθώς μας επιτρέπει να υπολογίσουμε αμέσως τη μέγιστη μετακίνηση χωρίς την ανάγκη επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης.

2.14.2 Απόκριση σε γραμμικό παλμό

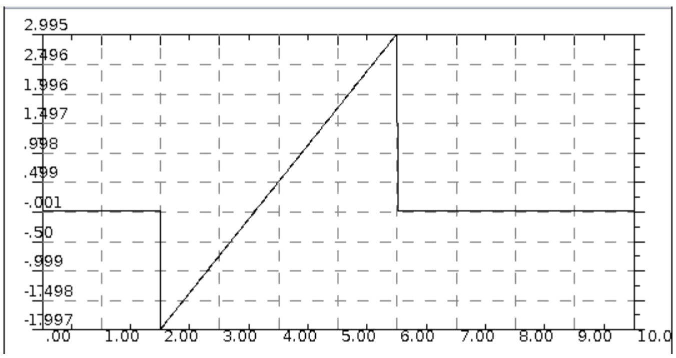
Μονοβάθμιος ταλαντωτής υπόκειται σε παλμική διέγερση η οποία εμφανίζεται στο χρόνο t_1 με τιμή f_1 και γραμμικά εξελίσσεται έως το χρόνο t_2 με αντίστοιχη τιμή f_2, οπότε και εξαφανίζεται. Εδώ θα υπολογισθεί η απόκριση του ταλαντωτή με χρήση της οντότητας `sdof` του πακέτου `courses.structuraldynamics` στο SDE. Η φόρτιση φαίνεται στο Σχήμα 22 ενώ ο για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε ο Κώδικας [4].

Κώδικας 4: Επίλυση `duhamel` του μονοβάθμιου ταλαντωτή `sdof` σε φόρτιση γραμμικού παλμού και δημιουργία διαγραμμάτων

```
import courses.structuraldynamics.*
```



Σχήμα 21: Φάσμα απόκρισης σε ορθογωνικό πλήγμα, εν. 2.14.1.

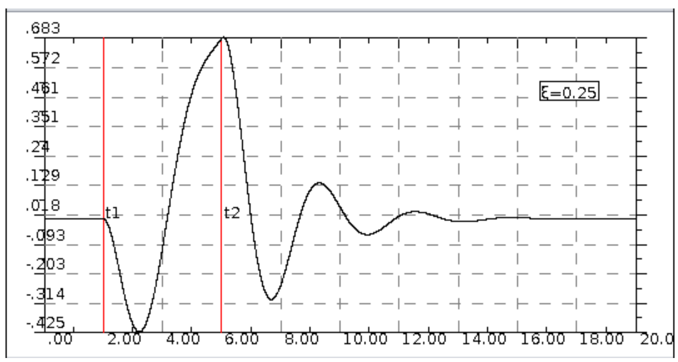


Σχήμα 22: Παλμική διέγερση, εν. 2.14.2.

```
thePlot.clear()
t1=2.0; f1=-2.0
t2=6.0; f2=3.0

f={double t ->
    val=0.0d
    if(t>=t1 && t<=t2){val=f1+(f2-f1)/(t2-t1)*(t-t1)}
    return val
}
thePlot.addFunction(new plotfunction(linspace(0.0,10.0,1000) as
    double[],f as DoubleFunction))
thePlot.show()

k=4.0; m=1.0; c=1.0
theSDOF=new sdof(4.0, 1.0, 1.0)

theSDOF.setRHS(f as DoubleFunction)
```

```
theSDOF.duhamel(20.0,  0.001)

resPlot=new PlotFrame()
pf=new plotfunction(theSDOF.dt(),theSDOF.Disp())
pf.setName("x="+theSDOF.getCritDampRatio())
resPlot.addFunction(pf)
println("xsi="+theSDOF.getCritDampRatio())

resPlot.makeLegend(true)
resPlot.text(t1+0.1,0.001,"t1")
resPlot.text(t2+0.1,0.001,"t2")
resPlot.vline(t1,Color.red)
resPlot.vline(t2,Color.red)
resPlot.show()
```

Η απόκριση του συστήματος απεικονίζεται στο διάγραμμα του Σχήματος 23 σε όρους μετακίνησης. Για τον υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής του έργου



Σχήμα 23: Απόκριση σε παλμική διέγερση σε όρους μετακίνησης στο χρόνο, εν. 2.14.2.

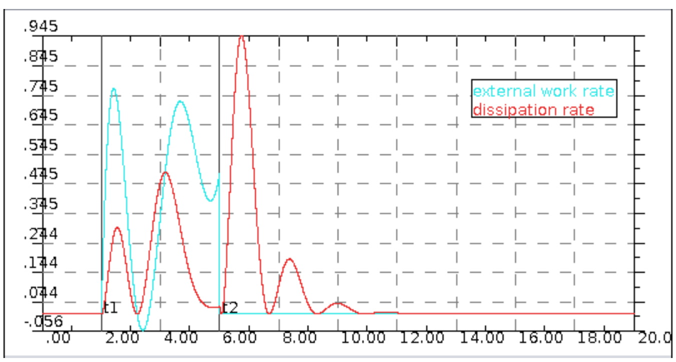
της εξωτερικής διέγερσης αλλά και της ενέργειας που αναλίσκεται λόγω απόσβεσης χρησιμοποιήθηκε ο Κώδικας [5].

Κώδικας 5: Συμπληρωματικός κώδικας για τη δημιουργία διαγραμμάτων ρυθμού μεταβολής του έργου.

```
nrgPlot=new PlotFrame()
dissNRG= new double[theSDOF.Velc().length]
excfNRG= new double[theSDOF.Velc().length]
(0..<theSDOF.Velc().length).each{
    dissNRG[it]=c*theSDOF.Velc()[it]*theSDOF.Velc()[it]
    excfNRG[it]=f(it*theSDOF.dt())*theSDOF.Velc()[it]
}

```

```
pf=new plotfunction(theSDOF.dt(),dissNRG)
pf.setName("dissipation rate")
nrgPlot.addFunction(pf)

pf=new plotfunction(theSDOF.dt(),excfNRG)
pf.setName("external work rate")
nrgPlot.addFunction(pf)

nrgPlot.setAutoColor(true)
nrgPlot.makeLegend(true)
nrgPlot.text(t1+0.1,0.001,"t1")
nrgPlot.text(t2+0.1,0.001,"t2")
nrgPlot.vline(t1)
nrgPlot.vline(t2)
nrgPlot.show()
```

Ο ρυθμός μεταβολής του έργου της εξωτερικής δύναμης καθώς και της δύναμης απόσβεσης του συστήματος απεικονίζεται στο διάγραμμα του Σχήματος 24.



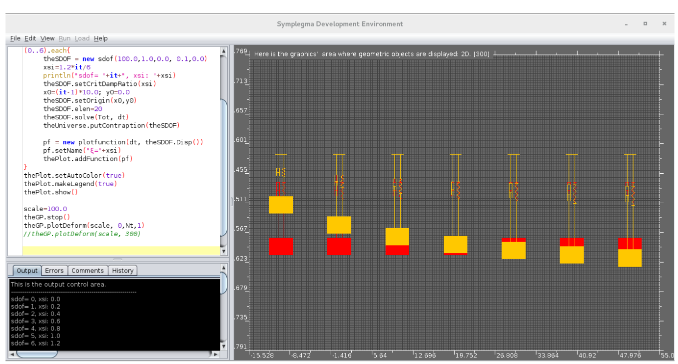
Σχήμα 24: Ρυθμός μεταβολής του έργου εξωτερικής και αποσβεστικής δύναμης, εν. 2.14.2.

2.14.3 Ελεύθερη ταλάντωση με χρήση του sdof στο SDE

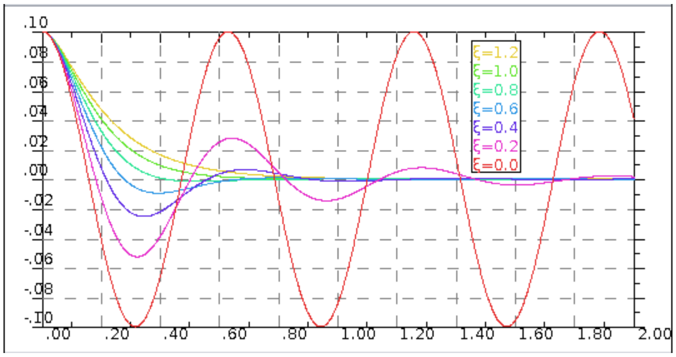
Έστω μια σειρά μονοβάθμιων ταλαντωτών σταδιακής διακύμανσης του ποσοστού κρίσιμης ταλάντωσης από μηδέν έως τη τιμή 1.2. Με αξιοποίηση του `sdof` στο SDE, αφού εισάγουμε το στιγμιότυπο του κάθε αντικείμενου `sdof` στο `theUniverse` με την μέθοδο `putContraption`, και αφού επιλύσουμε το περιβάλλον του SDE θα έχει παρόμοια εικόνα με αυτή του Σχήματος 25. Η απόκριση όπως υπολογίστηκε για κάθε ένα από τους ταλαντωτές σχεδιάζεται στο διαγράμματα του Σχήματος 26.

Κώδικας 6: Κώδικας υπολογισμού σειράς γραμμικών μονοβάθμιων ταλαντωτών και γραφικής απεικόνισης τους.

```
import courses.structuraldynamics.*
theUniverse.cls()
thePlot.clear()
Nt=2000
dt=0.001 as double
Tot=Nt*dt as double
(0..6).each{
  theSDOF = new sdof(100.0,1.0,0.0, 0.1,0.0)
  xsi=1.2*it/6
  println("sdof= "+it+", xsi: "+xsi)
  theSDOF.setCritDampRatio(xsi)
  x0=(it-1)*10.0; y0=0.0
  theSDOF.setOrigin(x0,y0)
  theSDOF.elen=20
  theSDOF.solve(Tot, dt)
  theUniverse.putContraption(theSDOF)

  pf = new plotfunction(dt, theSDOF.Disp())
  pf.setName("x="+xsi)
  thePlot.addFunction(pf)
}
thePlot.setAutoColor(true)
thePlot.makeLegend(true)
thePlot.show()

scale=100.0
theGP.plotDeform(scale, 0,Nt,1)
```



Σχήμα 25: Επίλυση και γραφική απεικόνιση τής σειράς των μονοβάθμιων ταλαντωτών, εν. 2.14.3.

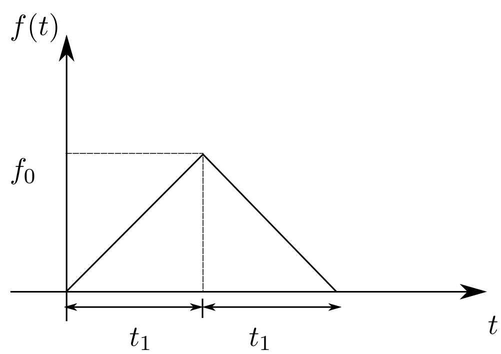


Σχήμα 26: Απόκριση κάθε συστήματος απο τή σειρά των μονοβάθμιων ταλαντωτών, εν. 2.14.3.

2.14.4 Απόκριση σε τριγωνικό πλήγμα και δημιουργία φάσματος

Στη περίπτωση αυτή, αν και θα μπορούσαμε να δουλέψουμε αναλυτικά, θα προτιμήσουμε εργαστούμε αριθμητικά με την χρήση της οντότητας `sdof` και της δυνατότητας που αυτή έχει για επίλυση της διαφορικής εξισωσης κίνησης με τη μέθοδο `duhamel`.

Το φορτίο είναι αυτό της εικόνας του Σχήματος 27, και εδώ έχουμε θεωρήσει f_0=96.6N, t_1=0.025sec. Η μάζα του μονοβάθμιου ταλαντωτή θα είναι



Σχήμα 27: Εξωτερική διέγερση τριγωνικού πλήγματος, εν. 2.14.4.

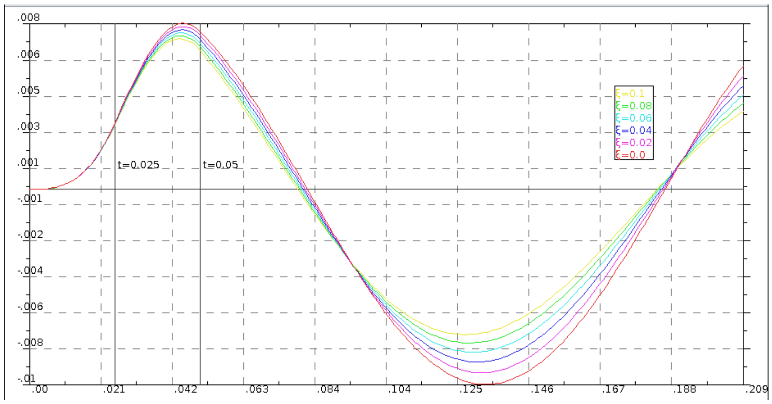
m=3kg και η δυσκαμψία k=2700N/m. Για την παρατήρηση της επιρροής της απόσβεσης στο σύστημα ο μονοβάθμιος ταλαντωτής επιλύθηκε για διάφορες τιμές του ποσοστού κρίσιμης απόσβεσης. Τα αποτελέσματα για τη μετακίνηση απεικονίζονται στο διάγραμμα της εικόνας του Σχήματος 28.

Κώδικας 7: Επίλυση `duhamel` του μονοβάθμιου ταλαντωτή `sdof` σε φόρτιση τριγωνικού πλήγματος και δημιουργία διαγραμμάτων

```
import courses.structuraldynamics.*
thePlot.clear()

f={double t ->
     t1=0.025
     val=0.0d
     if(t<=t1){val=1.0d*t/t1}else if(t<=2*t1){val=1.0d-(t-t1)/t1}
     return val*96.9
}

Nxsi=5
println("====================")
(0..Nxsi).each{
     theSDOF=new sdof(2700.0, 3.0)
     theSDOF.setCritDampRatio(it*0.1/Nxsi)

     theSDOF.setRHS(f as DoubleFunction)
     theSDOF.duhamel(1, 0.00001)

     pf=new plotfunction(theSDOF.dt(),theSDOF.Disp())
     pf.setName("x="+theSDOF.getCritDampRatio())
     thePlot.addFunction(pf)
     dval = max(theSDOF.maxDisp(),abs(theSDOF.minDisp()))
     println(theSDOF.getCritDampRatio()+" "+dval+" "+dval
     /(96.9/2700.0))
}
thePlot.setAutoColor(true)
thePlot.makeLegend(true)
thePlot.vline(0.025);thePlot.vline(0.05);thePlot.hline(0.0)
thePlot.text(0.025+0.001,0.001,"t=0.025")
thePlot.text(0.05+0.001,0.001,"t=0.05")
thePlot.show()
```

Ο λόγος της διάρκειας των κλάδων αύξησης και μείωσης του φορτίου, προς την ιδιοπερίοδος του αναπόσβεστου ταλαντωτή είναι $t_1/T \approx 0.12$. Η μέγιστη μετατόπιση προς την αντίστοιχη στατική u_{st}=f_0/k υπολογίζεται περίπου σε $u_{max}/u_{st} \approx 0.715$. Στη περίπτωση των αποσβέσεων που συμπεριλήφθηκαν στους υπολογισμούς (ξ=$2-10\%$) αντίστοιχος λόγος u_{max}/u_{st} κυμαίνεται σε τιμές στο διάστημα από 0.694 έως 0.617.

Για κατασκευή του φάσματος, με αριθμητική επίλυση της εξίσωσης κίνησης στην περίπτωση αναπόσβεστου συστήματος, ακολουθούμε την επόμενη τακτική. Έστω πως θα καθορίσουμε τον συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης D στο διάστημα από μηδέν έως $t_1/T \leq q$. Η ανισότητα αυτή εκφρασμένη ως προς τη δυσκαμψία θα έχει τη μορφή $k \leq \frac{4\pi^2 q^2 m}{t_1^2}$. Υπολογίζουμε την απόκριση για



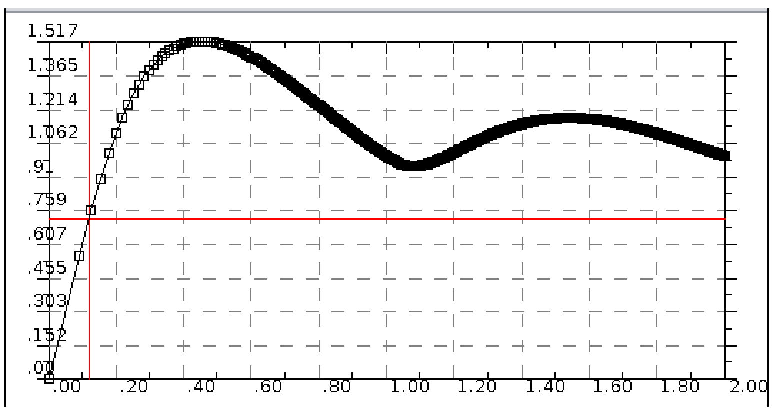
Σχήμα 28: Μετατόπιση του μονοβάθμιου συστήματος σε τριγωνικό πλήγμα για διάφορα ποσοστά κρίσιμης απόσβεσης, εν. 2.14.4.

ένα εύρος τιμών της δυσκαμψίας στο διάστημα $[0, \frac{4\pi^2 q^2 m}{t_1^2}]$, για κάθε λύση επιλέγουμε τη μεγίστη (απόλυτη) τιμή της μετακίνησης u_{max} και διαιρούμε με τη στατική λύση u_{st} ώστε να καθορίσουμε έτσι το ζεύγος τιμών $t_1/T, D$. Με το σύνολο αυτών τω σημείων μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα του ζητούμενου φάσματος. Το φάσμα όπως υπολογίσθηκε και σχεδιάστηκε με χρήση του Κώδικα [8] απεικονίζεται στην εικόνα του Σχήματος 29. Στο ίδιο διάγραμμα έχει επισημανθεί το σημείο του φάσματος, ως το σημείο τομής των ευθειών (σχεδιασμένες με κόκκινο χρώμα), για D=0.715 και $t1/T$=0.12 ώστε να επαληθευθούν τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους αυτής της ενότητας.

Κώδικας 8: Επίλυση `duhamel` του μονοβάθμιου ταλαντωτή `sdof` σε φόρτιση τριγωνικού πλήγματος, υπολογισμός φάσματος απόκρισης και δημιουργία διαγραμμάτων

```
import courses.structuraldynamics.*
thePlot.clear()
tx=[]; Dv=[]
t1=0.025; f0=96.9; m=3.0
f={double t ->
    val=0.0d
    if(t<=t1){val=1.0d*t/t1}else if(t<=2*t1){val=1.0d-(t-t1)/t1}
    return val*f0
}

Nm=500
(0..Nm).each{
    q=2.0 // max t1/T
    k=(q*q*4*PI*PI*m/(t1*t1))*it/Nm
```

```
    theSDOF=new sdof(k, m)

    theSDOF.setRHS(f as DoubleFunction)
    theSDOF.duhamel(5*t1, t1/100.0)
    tx.add(t1/theSDOF.getNaturalPeriod())
    dval=max(theSDOF.maxDisp(),abs(theSDOF.minDisp()))/(f0/k)
    Dv.add(dval)
}

thePlot=new PlotFrame()
thePlot.addFunction(new plotfunction(tx,Dv))
thePlot.setMarker(true)
thePlot.vline(0.12,Color.red)
thePlot.hline(0.715,Color.red)
thePlot.show()
```



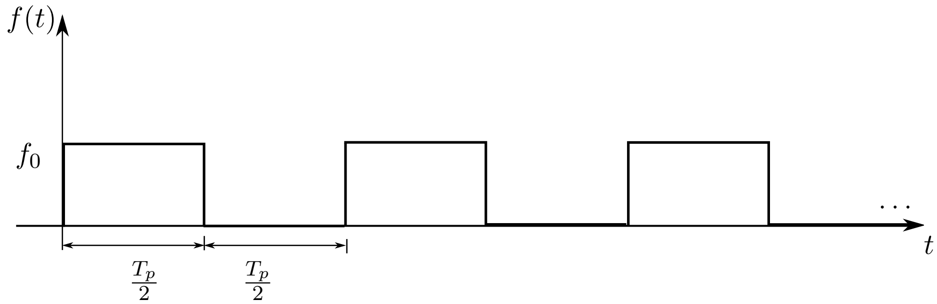
Σχήμα 29: Αριθμητική προσέγγιση φάσματος απόκρισης σε τριγωνικό πλήγμα. Οι άξονες συντεταγμένων αντιστοιχούν στο λόγο $\frac{t_0}{T}$ (οριζόντιος) και στο συντελεστή δυναμικής ενίσχυσης D, εν. 2.14.4.

2.14.5 Απόκριση σε περιοδικό παλμικό φορτίο ορθογωνικού τύπου

Το φορτίο θα έχει τη μορφή όπως στο Σχήμα 30 ,ενώ η συνάρτηση που τη περιγράφει μέσα σε μια περίοδο δίνεται από τη σχέση:

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{για } 0 \leq t \leq (T_p/2)^- \\ 0 & \text{για } (T_p/2)^+ \leq t \leq T_p \end{cases}$$

Θα αναλύσουμε τη συνάρτηση του φορτίου σε σειρά αρμονικών (Fourier), για



Σχήμα 30: Εξωτερική περιοδική διέγερση ορθογωνικού πλήγματος, εν. 2.14.5.

το λόγο αυτό υπολογίζουμε τους συντελεστές των εξ. (35), ξεκινώντας απο τον a_0,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} f(t)\,dt = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/2} f(t)\,dt + \frac{1}{T_p}\int_{T_p/2}^{T_p} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/2} f_0\,dt = \frac{f_0}{2}. \end{aligned}$$

Οι συντελεστές των συνημίτονων a_n υπολογίζονται ως,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} f(t)\cos n\omega_p t\,dt = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p/2} f_0\cos n\omega_p t\,dt = \frac{2}{T_p} f_0\left[\frac{\sin n\omega_p t}{n\omega_p}\right]_0^{T_p/2} \\ &= \frac{2}{T_p}\frac{f_0}{n\omega_p}\Big(\sin\left(n\omega_p\frac{T_p}{2}\right) - \sin 0\Big) = \frac{f_0}{n\pi}\sin(n\pi) = 0. \end{aligned}$$

Τέλος οι συντελεστές των ημίτονων b_n υπολογίζονται ως,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p} f(t)\sin n\omega_p t\,dt = \frac{2}{T_p}\int_0^{T_p/2} f_0\sin n\omega_p t\,dt = \frac{2}{T_p} f_0\left[-\frac{\cos n\omega_p t}{n\omega_p}\right]_0^{T_p/2} \\ &= \frac{2}{T_p}\frac{f_0}{n\omega_p}\Big(-\cos\left(n\omega_p\frac{T_p}{2}\right) + \cos 0\Big) = \frac{f_0}{n\pi}\Big(1-\cos(n\pi)\Big) \\ &= \begin{cases} \frac{2f_0}{n\pi} & \text{για } n \text{ περιττό,} \\ 0 & \text{για } n \text{ άρτιο.} \end{cases} \end{aligned}$$

Με χρήση των συντελεστών αυτών η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να γραφτεί, μέσω της εξ. (34) ως,

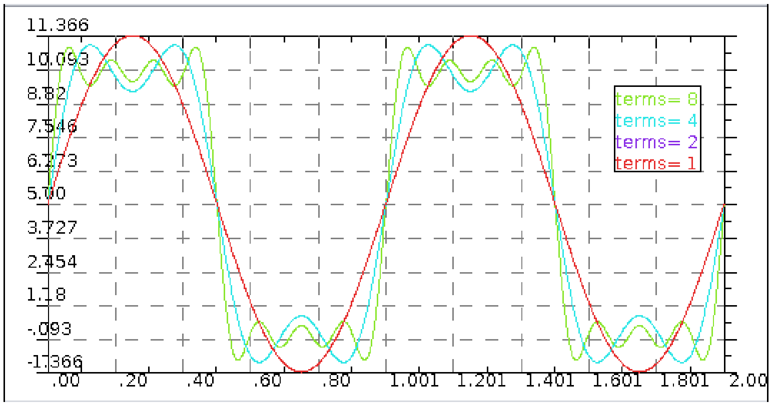
$$f(t) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2f_0}{n\pi} \sin(n\omega_p t)$$

Εδώ θα φτιάξουμε με χρήση του SDE το διάγραμμα της προσέγγισης της συνάρτησης για $f_0 = 10$ και $T_p = 1.0$ για ένα εύρος αριθμού τριγωνομετρικών όρων της σειράς. Πιο συγκεκριμένα στο Σχήμα 31 απεικονίζεται η προσέγγιση για 1, 2, 4 και 8 όρους, ενώ στο Σχήμα 32 για 100 όρους όπου μας επιτρέπεται να παρατηρήσουμε εύκολα και το φαινόμενο Gibbs λόγω της ασυνέχειας της συνάρτησης στα αντίστοιχα σημεία.

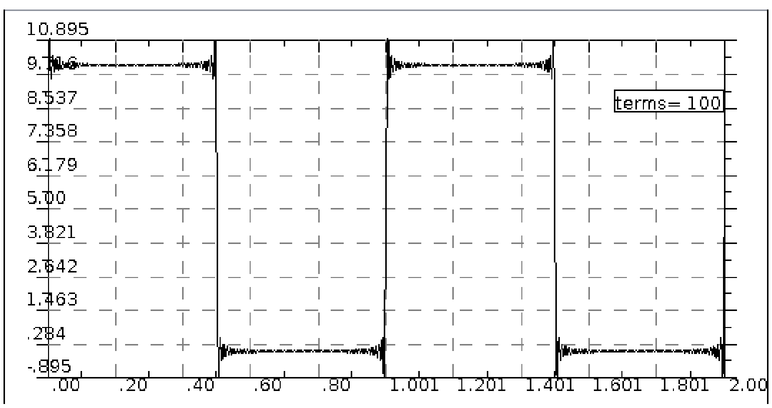
Κώδικας 9: Υπολογισμός περιοδικής συνάρτησης ορθογωνικού πλήγματος ως άθροισμα αρμονικών.

```
Tp=1.0 // period
Nt=1000 // discrete steps of time for computation
dt=Tp/(Nt-1) // time step

f0=10.0
omp=2.0*PI/Tp

nPeriods=10 // number of periods to be calculated and plotted
TimeHistoryPlot = new PlotFrame()
TimeHistoryPlot.setTitle("SDE Figure: Fourier series")

Niter=10 // keep it small
Nterms=1
(1..Niter).each{
  f=[]
  for(int q=0;q<nPeriods;q++){
    for(int k=0;k<Nt;k++){
      if(q==0){
        val=f0/2.0
        for(int n=1;n<=Nterms;n=n+2){
          val+=2.0*f0*sin(n*omp*k*dt)/(n*PI)
        }
        f.add(val)
      }else{
        f.add(f[k])
      }
    }
  }
  pf = new plotfunction(dt,f as double[])
  pf.setName("terms= "+Nterms)
  TimeHistoryPlot.addFunction(pf)
```

```
  Nterms=Nterms*2
}
TimeHistoryPlot.setAutoColor(true)
TimeHistoryPlot.makeLegend(true)
TimeHistoryPlot.show()
```



Σχήμα 31: Προσέγγιση της εξωτερικής περιοδικής διεγέρσης $f(t)$ με σειρά Fourier για 1, 2, 4 και 8 τριγωνομετρικούς όρους, εν. 2.14.5.



Σχήμα 32: Προσέγγιση της εξωτερικής περιοδικής διεγέρσης $f(t)$ με σειρά Fourier για 100 τριγωνομετρικούς όρους, εν. 2.14.5.

Έστω τώρα σύστημα μονοβάθμιου ταλαντωτή ιδιοπεριόδου T_0, δυσκαμψίας k και απόσβεσης που αντιστοιχεί σε ποσοστό κρίσιμης απόσβεσης ξ. Αναζητούμε την χρονοϊστορία της απόκρισης που ουσιαστικά και αφού έχουμε υπολογίσει τους συντελεστές Fourier, άμεσα υπολογίζουμε τη σχέση της εξ. (39).

$$u(t) = \frac{f_0}{2k} + \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2f_0}{n\pi k} \frac{(1-\beta_n^2)\sin(n\omega_p t) - 2\xi\beta_n \cos(n\omega_p t)}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}.$$

2.14.6 Απόκριση σε τυχαίο φορτίο με χρήση μετασχηματισμών Fourier

Δοθέντος μονοβάθμιου ταλαντωτή (k, m, c) καθώς και της συνάρτησης $f(t)$ της εξωτερικής διέγερσης θα υπολογιστεί η απόκριση με χρήση της αριθμητικής εφαρμογής των μετασχηματισμών Fourier. Η πορεία των υπολογισμών θα έχει ως εξης:

(α) Αριθμητικός υπολογισμός της μιγαδικής διακριτής συνάρτησης $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, εξ. (50), μέσω ευθύ FFT.

(β) Για ένα εύρος διακριτών τιμών της συχνότητας ω_i, υπολογισμός της απόκρισης, από εξ. (52), $U(\omega_i) = F(\omega_i)H(\omega_i)$.

(γ) Από τα ζεύγη $(\omega_i, U(\omega_i))$ και χρήση της εξ. .(54), μέσω αντίστροφου FFT, καθορισμός της $u(t)$ σε διακριτά χρονικά σημεία.

Το συγκεκριμένο παράδειγμα αφορά ένα ταλαντωτή δυσκαμψίας k=1000, μάζας m=1.0 και ποσοστού κρίσιμης απόσβεσης ξ=0.1. Η εξωτερική διέγερση δίνεται από την παράθεση τεσσάρων αρμονικών ως

$$f(t) = \sum_{n=1}^{4} a_n \sin(\omega_n t)$$

τα ζεύγη (a_i, ω_i) είναι για $i = 1, 2, 3, 4$, αντίστοιχα $(10.0, 1.1\omega_0)$, $(100, 8.0\omega_0)$, $(15.0, 12.1\omega_0)$ και $(22.0, 17.0\omega_0)$.

Ο κώδικας που παρατίθεται στα αντίστοιχα πλαίσια από Κώδικα [10] έως Κώδικα [13] αντιμετωπίζει και επαληθεύει το πρόβλημα που τίθεται εδώ και θα περιγράψουμε σε ότι ακολουθεί. Ο κώδικας μπορεί να εκτελεστεί συνολικά ή σε διαδοχική συνέχεια. Στον Κώδικα [10] καθορίζεται ο μονοβάθμιος ταλαντωτής ως ένα αντικείμενο `sdof` του πακέτου `courses.structuraldynamics`. Επιπλέον καθορίζεται η εξωτερική διέγερση $f(t)$ ως ένα συναρτησιακό αντικείμενο (closure) της groovy. Τέλος καθορίζονται το πλήθος των χρονικά διακριτών σημείων Nt ως δύναμη του δύο[13], αλλά και το χρονικό βήμα dt καθώς

[13] Η αποδοτικότητα, όσο αφορά το χρόνο υπολογισμών, της FFT έχει ως προϋπόθεση πως το σύνολο των διακριτών σημείων του σήματος είναι δύναμη του δύο (2^n). Αν το

και ο συνολικός χρόνος Tot. Σημειώνεται πως η συχνότητα δειγματοληψίας (samplign rate) είναι το αντίστροφο του βήματος χρονικής διακριτοποίησης, $Fs = 1/dt$.

Κώδικας 10: Εισαγωγή δεδομένων ταλαντωτή, διέγερσης και χρονικής διακριτοποίησης

```
import courses.structuraldynamics.*

k=100.0; m=1.0; xsi=0.1
theSDOF = new sdof(k,m)
theSDOF.setCritDampRatio(xsi)

om_0=theSDOF.getNaturalFrequency(); println ("om_0= "+om_0)
om_ext_1=1.1*om_0; a_1=10.0; println ("om_ext_1= "+om_ext_1)
om_ext_2=8.0*om_0; a_2=100.0; println ("om_ext_2= "+om_ext_2)
om_ext_3=12.1*om_0; a_3=15.0; println ("om_ext_1= "+om_ext_1)
om_ext_4=17.0*om_0; a_4=22.0; println ("om_ext_2= "+om_ext_2)

f={
  (a_1*sin(om_ext_1*it)+a_2*sin(om_ext_2*it)
  +a_3*sin(om_ext_3*it)+a_4*sin(om_ext_4*it))
}

Nt=2**14-1
dt=0.001d
Tot=Nt*dt
```

Στο επόμενο μπλοκ, που παρατίθεται ως Κώδικας [11], πραγματοποιείται ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier $F(\omega)$ της $f(t)$ μέσω του αλγόριθμου FFT, ουσιαστικά αφορά το μέρος (α) της πιο πάνω λίστας (βλ. και Σχήμα 33). Επιπλέον καλείται η μέθοδος `TrasferFunction` του αντικείμενου `sdof` που μας παρέχει τη συνάρτησης μεταφοράς $H(\omega)$ σε κάποια συχνότητα ω (βλ. και Σχήμα 34), και υπολογίζεται η συνάρτηση της απόκρισης στο πεδίο της συχνότητας ως το γινόμενο $F(\omega)H(\omega)$ (βλ. και Σχήμα 35) οπότε και μιλάμε για το μέρος (β) της λίστας στην εισαγωγή της ενότητας.

Κώδικας 11: Διακριτός μετασχηματισμός μέσω FFT στην $f(t)$, υπολογισμός του $U(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ και δημιουργία διαγραμμάτων

```
FFT_f_Plot= new PlotFrame()
FFT_h_Plot= new PlotFrame()
FFT_u_Plot= new PlotFrame()
fext=[]
```

εισερχόμενο σήμα έχει πλήθος σημείων που δεν είναι δύναμη του δύο, αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να βρούμε την αμέσως επόμενη μεγαλύτερη δύναμη του δύο και τα σημεία που έπονται του σήματος να τα συμπληρώσουμε με μηδενικά.

```
(0..Nt).each{fext.add(f(it*dt))}

fft= new FastFourierTransformer(DftNormalization.STANDARD)

F_f = fft.transform(fext as double[], TransformType.FORWARD)
Lp=F_f.size()

freq=[]
freqplt=[]
F_fplt=[]

F_h=[]
F_hplt=[]
F_u=[]
F_uplt=[]

Fs=1.0/dt
(0..(Lp)/2).each{
  freqplt.add(2.0*PI*it*Fs/Lp)
  F_fplt.add(F_f[it].abs()/(Lp/2.0))

  freq.add(freqplt[it])

  F_h.add(theSDOF.TransferFunction(freqplt[it]))
  F_hplt.add(F_h[it].abs())

  F_u.add(F_h[it]*F_f[it])
  F_uplt.add(F_u[it].abs())
}

(2..(Lp)/2).each{
  freq.add(-freqplt[-it])
  F_h.add(theSDOF.TransferFunction(-freqplt[-it]))
  F_u.add(theSDOF.TransferFunction(-freqplt[-it])*F_f[-it])
}

FFT_f_Plot.addFunction(new plotfunction(freqplt as double[],
    F_fplt))
FFT_f_Plot.setMarker(true)
FFT_f_Plot.Title("FFT, F[f(t)]=F(w) of excitation function")
FFT_f_Plot.show()

FFT_h_Plot.addFunction(new plotfunction(freqplt as double[],
    F_hplt))
FFT_h_Plot.setMarker(true)
FFT_h_Plot.Title("FFT, F[h(t)]=H(w) of transfer function")
FFT_h_Plot.show()

pf=new plotfunction(freqplt as double[], F_uplt)
```

```
pf.setName("F[u(t)]=F(w)H(w)")
FFT_u_Plot.addFunction(pf)
FFT_u_Plot.Title("FFT, F[u(t)]=F(w)H(w) of response")
FFT_u_Plot.show()
```

Έχοντας υπολογίσει την συνάρτηση της απόκρισης στο πεδίο των συχνοτήτων $U(\omega)$ ως το γινόμενο $F(\omega)H(\omega)$, μπορούμε όπως περιγράφεται και στο μέρος (γ) της λίστας, να λάβουμε τη χρονοϊστορία της απόκρισης ως συνάρτηση στο πεδίο του χρόνου από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Αυτό πραγματοποιείται στον Κώδικα [12]. Ταυτόχρονα, για λόγους σύγκρισης και εξακρίβωσης, στο κομμάτι αυτό του κώδικα υπολογίζεται η απόκριση στο χρόνο μέσω αριθμητικής προσέγγισης του συνελικτικού ολοκληρώματος του Duhamel. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούμε να τα δούμε στο διάγραμμα του Σχήματος 36.

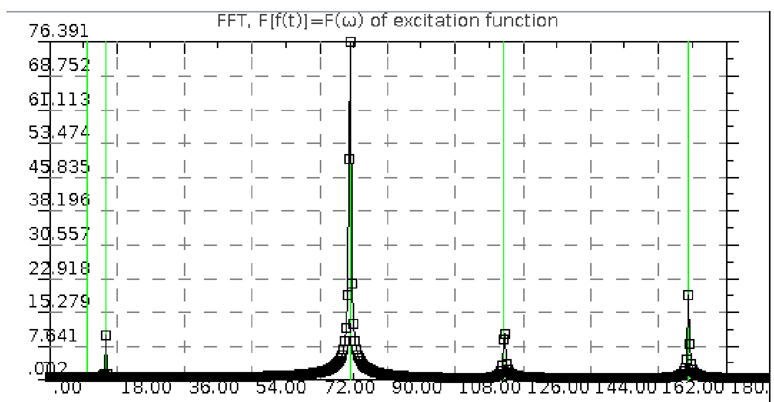
Κώδικας 12: Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier στην $U(\omega)$ ώστε να προκύψει το $u(t)$ και δημιουργία διαγραμμάτων.

```
u = fft.transform(F_u as Complex[], TransformType.INVERSE)
ResponsePlot= new PlotFrame()
uplt=[]
(0..<u.length).each{
   uplt.add(2.0*u[it].re())
}
pf=new plotfunction(dt,uplt as double[])
pf.setName("IFFT[U(w)]=u(t)")
ResponsePlot.addFunction(pf)

theSDOF.setRHS(f as DoubleFunction)
theSDOF.duhamel(Tot,dt)

pf=new plotfunction(dt,theSDOF.Disp())
pf.setName("Duhamel u(t)")
ResponsePlot.addFunction(pf)
ResponsePlot.setMarker(true)
ResponsePlot.Title("IFFT, F^(-1)[U(w)]=u(t) of response")
ResponsePlot.setAutoColor(true)
ResponsePlot.makeLegend(true)
ResponsePlot.hline(0.0)
ResponsePlot.show()
```

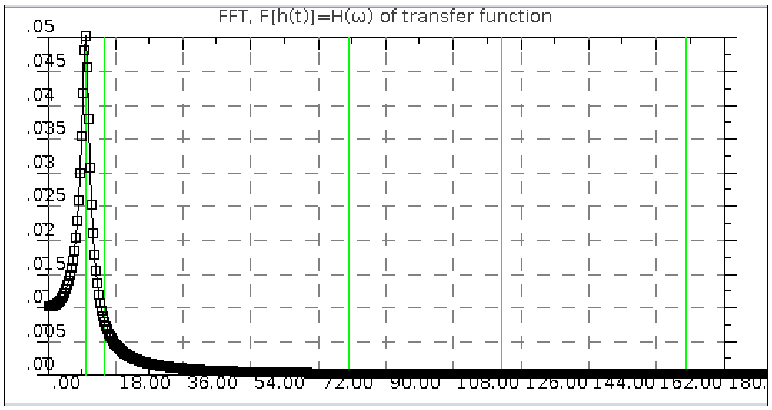
Επιπλέον και ως μια περαιτέρω επαλήθευση της ορθότητας θέτουμε τη λύση της απόκρισης από την αριθμητική προσέγγιση του συνελικτικού ολοκληρώματος του Duhamel ώστε να συγκρίνουμε με το αντίστοιχο γινόμενο $F(\omega)H(\omega)$.

Κώδικας 13: Ευθύς μετασχηματισμός Fourier στη λύση $u(t)$ υπολογισμένη αριθμητικά μέσω του ολοκληρώματος Duhamel ώστε να προκυψει το $U(\omega)$ και σύγκριση με το αντίστοιχο $F(\omega)H(\omega)$. Ανανέωση διαγραμμάτων.

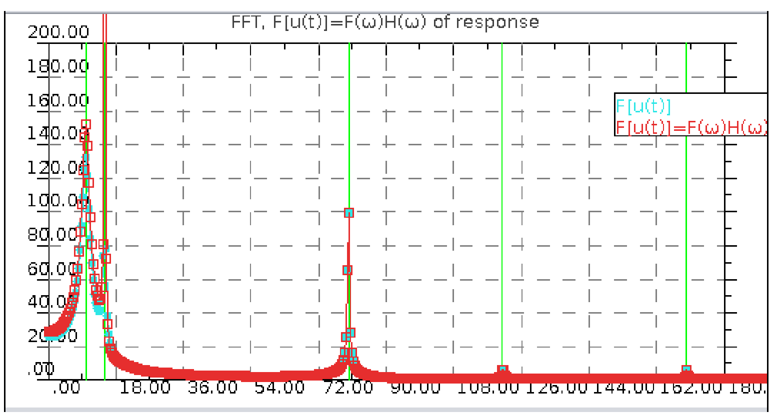
```
F_un = fft.transform(theSDOF.Disp(), TransformType.FORWARD)
Lp=F_un.size()

F_unplt=[]

Fs=1.0/dt
(0..(Lp)/2).each{
   F_unplt.add(F_un[it].abs())
}

pf=new plotfunction(freqplt as double[], F_unplt)
pf.setMarkerStyle(1)
pf.setMarkerFill(true)
pf.setName("F[u(t)]")
FFT_u_Plot.addFunction(pf)
FFT_u_Plot.setMarker(true)
FFT_u_Plot.setAutoColor(true)
FFT_u_Plot.makeLegend(true)
FFT_u_Plot.show()
```



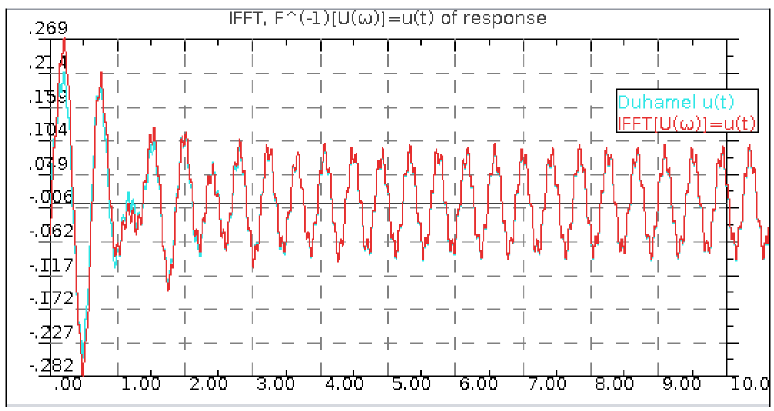
Σχήμα 33: Μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η απόλυτη τιμή των μιγαδικών σημείων ενώ με τις πράσινες κατακόρυφες ευθείες σημειώνονται οι η ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή και οι συχνότητες της φόρτισης ω_1 εως ω_4.



Σχήμα 34: Η μιγαδική συνάρτηση μεταφοράς στο πεδίο της συχνότητας



Σχήμα 35: Η συνάρτηση απόκρισης στο πεδίο της συχνότητα υπολογισμένη με δύο τρόπους. Σύμφωνα με τον πρώτο από αυτούς, υπολογίζουμε το γινόμενο $F(\omega)H(\omega)$, ενώ κατά το δεύτερο χρησιμοποιούμε απευθείας μετασχηματισμό Fourier στη λύση που δίνεται από το συνελικτικό ολοκλήρωμα του Duhamel.



Σχήμα 36: Απόκριση στο χρόνο ως αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης που προκύπτει από το γινόμενο $F(\omega)H(\omega)$. Επιπλέον δίνεται και η λύση από τον αριθμητικό υπολογισμό του συνελικτικού ολοκληρώματος του Duhamel.

2.14.7 Υλοποίηση μεθόδου β-Newmark

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία με τα βήματα που δίνονται στον Πινάκα 5 θα παρουσιάσουμε εδώ τον κώδικα υλοποίησης και χρήσης της μεθόδου β-Newmark. Η εφαρμογή θα γίνει για την ελεύθερη ταλάντωση σε ένα σύστημα, τα χαρακτηριστικά (δυσκαμψία, μάζα, απόσβεση) του οποίου μπορεί κάνεις να τα δει στο σώμα του Κώδικα [14], με χρήση της μεθόδου γραμμικής επιτάχυνσης για περιπτώσεις διαδοχικά αυξανόμενου βήματος χρονικής ολοκλήρωσης, σε σχέση με τη κρίσιμη τιμή βήματος χρονικής ολοκλήρωσης που δίνεται από τη σχέση της εξ. (59), από $0.1\Delta t_{cr}$ έως $1.01\Delta t_{cr}$. Συγκεκριμένα, στην Εικόνα 37 στην αριστερά στήλη απεικονίζονται τα διαγράμματα της μετακίνησης u με το χρόνο t, στη μεσαία στήλη τα διαγράμματα της ταχύτητας v στο χρόνο t, ενώ στη δεξιά τα διαγράμματα στο χώρο φάσης ή κατάστασης σε όρους μετακίνησης $u-v$ και ταχύτητας v. Από πάνω προς τα κάτω το βήμα χρονικής ολοκλήρωσης $\Delta t =$ λαμβάνει τις τιμές 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 0.99, 1.0, 1.01 του Δt_{cr}, αντίστοιχα. Μπορούμε να παρατηρήσουμε, στις εικόνες αυτές, πως μέχρι και τη τιμή $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$ η λύση είναι ευσταθής, χωρίς δηλαδή να εισάγεται ενέργεια στο σύστημα. Βέβαια ή ακρίβεια της μεθόδου ελαττώνεται όσο αυξάνει η τιμή του βήματος Δt.

Κώδικας 14: Υλοποίηση και χρήση της μεθόδου β-Newmark.

```
k=1000.0; m=1.0; c=1.0
u0=0.0; v0=1.0
// external loading could be any function of time
// e.g.: f={sin(2.0*sqrt(k/m)*it)}
// however here we assume free vibration, therefore:
f={0.0}

g=1.0/2.0 // gamma
b=1.0/6.0 // beta

om=sqrt(k/m); xsi=c/(2*m*om)
dtcr=1/om*( xsi*(g-0.5)+sqrt(0.5*g-b+(xsi*xsi*(g-0.5)*(g-0.5)))
    )/(0.5*g-b)

dt=1.0*dtcr
N=1000

u=new double[N+1]; u[0]=u0
v=new double[N+1]; v[0]=v0
a=new double[N+1]; a[0]=(f(0)-c*v[0]-k*u[0])/m

//beta-Newmark coefficients
w0=1/(b*dt*dt); w1=g/(b*dt);        w2=1/(b*dt);   w3=1.0/(2*b)-1.0
w4=g/b-1.0;     w5=(g/b-2.0)*dt/2.0;  w6=dt*(1.0-g);   w7=dt*g
```

```

// K_effective
kef=k+w0*m+w1*c

// iterative computations
(1..N).each{
  // effective load
  fef=f(it*dt)+m*(w0*u[it-1]+w2*v[it-1]+w3*a[it-1])+c*(w1*u[it
    -1]+w4*v[it-1]+w5*a[it-1])

  // solve for current displacement
  u[it]=fef/kef

  // current acceleration and velocity
  a[it]=w0*(u[it]-u[it-1])-w2*v[it-1]-w3*a[it-1]
  v[it]=v[it-1]+w6*a[it-1]+w7*a[it]
}

x=u; y=v // x,y could take the values of dt, u, v
respPlot= new PlotFrame()
respPlot.addFunction(new plotfunction(x,y))
respPlot.setMarker(false)
respPlot.show()
```

2.14.8 Μονοβάθμιος ταλαντωτής με γραμμικά ελαστικό – γραμμικά κρατυνόμενο ελατήριο

Μια γενίκευση του ελαστοπλαστικού μοντέλου που είδαμε στην παράγραφο 2.12.3 αφορά τα ελατήρια με δυνατότητα να παραλάβουν επιπλέον μεγαλύτερη δύναμη μετά η διαρροή, ιδιότητα που είναι γνωστή ως κράτυνση. Πιο συγκεκριμένα εδώ θεωρούμε ένα ελαστοπλαστικό ελατήριο με κινηματική κράτυνση, ο καταστατικός νόμος του οποίου μπορεί να αποδοθεί σχηματικά όπως στο Σχήμα 38. Και σε αυτό το παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο β-Newmark αφού τη γράψουμε σε κατάλληλη αυξητική μορφή. Η ενεργός δυσκαμψία στο χρονικό βήμα n δίνεται από τη σχέση

$$\hat{k}_n = k_n + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta \Delta t^2} m \tag{83}$$

ενώ η ενεργός διέγερση του βήματος θα είναι

$$\Delta\hat{f}_n = f_{n+1} - f_n + \left(\Delta t(\frac{\gamma}{2\beta} - 1)c + \frac{1}{2\beta}m\right)\ddot{u}_n + \left(\frac{\gamma}{\beta}c + \frac{1}{\beta\Delta t}m\right)\dot{u}_n \tag{84}$$

και με επίλυση της εξίσωσης

$$\hat{k}_n\Delta u_n{=}\Delta\hat{f}_n \tag{85}$$

υπολογίζεται το βήμα Δu_n. Επιπλέον για τη ταχύτητα θα έχουμε τη σχέση,

$$\Delta\dot{u}_n = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_n - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_n + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_n \tag{86}$$

Επειτα επιλύουμε την εξ. (74) στο βήμα n ως προς $\Delta\ddot{u}$,

$$\Delta\ddot{u}_n = \frac{\Delta f_n}{m} - \frac{c}{m}\Delta\dot{u}_n - \frac{k_n}{m}\Delta u_n. \tag{87}$$

Αφού υπολογιστούν τα παραπάνω πρέπει να γίνουν οι απαραίτητοι έλεγχοι σχετικά με την πιθανή διαρροή του ελατηρίου αλλά και την περίπτωση αποφόρτισης. Τα δεδομένα αυτά μας εφοδιάζουν και με την δυνατότητα επιλογής της τρέχουσας δυσκαμψίας k_{ep} του ελατηρίου ανάμεσα στην αρχική k και αυτή της κράτυνσης k_h. Για το λόγο αυτό υπολογίζεται το επίπεδο της διαρροής από τη σχέση,

$$f^{yield}(u_{n+1}, \dot{u}_{n+1}) = k_h u_{n+1} + (k - k_h)u_y \mathrm{sgn}(\dot{u}_{n+1}) \tag{88}$$

και ελέγχουμε τις επόμενες περιπτώσεις.
Αρχικά για τον έλεγχο διαρροής:

(α) Αν $k_{ep}{=}k$ και $\dot{u}_{n+1} > 0$ και $k_{ep}(u_{n+1} - u_p) > f^{yield}$, το σύστημα έχει ξεπεράσει πρώτη φορά, θετικά, το επίπεδο διαρροής. Θέτουμε $k_{ep}{=}k_h$ και $u_p{=}(1 - k/k_h)u_y$.

(β) Αν $k_{ep}{=}k$ και $\dot{u}_{n+1} < 0$ και $k_{ep}(u_{n+1} - u_p) < f^{yield}$, το σύστημα χει ξεπεράσει πρώτη φορά, αρνητικά, το επίπεδο διαρροής. Θέτουμε $k_{ep}{=}k_h$ και $u_p{=}(k/k_h - 1)u_y$.

Ακολουθεί ο έλεγχος αποφόρτισης:

(γ) Αν $k{=}k_h$ και $\dot{u}_{n+1}\dot{u}_n < 0$. Θέτουμε $k_{ep}{=}k$ και $u_p{=}u_{n+1}{-}(k_h/k{-}1)(u_{n+1}{-}u_p)$.

Η δύναμη επαναφοράς στο ελατήριο θα είναι $f_{S n+1}{=}k_{ep}(u_{n+1} - u_p)$.

Εδώ παρουσιάζουμε αποτελέσματα για τη περίπτωση ενός συστήματός κάτω από την επίδραση αρμονικού φορτίου. Τα στοιχεία του προβλήματος μπορούν να εξαχθούνε από το σώμα του κειμένου του κώδικα που παρουσιάζεται στο πλαίσιο Κώδικα [15].

Κώδικας 15: Ελαστοπλαστικό σύστημα ταλάντωσης, επίλυση με χρήση της μεθόδου β-Newmark σε αυξητική μορφή.

```
k=1000.0; kh=0.25*k; m=10.0; c=1.0
fsy=8.0; uy=fsy/k
u0=0.0 ; v0=0.0// initial displacement u0 should be lower than
    uy
upl=0.0
f={100.0*sin(10.5*sqrt(k/m)*it)}

g=1.0/2.0 // gamma
b=1.0/4.0 // beta

dt=0.001
N=1000

u=new double[N+1]; u[0]=u0
v=new double[N+1]; v[0]=v0
a=new double[N+1]; a[0]=(f(0)-c*v[0]-k*u[0])/m
fs=new double[N+1]; fs[0]=k*u0

plastic=false
kep=k
// iterative computations
(1..N).each{
  // K_effective
  kef=kep+m/(b*dt*dt)+c*g/(b*dt)

  // effective load
  fef=f(it*dt)-f((it-1)*dt)+m*(v[it-1]/(b*dt)+a[it-1]/(2.0*b))+c
    *(v[it-1]*g/b+a[it-1]*dt*(g/(2.0*b)-1.0))

  // solve for current displacement step
  du=fef/kef
  u[it]=u[it-1]+du

  // current acceleration and velocity
  v[it]=v[it-1]+du*g/(b*dt)-v[it-1]*g/b+a[it-1]*g*(1.0-g/(2.0*b)
    )
  a[it]=(f(it*dt)-c*v[it]-kep*u[it])/m

  // check yielding
```

```
    yield=kh*u[it]+(k-kh)*uy*signum(v[it])
    if(!plastic){
        if(v[it]>0.0 && kep*(u[it]-upl)>yield){
            kep=kh
            upl=(1.0-k/kh)*uy
            plastic=true
            alter=true
        }
        if(v[it]<0.0 && kep*(u[it]-upl)<yield){
            kep=kh
            upl=(k/kh-1.0)*uy
            plastic=true
            alter=true
        }
    }else{
        if(v[it]*v[it-1]<0){
            kep=k
            upl=u[it]-(u[it]-upl)*kh/k
            plastic=false
            alter=true
        }
    }
    fs[it]=kep*(u[it]-upl)
}
ufPlot = new PlotFrame()
ufPlot.addFunction(new plotfunction(u,fs))
ufPlot.vline(0.0)
ufPlot.hline(0.0)
ufPlot.incline(kh,uy,fsy,Color.blue)
ufPlot.incline(kh,-uy,-fsy,Color.blue)
ufPlot.setMarker(true)
ufPlot.show()

tuPlot = new PlotFrame()
tuPlot.addFunction(new plotfunction(dt,u))
tuPlot.hline(uy,Color.red)
tuPlot.hline(-uy,Color.red)
tuPlot.setMarker(true)
tuPlot.show()

tvPlot = new PlotFrame()
tvPlot.addFunction(new plotfunction(dt,v))
tvPlot.setMarker(true)
tvPlot.show()
```

Τα αποτελέσματα σε μορφή διαγραμμάτων που δημιουργούνται από τον κώδικα απεικονίζονται στις εικόνες των Σχημάτων 39-41.

2.14.9 Σύγκριση των λύσεων μη-γραμμικής και γραμμικοποιημένης θεώρησης του απλού εκκρεμούς

Σε αυτή τη παράγραφο θα συγκρίνουμε την απόκριση που λαμβάνουμε για το απλό εκκρεμές από τη θεώρηση μη-γραμμικής με αυτή της γραμμικής προσέγγισης. Τη λύση και για τις δυο περιπτώσεις θα την καθορίζουμε από αριθμητική επίλυση με χρήση της οντότητας `pendulum` και της συνάρτησης αυτής `solve` που είναι μια υλοποίηση της `Runge--Kutta` τέταρτης τάξης. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε εδώ αφορούν ένα εκκρεμές μοναδιαίου μήκους κάτω από αρχικές συνθήκες μηδενικής γωνιακής ταχύτητας και μια σειράς από αρχικές γωνιακές μετατοπίσεις. Ο κώδικας[14] που χρησιμοποιούμε μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί ώστε να γίνουν παραμετρικά αριθμητικά πειράματα.

Όπως μπορούμε να δούμε και στα αποτελέσματα στα διαγράμματα του Σχήματος 43 η γραμμική προσέγγιση είναι σχετικά ικανοποιητική μόνο για πολυ μικρές τιμές του εύρους της γωνιακής μετατόπισης. Οριακή περίπτωση αποτελεί αυτή της αρχικής γωνιακής μετατόπισης ίσης με 180^o (κατακόρυφη θέση), η οποία εντούτοις βρίσκεται εντελώς εκτός ορίων καταλληλότητας της γραμμικής θεώρησης. Σε αυτή τη περίπτωση, σύμφωνα με την γραμμική θεώρηση υπολογίζεται κάποια περιστροφική κίνηση ενώ η μη-γραμμική θεώρηση σωστά προβλέπει ηρεμία (ακινησία) δηλαδή εντοπίζει μια θέση ισορροπίας, αν και ασταθούς.

2.14.10 Αριθμητική επίλυση εξίσωσης Duffing

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες μη-γραμμικά συστήματα υπό περιοδική διέγερση και κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, αποκρίνονται μη περιοδικά. Η συμπεριφορά αυτή ενός δυναμικού συστήματος ονομάζεται και *χαοτική*[15]. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η χαοτική απόκριση του Ueda που εμφανίζεται σε ένα ταλαντωτή Duffing όταν διεγείρεται αρμονικά. Η αντίστοιχη διαφορική σχέση που δίνεται στην εξ. (81) θα είναι τώρα,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + \mu u^3 = f_0 \cos(\bar{\omega} t) \tag{89}$$

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος θεωρούμε την εξίσωση στην μορφή συστήματος πρώτης τάξης όπως δίνεται στις εξ. (82) και χρησιμοποιούμε δυνατότητες που μας παρέχει η βιβλιοθήκη Apache Commons Mathematics όπως φαίνεται στο σώμα του κειμένου του Κώδικα 16.

[14] `https://www.eclass.tuc.gr/modules/document/file.php/MPD139/CGPanagiotopoulos_Course_2017-2018/climax_scripts/pendulum_Contraption.climax`

[15] Α. Καναράχος, Ι. Αντωνιάδης, Δυναμική Μηχανών, εκδ. Παπασωτηρίου, 1998

Κώδικας 16: Αριθμητική επίλυση ταλαντωτή Duffing με την Runge–Kutta τέταρτης τάξης. Αξιοποίηση της βιβλιοθήκης Apache Commons Mathematics απευθείας στο περιβάλλον του SDE.

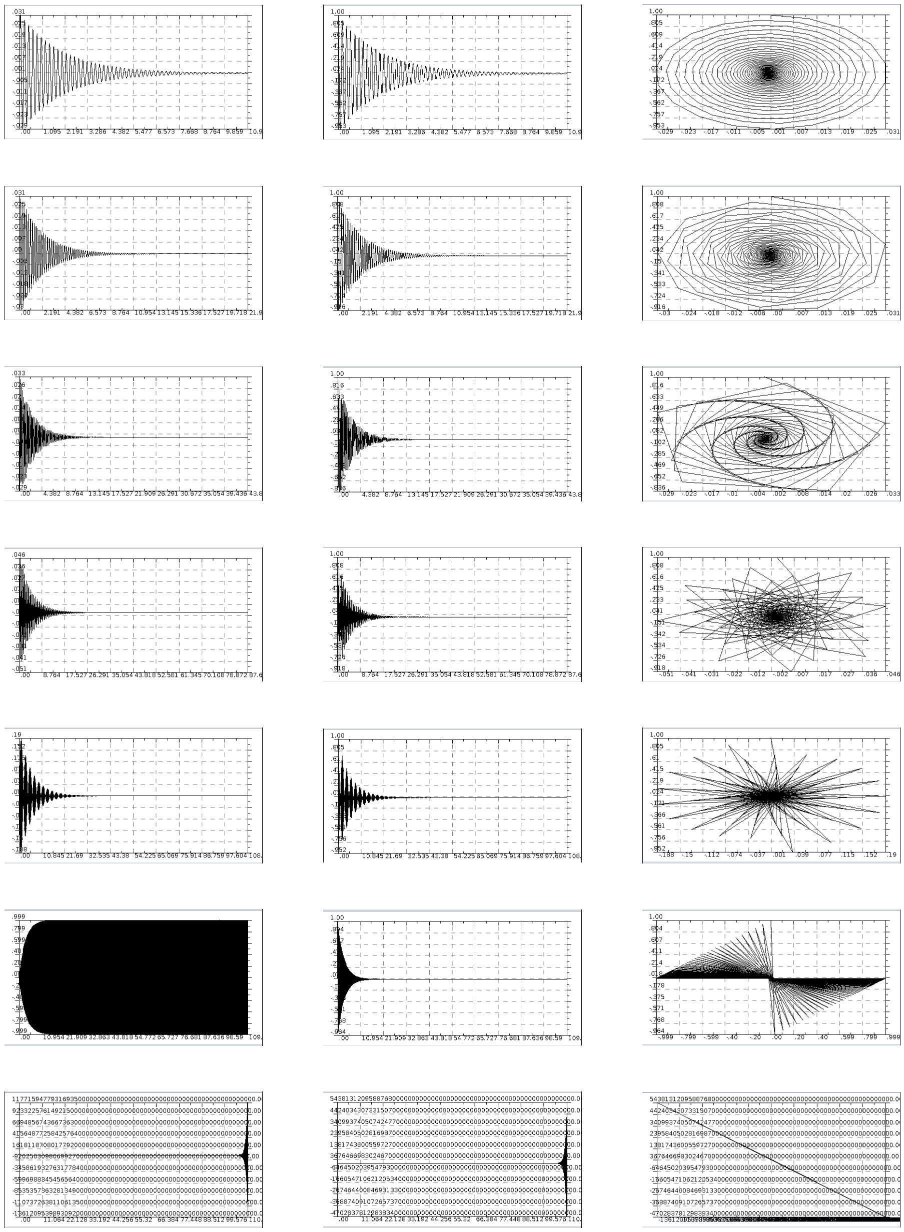
```
import org.apache.commons.math3.ode.
    FirstOrderDifferentialEquations
import org.apache.commons.math3.ode.nonstiff.
    ClassicalRungeKuttaIntegrator
import org.apache.commons.math3.ode.ContinuousOutputModel

class duffing implements FirstOrderDifferentialEquations{

  Closure f;
  double m,c,k,mu;

  duffing(double m, double k, double mu, double c, Closure f) {
    this.f = f;
    this.m = m;
    this.k = k;
    this.mu = mu;
    this.c = c;
  }

  int getDimension() {
    return 2;
  }

  void computeDerivatives(double t, double[] y, double[] yDot) {
    yDot[0] = y[1]
    yDot[1] = -c*y[1]/m-k*y[0]/m-mu*y[0]*y[0]*y[0]/m+f(t)/m
  }

}

double dt=0.01
CRK = new ClassicalRungeKuttaIntegrator(dt)
gamma=7.5
omega=1.0
f={gamma*cos(omega*it)}

ode = new duffing(1.0,0.0,1.0,0.05,f);
double[] y = [3.1, 4.1]; // initial state

tracker = new ContinuousOutputModel()

CRK.addStepHandler(tracker);

double tot=250.0*PI
CRK.integrate(ode, 0.0, y, tot, y);
```

```
u=[]
v=[]
(0..tot/dt).each{
   tracker.setInterpolatedTime(it*dt)
   res=tracker.getInterpolatedState()
   u.add(res[0])
   v.add(res[1])
}

thePlot.addFunction(new plotfunction(u as double[],v as double
     []))
thePlot.show()
```

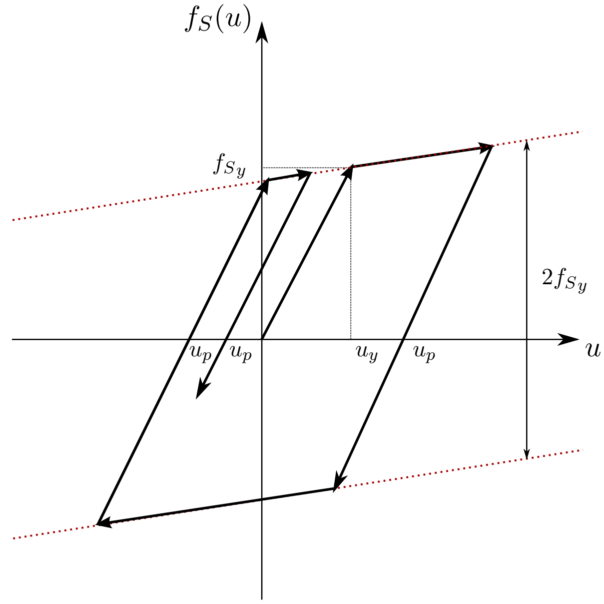
Ενδεικτικά παρουσιάζουμε αποτελέσματα για τη περίπτωση όπου k=0.05, m=1, c=0 και μ=1.0, ενώ η αρμονική διέγερση θα έχει τη μορφή $f(t) = 7.5\cos t$. Έχουμε θεωρήσει δυο περιπτώσεις αρχικών συνθηκών οι οποίες και είναι πολυ κοντά η μια στην άλλη. Η πρώτη (α) θα είναι για (u_0, v_0)=$(3.0, 4.0)$ και η δεύτερη (β) για (u_0, v_0)=$(3.01, 4.01)$.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της χαοτικής απόκρισης είναι η μεγάλη ευαισθησία της σε αλλαγές των αρχικών συνθηκών. Μικρές αποκλίσεις στις αρχικές συνθήκες, οι οποίες στην πραγματικότητα είναι αναπόφευκτες, οδηγούν σε μεγάλες αποκλίσεις της απόκρισης στα χαοτικά δυναμικά συστήματα. Αυτό φαίνεται χαρακτηριστικά στα διαγράμματα των Σχημάτων 44-46, όπου μια μικρή διαταραχή των αρχικών συνθηκών οδηγεί, από αρχικά ταυτόσημες αποκρίσεις, σε σημαντικές αποκλίσεις με τη πάροδο του χρόνου. Σημειώνεται επιπλέον ότι, με παρόμοιο του κώδικα που παρουσιάσαμε σε αυτή την παράγραφο και για μικρές ίσως παραλλαγές του συγκεκριμένου παραδείγματος, έχει δημιουργηθεί βίντεο[16] που παρουσιάζει τη χρήση και αξιοποίηση στο περιβάλλον του SDE. Στιγμιότυπο από παρόμοιο βίντεο απεικονίζεται στην εικόνα του Σχήματος 47.

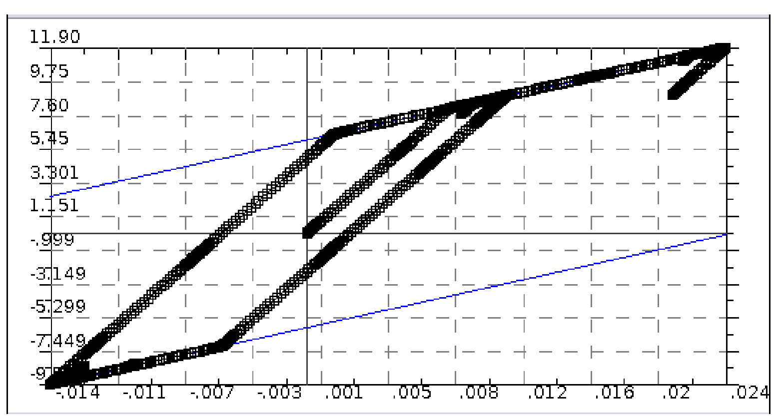
[16] https://youtu.be/mrwdPwc2M9g



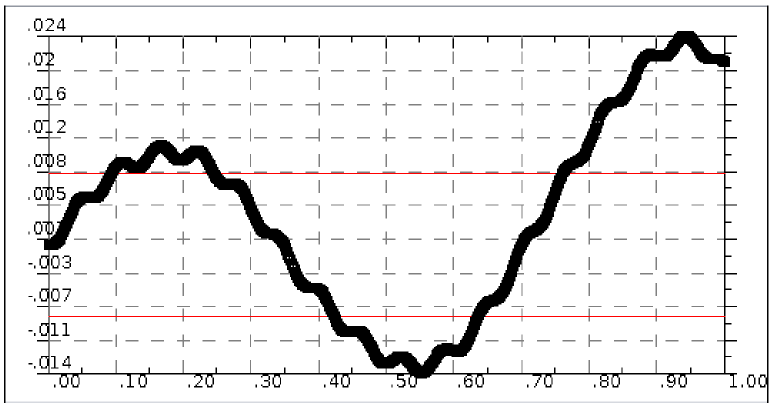
Σχήμα 37: Αριστερά στήλη διαγράμματα $u - t$, μεσαία $v - t$ και δεξιά $u - v$. Από πάνω προς τα κάτω βήμα χρονικής ολοκλήρωσης Δt=(0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 0.99, 1.0, 1.01) του Δt_{cr}, αντίστοιχα.



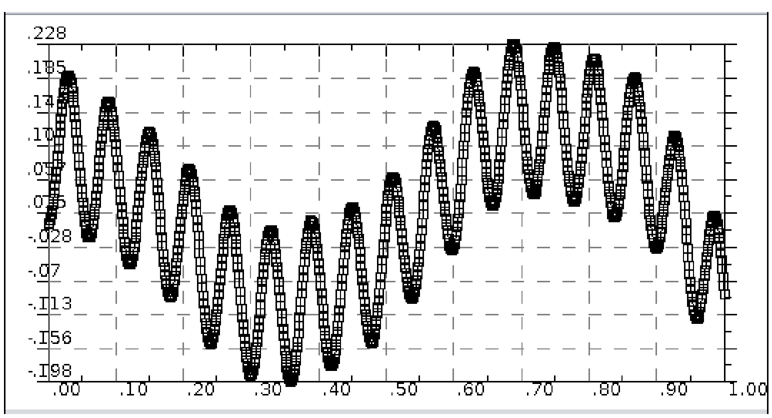
Σχήμα 38: Καταστατική σχέση παραμόρφωσης/μετακίνησης και δύναμης επαναφοράς ελαστοπλαστικού ελατηρίου με κινηματική κράτυνση. Το μοντέλο είναι διγραμμικό αφού περιγράφεται από κλάδους που έχουν τη αρχική κλίση k αλλά και αυτούς με κλίση k_h που συμπίπτουν με τις γραμμές διαρροής.



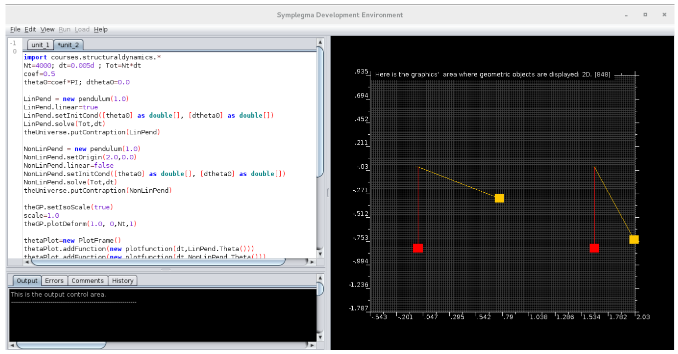
Σχήμα 39: Δύναμη επαναφοράς ελαστοπλαστικού ελατηρίου με κινηματική κράτυνση ως συνάρτηση της μετακίνησης του μονοβάθμιου ταλαντωτή. Οι δυο παράλληλες (μπλε) ευθείες πάνω και κάτω είναι γραμμές διαρροής.



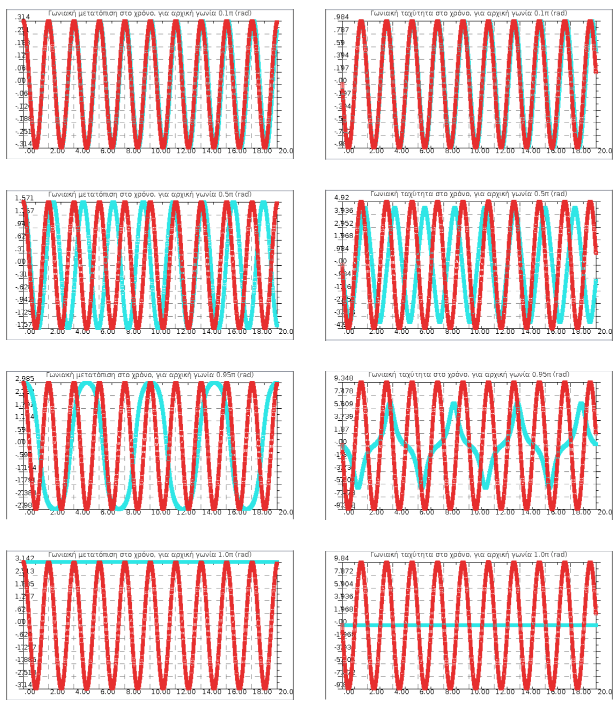
Σχήμα 40: Μετακίνηση ελαστοπλαστικού ελατηρίου με κινηματική κράτυνση στο χρόνο. Οι δυο (κόκκινες) παράλληλες ευθείες περνούν από την τιμή της μετακίνησης διαρροής u_y και της αντίθετης της τιμής.



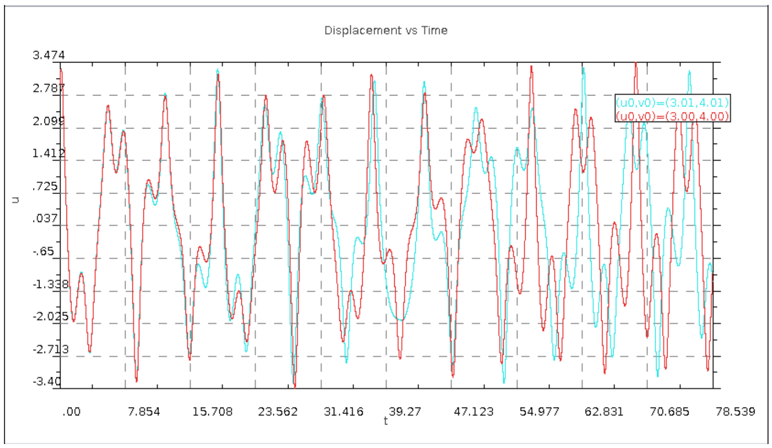
Σχήμα 41: Ταχύτητα ελαστοπλαστικού ελατηρίου με κινηματική κράτυνση στο χρόνο.



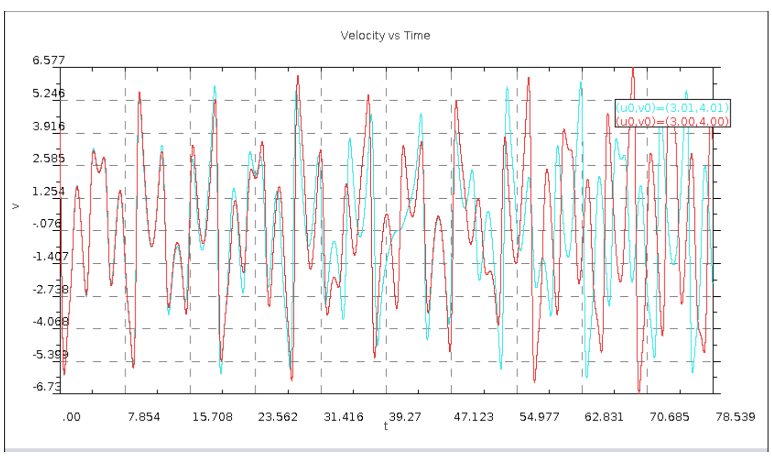
Σχήμα 42: Απλό εκκρεμές, μη-γραμμική έναντι γραμμικής θεώρησης. Επίλυση στο SDE



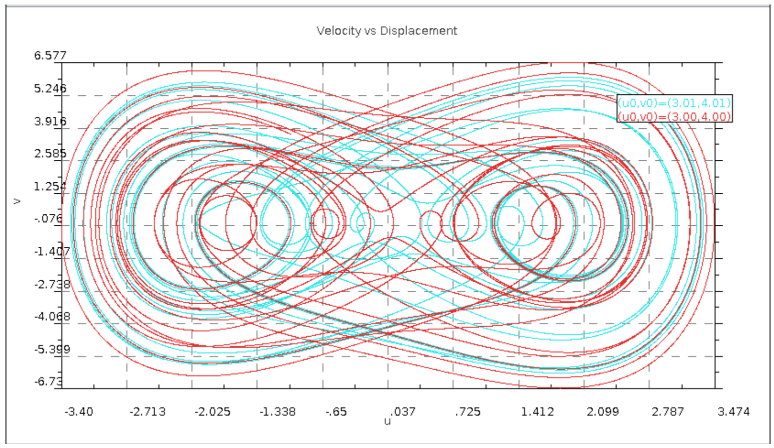
Σχήμα 43: Αριστερά στήλη διαγράμματα $\theta - t$, δεξιά $\dot{\theta} - t$. Σε όλα τα διαγράμματα εκτίθενται αμφότερα αποτελέσματα για τη γραμμική και μη-γραμμική θεώρηση. Η κίνηση οφείλεται σε αρχική απόκλιση από τη θέση ισορροπίας και μηδενική αρχική γωνιακή ταχύτητα. Η γωνία είναι σταδιακά αύξουσα $(0.1, 0.5, 0.95, 1.0)\pi$, για τις περιπτώσεις από πάνω προς τα κάτω.



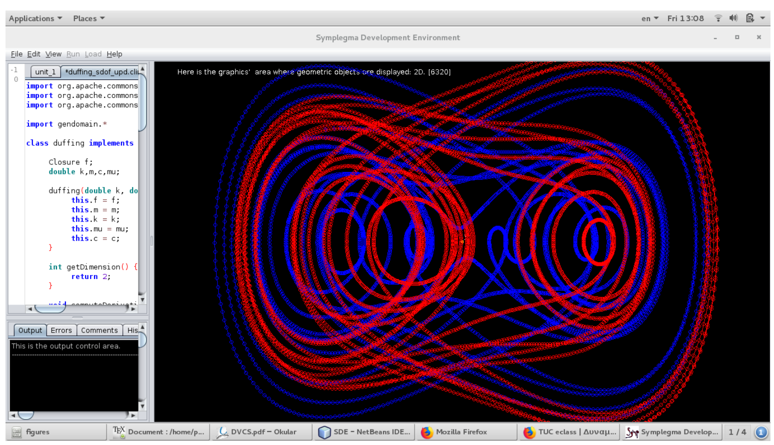
Σχήμα 44: Μεταβολή απόκρισης για μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών. Απόκριση μετακίνησης στο χρόνο ταλαντωτή Duffing.



Σχήμα 45: Μεταβολή απόκρισης για μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών. Απόκριση ταχύτητας στο χρόνο ταλαντωτή Duffing.



Σχήμα 46: Μεταβολή απόκρισης για μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών. Απόκριση στο χώρο κατάστασης ταλαντωτή Duffing.

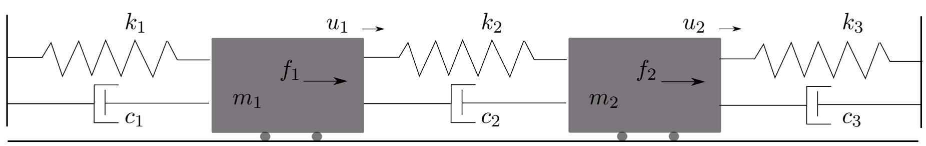


Σχήμα 47: Επίλυση ταλαντωτή Duffing στο περιβάλλον του SDE. Στιγμιότυπο από βίντεο στο `https://youtu.be/mrwdPwc2M9g`.

3 Πολυβάθμια συστήματα

Στην προηγούμενη ενότητα (2. Ο μονοβάθμιος ταλαντωτής) ασχοληθήκαμε αποκλειστικά με ταλαντωτές ενός βαθμού ελευθερίας καθώς και με την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση που περιέγραφε την κίνηση τους. Εδώ θα εισάγουμε τα συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας, που θα καλούμε και ως πολυβάθμια συστήματα ταλάντωσης ή πιο απλά θα αναφερόμαστε στον πολυβάθμιο ταλαντωτή, και τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης. Θα ασχοληθούμε με συστήματα των οποίων οι εξισώσεις κίνησης εύκολα μπορούν να προσδιορισθούν, για παράδειγμα μέσω του διαγράμματος ελεύθερου σώματος (Δ.Ε.Σ.) και των νόμων του Νεύτωνα για την ισορροπία των δυνάμεων, ενώ ταυτόχρονα θα ασχοληθούμε και με την επίλυση αλλά και τη ποιοτική ανάλυση αυτών.

3.1 Σύστημα ταλάντωσης σειράς συζευγμένων μαζών



Σχήμα 48: Σύστημα ταλάντωσης δύο βαθμών ελευθερίας.

Οδηγός μας σε αυτή την εισαγωγή θα είναι αρχικά το σύστημα δύο συζευγμένων μαζών με αντίστοιχα ελατήρια και αποσβεστήρες, όπως αυτό του Σχήματος 48. Οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος αυτού είναι οι οριζόντιες μετακινήσεις κάθε μάζας οπότε στο σύνολο τους είναι δύο. Από το Δ.Ε.Σ. της πρώτης μάζας και με εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα για την ισορροπία των δυνάμεων, έχουμε,

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{u}_1(t) = f_1(t) - k_1u_1(t) - c_1\dot{u}_1(t) - k_2\left(u_1(t) - u_2(t)\right) - c_2\left(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\right) \rightarrow \\
&m_1\ddot{u}_1(t) + (c_1+c_2)\dot{u}_1(t) - c_2\dot{u}_2(t) + (k_1+k_2)u_1(t) - k_2u_2(t) = f_1(t) \quad (90)
\end{aligned}
$$

παρόμοια για τη δεύτερη μάζα θα έχουμε από το Δ.Ε.Σ.,

$$
m_2\ddot{u}_2(t) + (c_2+c_3)\dot{u}_2(t) - c_2\dot{u}_1(t) + (k_2+k_3)u_2(t) - k_2u_1(t) = f_2(t) \quad (91)
$$

Γράφοντας τις εξισώσεις (90) και (91) σε μητρωική μορφή λαμβάνουμε την,

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \\
&\qquad \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad (92)
\end{aligned}
$$

η οποία σε συμπτυγμένη μορφή μπορεί να γραφτεί ως,

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \tag{93}$$

όπου K, M, C τα **μητρώα** δυσκαμψίας, μάζας και απόσβεσης αντίστοιχα, και τα **διανύσματα** της μετατόπισης u της ταχύτητας $\dot{u}$ και της επιτάχυνσης $\ddot{u}$, ενώ τέλος f το **διάνυσμα** της εξωτερικής διέγερσης. Δηλαδή, οι εξισώσεις κίνησης απαρτίζουν ένα σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων $2^{ης}$ τάξης, το οποίο θα συνοδεύεται και από τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες στο χρόνο t_0, ο οποίος συνήθως λαμβάνεται ίσος με το μηδέν, στη μετακίνηση,

$$u(t_0) = \left\{ \begin{array}{c} u_1(t_0) \\ u_2(t_0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{1,0} \\ u_{2,0} \end{array} \right\} \tag{94}$$

και τη ταχύτητα

$$\dot{u}(t_0) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{u}_1(t_0) \\ \dot{u}_2(t_0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{u}_{1,0} \\ \dot{u}_{2,0} \end{array} \right\} \tag{95}$$

την οποία κάποιες φορές θα συμβολίζουμε και ως

$$\dot{u}(t_0) = v(t_0) = \left\{ \begin{array}{c} v_1(t_0) \\ v_2(t_0) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{array} \right\}. \tag{96}$$

Το σύστημα των δύο συζευγμένων μαζών που παρουσιάσαμε εδώ μπορεί εύκολα να επεκταθεί στη περίπτωση που θα είχαμε μια σειρά από N τον αριθμό μάζες συζευγμένες με ελατήρια και αποσβεστήρες. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ενός τέτοιου συστήματος εύκολα συμπεραίνεται πως θα ίσος με τον αριθμό των μαζών, δηλαδή N, ενώ οι εξισώσεις σε μητρωική μορφή θα μπορούν εύκολα να καταστρωθούν με τα όσα αναφέρουμε εδώ. Ένα αντίστοιχο αντικείμενο έχει αναπτυχθεί στο πακέτο `courses.structuraldynamics` με την ονομασία `sdofSeries` για το οποίο μια πρώτη εισαγωγή ακολουθεί αμέσως πιο κάτω.

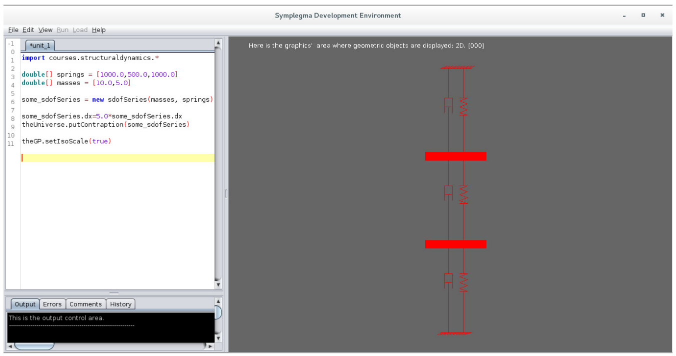
Η κλάση **sdofSeries**

Εδώ γίνεται μια πρώτη αναφορά και μια συνοπτική παρουσίαση της οντότητας του πακέτου `courses.structuraldynamics` που αφορά τον ταλαντωτή συζευγμένων σε σειρά μαζών μέσω ελατηρίων και αποσβεστήρων. Το πολυβάθμιο αυτό σύστημα πραγματώνεται μέσω της κλάσης `sdofSeries`. Οι αναφορές που επισημαίνονται αφορούν τον Κώδικα [17]. Για να χρησιμοποιήσουμε τη κλάση `sdofSeries` πρέπει πρώτα να εισαγάγουμε το πακέτο `courses.structuraldynamics` (βλ. γραμμή 1). Στη γραμμή 3 καθορίζεται μια διάταξη αριθμών που θα χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή των δυσκαμψιών των ελατηρίων, όμοια στην γραμμή 4 για τις μάζες. Ο γραμμικός ταλαντωτής συζευγμένων μαζών ορίζεται στη γραμμή 6 με όρισμα τις διατάξεις αριθμών για τις μάζες και τις δυσκαμψίες, με αυτό το τρόπο το στιγμιότυπο mSeries του αντικείμενου `sdofSeries` που θα δημιουργηθεί θα είναι μηδενικής απόσβεσης. Στη γραμμη 8 αυξάνουμε το «πάχος» των μαζών για αποκλειστικά γραφικούς σκοπούς και στη γραμμή 9 το εισάγουμε στο `Universe` του SDE ώστε να αποκτήσει και γραφική υπόσταση. Τέλος για καλύτερη γραφική αναπαράσταση θέτουμε (γραμμή 11) το πλαίσιο γραφικής απεικόνισης tehGP του SDE σε κατάσταση IsoScale, που θέτει ίδια κλίμακα για τις δύο κάθετες διευθύνσεις x και y. Αν εκτελέσουμε τον κώδικα η μορφή του περιβάλλοντος του SDE θα είναι όπως περίπου αυτή της εικόνας στο Σχήμα 49.

Κώδικας 17: Σύντομη παρουσίαση του αντικείμενου του ταλαντωτή που απαρτίζεται από σειρά συζευγμένων μαζών `sdofSeries`

```
1  import courses.structuraldynamics.*
2
3  double[] springs = [1000.0,500.0,1000.0]
4  double[] masses = [10.0,5.0]
5
6  mSeries = new sdofSeries(masses, springs)
7
8  mSeries.dx=2.0*mSeries.dx
9  theUniverse.putContraption(mSeries)
10
11 theGP.setIsoScale(true)
```

Το σύστημα εξισώσεων (93) θα μπορούσε να επιλυθεί αριθμητικά με τις μεθόδους που έχουμε περιγράψει στην ενότητα 2.11.1. Εδώ όμως θα παρουσιάσουμε μεθόδους κατάλληλες ώστε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα και με αναλυτική προσέγγιση και επίλυση. Στο σημείο αυτό επισημαίνουμε ότι, όπως παρατηρούμε και από τη μορφή της εξ. 92, τα μητρώα μάζας, δυσκαμψίας και απόσβεσης είναι συμμετρικά. Η συμμετρία αυτή εμφανίζεται σε μια μεγάλη κα-



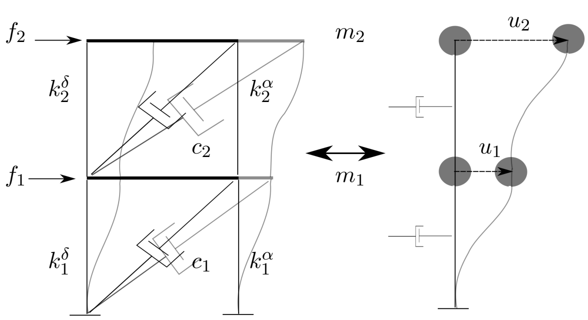
Σχήμα 49: Εισαγωγή και απεικόνιση συστήματος συζευγμένων μαζών `sdofSeries` στο `SDE`.

τηγορία μηχανικών συστημάτων και θα θεωρήσουμε εδώ ότι ασχολούμαστε με τέτοιας μορφής συστήματα. Αναφέρουμε επιπλέον ότι τα μητρώα K και M είναι θετικά ημιορισμένο και ορισμένο αντίστοιχα, ισχύουν δηλαδή οι σχέσεις,

$$x^T K x \geq 0 \quad \text{και} \quad x^T M x > 0$$

για ένα οποιοδήποτε διάνυσμα x.

3.2 Σύστημα ταλάντωσης διατμητικού πλαισίου



Σχήμα 50: Σύστημα ταλάντωσης διατμητικού πλαισίου δύο βαθμών ελευθερίας.

Ένα άλλο απλό πολυβάθμιο σύστημα ταλάντωσης που προσφέρεται για τη κατανόηση και εμβάθυνση εννοιών σχετικών με τη δυναμική των κατασκευών είναι αυτό του διατμητικού πλαισίου. Οι παραδοχές που γίνονται σε ένα διατμητικό πλαίσιο είναι οι ακόλουθες:

- Το σύνολο της μάζας θεωρείται συγκεντρωμένο στις στάθμες των ορόφων.

- Τα οριζόντια στοιχεία (δοκοί) που συνδέουν τα επιμέρους κατακόρυφα (στήλοι) θεωρούνται άκαμπτα

- Παράλειψη αξονικών παραμορφώσεων σε αμφότερα στοιχεία δοκών και στύλων.

Μια σχηματική απεικόνιση ενός τέτοιου συστήματος δίνεται στο Σχήμα 50. Κάθε «όροφος» θεωρείται μια μάζα με αποκλειστική ελευθερία κίνησης την οριζόντια μετατόπιση. Η δυσκαμψία των επιμέρους στοιχείων που συνδέουν τους ορόφους διαμορφώνουν τη δυσκαμψία ορόφου η οποία υπολογίζεται από το άθροισμα των δυσκαμψιών των επιμέρους κατακόρυφων στοιχείων (στύλων). Στη περίπτωση του συστήματος του Σχήματος 50 θα είναι για το ισόγειο $k_1 = k_1^\delta + k_1^\alpha$ και για το επόμενο επίπεδο (πρώτος όροφος) $k_2 = k_2^\delta + k_2^\alpha$. Παρόμοια θεώρηση έχουμε και για την απόσβεση του συστήματος. Καθώς από τις παραδοχές αναφέρουμε πως παραλείπονται οι αξονικές παραμορφώσεις, τα άκρα των στύλων που συνδέουν τις μάζες έχουν κοινή μετατόπιση σε κάθε όροφο ίση με τη μετατόπιση της μάζας του ορόφου. Αυτό δίνει τη δυνατότητα επιπλέον γεωμετρικής απλοποίησης με τη μονοδιάστατο κατακόρυφο σύστημα του Σχήματος 50 δεξιά.

Οι εξισώσεις κίνησης σε μητρωική μορφή για τη περίπτωση δύο ορόφων θα είναι,

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \tag{97}$$

ενώ θα συνοδεύονται από τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες για το διάνυσμα μετατόπισης $u(0)$ και ταχύτητας $\dot{u}(t)$. Εύκολα το παραπάνω σύστημα μπορεί να επεκταθεί στη περίπτωση των N ορόφων.

Η κλάση shearframe

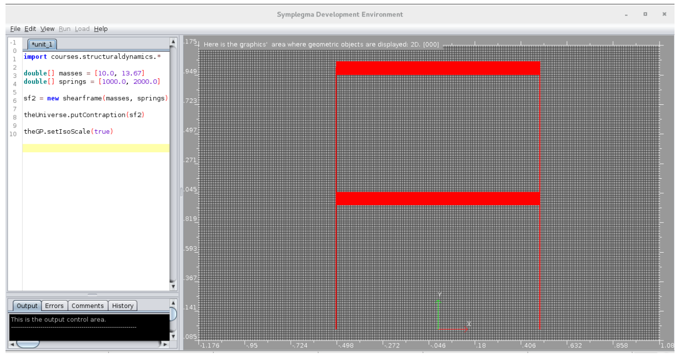
Εδώ γίνεται μια πρώτη αναφορά και μια συνοπτική παρουσίαση της οντότητας του πακέτου `courses.structuraldynamics` που αφορά τον ταλαντωτή διατμητικού πλαισίου. Το πολυβάθμιο αυτό σύστημα πραγματώνεται μέσω της κλάσης `shearframe`. Οι αναφορές που επισημαίνονται αφορούν τον Κώδικα [18]. Για να χρησιμοποιήσουμε τη κλάση `shearframe` πρέπει πρώτα να εισαγάγουμε το πακέτο `courses.structuraldynamics` (βλ. γραμμή 1). Στη γραμμή 3 καθορίζεται μια διάταξη αριθμών που θα χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή των δυσκαμψιών των ορόφων, όμοια στην γραμμή 4 για τις μάζες. Ο γραμμικός ταλαντωτής διατμητικού πλαισίου ορίζεται στη γραμμή 6 με όρισμα τις διατάξεις αριθμών για τις μάζες και τις δυσκαμψίες, με αυτό το τρόπο το στιγμιότυπο sf2 του αντικείμενου `shearframe` που θα δημιουργηθεί θα είναι μηδενικής απόσβεσης. Στη γραμμή 8 εισάγουμε το στιγμιότυπο του αντικειμένου στο `Universe` του SDE ώστε να αποκτήσει και γραφική υπόσταση. Τέλος για καλύτερη γραφική αναπαράσταση θέτουμε (γραμμή 10) το πλαίσιο γραφικής απεικόνισης tehGP του SDE σε κατάσταση IsoScale, που θέτει ίδια κλίμακα για τις δύο κάθετες διευθύνσεις x και y. Αν εκτελέσουμε τον κώδικα η μορφή του περιβάλλοντος του SDE θα είναι όπως περίπου αυτή της εικόνας στο Σχήμα 51.

Κώδικας 18: Σύντομη παρουσίαση του αντικείμενου του ταλαντωτή διατμητικού πλαισίου `shearframe`

```
1  import courses.structuraldynamics.*
2
3  double[] springs = [1000.0, 2000.0]
4  double[] masses = [10.0, 13.67]
5
6  sf2 = new shearframe(masses, springs)
7
8  theUniverse.putContraption(sf2)
9
10 theGP.setIsoScale(true)
```

3.3 Το ιδιοπρόβλημα

Το ιδιοπρόβλημα αναφέρεται στις μη ταυτοτικές λύσεις (μηδενικές) της ομογενούς μορφής του προβλήματος που μας απασχολεί. Είναι δηλαδή σαν να ασχολούμαστε σε αυτή την ενότητα με την ελεύθερη ταλάντωση του πολυβάθμιου συστήματος. Όμως, τα όσα εκτεθούν εδώ, όπως θα δούμε και πιο κάτω, έχουν ευθεία εφαρμογή και στη μη-ομογενή περίπτωση, με άλλα λόγια στην



Σχήμα 51: Εισαγωγή και απεικόνιση συστήματος διατμητικού πλαισίου `shearframe` στο `SDE`.

εξαναγκασμένη ταλάντωση. Τα όσα παρουσιάζουμε εδώ να θεωρηθεί ότι αποτελούν γενικά ένα πολύ σημαντικό μέρος της δυναμικής και των ταλαντώσεων αλλά και όποιων εφαρμογών τους.

3.3.1 Πολυβάθμιο σύστημα χωρίς απόσβεση

Έστω η εξ. 93 απουσία εξωτερικής διέγερσης και μηδενικής απόσβεσης. Στη περίπτωση αυτή η διατάραξη του συστήματος και η ταλάντωση του θα οφείλεται στις αρχικές συνθήκες μετατόπισης και ταχύτητας στο χρόνο αρχής t_0. Η εξίσωση κίνησης θα είναι,

$$M\ddot{u}(t) + Ku(t) = 0 \tag{98}$$

για την οποία θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $u(t) = \phi q(t)$, όπου ϕ ένα **διάνυσμα** που θα καθορίζει τη μορφή της λύσης στο χώρο και ο συντελεστής $q(t)$ (**βαθμωτό** μέγεθος) που ορίζει ένα μέτρο της απόκρισης στο χρόνο. Με άλλα λόγια θα ψάξουμε για επιμέρους λύσεις οι οποίες έχουν το χαρακτηριστικό ότι είναι μιας σταθερής μορφής η οποία δεν αλλάζει σχήμα με τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου, απλά αλλάζει το μέτρο $q(t)$ (μέγεθος) του ίδιου σχήματος y κατά το πέρασμα του χρόνου. Με αντικατάσταση η εξίσωση κίνησης θα είναι,

$$M\phi\ddot{q}(t) + K\phi q(t) = 0 \tag{99}$$

και πολλαπλασιάζοντας με ϕ^T,

$$\phi^T M\phi\ddot{q}(t) + \phi^T K\phi q(t) = 0 \tag{100}$$

και με ανακατάταξη των όρων μπορούμε να γράψουμε,

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi} \tag{101}$$

Η τελευταία σχέση της εξ. 101 δηλώνει ότι για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει και οι δύο όροι της εξίσωσης να είναι αμφότεροι ίσοι με την ίδια σταθερά λ,

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{\phi^T K \phi}{\phi^T M \phi} = \lambda \tag{102}$$

Από τον χρονικά εξαρτώμενο όρο μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \lambda \rightarrow \ddot{q}(t) = -\lambda q(t) \tag{103}$$

Με αντικατάσταση της εξ. (103) στην εξ. (99), λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} &M\phi\lambda q(t) - K\phi q(t) = 0 \rightarrow \\ &(K - \lambda M)\phi q(t) = 0 \end{aligned} \tag{104}$$

Η οποία για να ισχύει $\forall t \geq 0$,

$$(K - \lambda M)\phi = 0 \tag{105}$$

Η εξίσωση (114) εκφράζει το **γενικευμένο γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμής**. Για να έχει λύση θα πρέπει η ορίζουσα να μηδενίζεται, δηλαδή,

$$\det(K - \lambda M) = 0, \tag{106}$$

η οποία ονομάζεται και *χαρακτηριστική εξίσωση*. Η χαρακτηριστική εξίσωση με το ανάπτυγμα της ορίζουσας οδηγεί σε συνθήκη μηδενισμού ενός πολυωνύμου $\Pi(\lambda) = 0$ το οποίο είναι N βαθμού ως προς λ. Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής ονομάζονται ιδιοτιμές λ_i ενώ οι τιμές $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ είναι οι ιδιοσυχνότητες ή φυσικές συχνότητες του συστήματος[17]. Η μικρότερη συχνότητα ω_1 καλείται και θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα.

[17]Αξίζει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση του συστήματος ταλάντωσης χωρίς απόσβεση, πολλές φορές γράφουμε το ιδιοπρόβλημα απευθείας σε όρους ιδιοσυχνοτήτων αντί των ιδιοτιμών, δηλαδή:

$$(K - \omega^2 M)\phi = 0$$

Δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω στο πλαίσιο αυτών των σημειώσεων σχετικά με την επίλυση του ιδιοπροβλήματος. Πλούσιο υλικό μπορεί να βρεθεί στα βιβλία της δυναμικής που έχουν αναφερθεί στην εισαγωγή των σημειώσεων αυτών αλλά και σε βιβλία γραμμικής άλγεβρας αφού το πρόβλημα αυτό βρίσκεται στη καρδιά του συγκεκριμένου αντικείμενου με τεράστιο εύρος εφαρμογών. Στα πλαίσια των παραδειγμάτων και εφαρμογών αυτών των σημειώσεων θα λαμβάνουμε τη λύση του ιδιοπροβλήματος με αριθμητική επίλυση με χρήση του λογισμικού πακέτου και της συνοδευτικής εργαλειοθήκης.

Από τη λύση του ιδιοπροβλήματος της εξ. (114) θα λάβουμε N στον αριθμό, όσοι και οι βαθμοί ελευθερίας, ζεύγη ιδιοτιμών λ_i και αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων ϕ_i. Τα ζεύγη αυτά καλούνται και ιδιολύσεις. Οι ιδιοσυχνότητες είναι δυνατό να είναι διακεκριμένες ή κάποιες να παρουσιάζουν πολλαπλότητα[18]. Λόγω της απροσδιοριστίας του συστήματος της εξ. (114) το μέτρο κάθε ιδιοδιανύσματος καθορίζεται αυθαίρετα. Αυτό σημαίνει ότι αν ϕ_i ιδιοδιάνυσμα, τότε και για μια σταθερά α το $\alpha\phi_i$ είναι ιδιοδιάνυσμα αφού ικανοποιεί την εξ. (114). Η διαδικασία καθορισμού του μεγέθους των ιδιοδιανυσμάτων ονομάζεται και **κανονικοποίηση**. Στο πλαίσιο αυτών των σημειώσεων χρησιμοποιούμε εναλλάξ τους όρους ιδιοδιάνυσμα και ιδιομορφή χωρίς διαφοροποίηση, με μόνη διαφορά ότι ο δεύτερος όρος είναι γενικότερος.

Μια συνήθης κανονικοποίηση είναι αυτή κατά την οποία επιλέγουμε το μέγιστο στοιχείο κάθε ιδιοδιανύσματος να είναι ίσο με μονάδα. Για να επιτευχθεί αυτό απλά διαιρούμε όλα τα στοιχεία του εκάστοτε ιδιοδιανύσματος ϕ_n με το μέγιστο στοιχείο του αυτού ιδιοδιανύσματος, δηλαδή:

$$\phi_n := \frac{\phi_n}{\max(\phi_n)} \tag{107}$$

Τα ιδιοδιανύσματα αυτά θα καλούμε κανονικές ιδιομορφές. Από τις επιμέρους κανονικές ιδιομορφές ορίζεται και το ιδιομορφικό μητρώο Φ, όπου:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{11} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

Μια άλλη διαδικασια κανονικοποίησης είναι αυτή κατά την οποία επιλέγεται τα ιδιοδιανύσματα να έχουν τέτοιο μέτρο ώστε,

$$\phi_i^T M \phi_i = 1.$$

[18] Σε μια ιδιοσυχνότητα πολλαπλότητας p αντιστοιχούν p γραμμικά ανεξάρτητες ιδιομορφές.

Για να επιτευχθεί αυτό απλά διαιρούμε όλα τα στοιχεία του εκάστοτε ιδιοδιανύσματος ϕ_n με το μέγιστο στοιχείο του αυτού ιδιοδιανύσματος, δηλαδή:

$$\phi_n := \frac{\phi_n}{\sqrt{\phi_n^T M \phi_n}} \tag{108}$$

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των ιδιομορφών είναι αυτή της **ορθογωνικότητας** της μάζας, σύμφωνα με την οποία,

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} m_i^*, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \tag{109}$$

και για το μητρώο της δυσκαμψίας

$$\phi_i^T K \phi_j = \begin{cases} k_i^* = \omega_i^2 m_i^*, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \tag{110}$$

όπου m_i^* και k_i^*, αντίστοιχα η ιδιομορφική μάζα και ιδιομορφική δυσκαμψία της i-ιοστής ιδιομορφής. Οι ποσότητες m_i^* και k_i^* καλούνται και ως, γενικευμένη μάζα και δυσκαμψία για την i-ιοστή ιδιομορφή, αντίστοιχα.

Δέον να σημειωθει πως **τα ιδιοδιανύσματα ϕ_i αποτελούν μια βάση για το N-διάστατο διανυσματικό χώρο**, που σημαίνει ότι οποιοδήποτε διάνυσμα με διάσταση N μπορεί να προβληθεί στη βάση των ιδιοδιανυσμάτων. Με άλλα λόγια, μπορούμε να γράψουμε τυχόν N-διάστατο διάνυσμα x ως επαλληλία των N ιδιομορφών ϕ_i,

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i \tag{111}$$

όπου οι συντελεστές α_i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος x σε κάθε ένα ιδιοδιάνυσμα ϕ_i της διανυσματικής βάσης.

3.3.2 Πολυβάθμιο σύστημα με απόσβεση

Στη περίπτωση αυτή το μητρώο απόσβεσης C είναι διάφορο του μηδενικού και η εξίσωση κίνησης θα είναι,

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = 0 \tag{112}$$

Το μητρώο της απόσβεσης θα είναι συμμετρικό και θετικά ημιορισμένο, θα ισχύουν δηλαδή οι σχέσεις,

$$C^T = C \quad \text{και} \quad x^T C x \geq 0$$

για ένα οποιοδήποτε διάνυσμα x. Το αντίστοιχο του ιδιοπροβλήματος της εξ. (114) σε αυτή τη περίπτωση θα είναι,

$$(K + \lambda C + \lambda^2 M)\psi = 0 \tag{113}$$

όπου λ κάποια ιδιοτιμή και ψ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Οι ιδιοτιμές λ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης,

$$\det\left(K + \lambda C + \lambda^2 M\right) = 0, \tag{114}$$

η οποία οδηγεί σε ένα πολυώνυμο $2N$ βαθμού ως προς λ.

Κατηγοριοποίηση του συστήματος βάση της απόσβεσης

- Αναπόσβεστο σύστημα: $C = 0$
- Σύστημα αναλογικής απόσβεσης:
  - Απόσβεση Rayleigh, $C = \alpha_m M + \alpha_k K$
  - Ιδιομορφική απόσβεση
  - Γενικευμένη αναλογική απόσβεση: $CM^{-1}K = KM^{-1}C$
- Μη-αναλογική απόσβεση: $CM^{-1}K \neq KM^{-1}C$

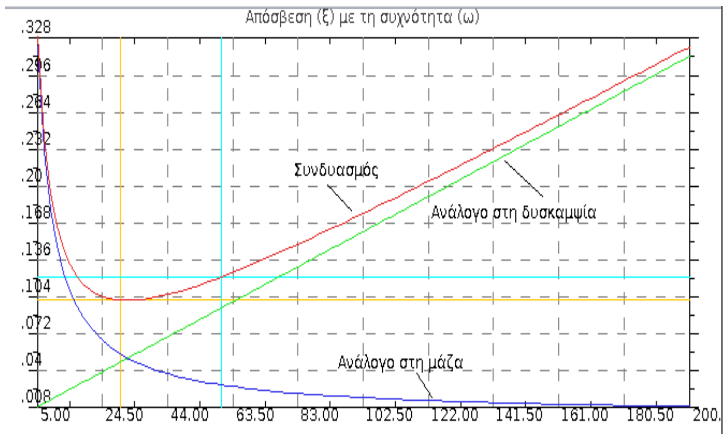
Τα ιδιοδιανύσματα του αναπόσβεστου συστήματος και αυτού της αναλογικής απόσβεσης είναι πραγματικά και ταυτίζονται για τις δύο αυτές περιπτώσεις. Τα ιδιοδιανύσματα του συστήματος μη αναλογικής απόσβεσης είναι, στη γενικότητα, μιγαδικά. Για τα ιδιοδιανύσματα της κατηγορίας της αναλογικής απόσβεσης μπορεί να αποδειχθεί οτι ισχύει η σχέση ορθογωνικότητας,

$$\phi_i^T C \phi_j = \begin{cases} c_i^*, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \tag{115}$$

Η *απόσβεση Rayleigh* με a_m και a_k κατάλληλους συντελεστές οι οποίοι μπορούν να καθοριστούν από την σχέση της κρίσιμης απόσβεσης ξ,

$$\xi = \frac{a_m}{2\omega} + \frac{a_k \omega}{2} \tag{116}$$

με την συχνότητα ω. Στην εικόνα 52 φαίνεται η συμπεριφορά για απόσβεση ανάλογη της δυσκαμψίας ($\alpha_m = 0, \alpha_k \neq 0$), ανάλογη της μάζας ($\alpha_m \neq 0, \alpha_k = 0$) ή συνδυασμό ($\alpha_m \neq 0, \alpha_k \neq 0$).



Σχήμα 52: Πράσινη ευθεία - απόσβεση ανάλογη της δυσκαμψίας ($\xi = a_k\omega/2$), μπλε καμπύλη - ανάλογη της μάζας ($\xi = \frac{a_m}{2\omega}$), κόκκινη καμπύλη - συνδυασμός ($\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{a_m}{\omega} + a_k\omega\right)$).

Στην υπόθεση της *ιδιομορφικής απόσβεσης* θεωρούμε ότι κάθε ιδιομορφή, έστω η i-ιοστή, έχει συγκεκριμένο ποσοστό κρίσιμης απόσβεσης ξ_i, έτσι ώστε να ισχύει,

$$\Phi^T C \Phi = C^* \tag{117}$$

όπου C^* διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη κύρια διαγώνιο $C^*_{ii} = c^*_i = 2\xi_i\omega_i m^*_i$. Το μητρώο C που αντιστοιχεί στο C^* μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση,

$$C = M\Phi C^* \Phi^T M \tag{118}$$

Η προηγούμενη σχέση της εξ. (118) επισημαίνουμε πως αναφέρεται σε μητρώα Φ όπου τα ιδιοδιανύσματα είναι κανονικοποιημένα ως προς το μητρώο μάζας, σε περίπτωση που δεν ισχύει αυτό η πιο πάνω σχέση θα έχει τη μορφή,

$$C = M\Phi M^{*-1} C^* M^{*-1} \Phi^T M \tag{119}$$

όπου βέβαια ο αντίστροφος πινάκας του μητρώου M^* υπολογίζεται πολυ εύκολα καθώς είναι διαγώνιο. Οι πιο πανω σχεσεις μπορουν να γραφουν και στη μορφη,

$$C = M\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{2\xi_i\omega_i}{m^*_i}\phi_i\phi_i^T\right)M \tag{120}$$

3.4 Μέθοδος επαλληλίας ιδιομορφών

Επιστρέφουμε στη γενικήεξισωση του πολυβάθμιου συστήματος με θεώρηση ύπαρξης εξωτερικής διέγερσης. Η εξίσωση κίνησης εκφράζεται από την εξ. (93) μαζι με τις απαραίτητες αρχικές συνθήκες στις μετατόπισες από την εξ. (94) και στις ταχύτητες από την εξ. (95). Σε προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε επιμέρους συνιστώσες στα ιδιοδιανύσματα ϕ_i και γράφεται όπως στην εξ. (111). Το ιώδιο ισχύει και για τη λύση του διανύσματος των αγνώστων μετατοπίσεων και γράφεται,

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i q_i(t), \tag{121}$$

ενώ οι χρονικές της παράγωγοι θα είναι,

$$\dot{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \dot{q}_i(t), \tag{122}$$

$$\ddot{u}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \ddot{q}_i(t). \tag{123}$$

Με αντικατάσταση της εξ. (121) και της εξ. (122) στην εξ. (93) θα έχουμε,

$$M \sum_{i=1}^{N} \phi_i \ddot{q}_i(t) + C \sum_{i=1}^{N} \phi_i \dot{q}_i(t) + K \sum_{i=1}^{N} \phi_i q_i(t) = f(t) \tag{124}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με ένα ιδιοδιάνυσμα ϕ_n^T και εκμεταλλευόμενοι τις συνθήκες ορθογωνικότητας[19] των εξ.(109)-(110) και (115), για να λάβουμε,

$$m_n^* \ddot{q}_n(t) + c_n^* \dot{q}_n(t) + k_n^* q_n(t) = \phi_n^T f(t) \tag{125}$$

Αν επιπλέον διαιρέσουμε με την ιδιομορφική μάζα m_n^*

$$\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = f_n^*(t) \tag{126}$$

όπου $f_n^*(t) = \frac{\phi_n^T f(t)}{m_n^*}$. Οι αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν στις μετατοπίσεις,

$$q_n(0) = \frac{\phi_n^T M u(0)}{m_n^*} \tag{127}$$

[19] Στην ανάλυση θεωρούμε ότι ϕ είναι τα κατάλληλα ιδιοδιανύσματα του εκάστοτε προβλήματος της γενικής περίπτωσης απόσβεσης (δυνάμει μη-αναλογικής). Κρατάμε το συμβολισμό ϕ καθώς από εδώ και στο εξής θα δουλεύουμε κυρίως με περιπτώσεις από την κατηγορία της αναλογικής απόσβεσης που οι ιδιομορφές συμπίπτουν με αυτές του αναπόσβεστου συστήματος.

και στις ταχύτητες,

$$\dot{q}_n(0) = \frac{\phi_n^T M \dot{u}(0)}{m_n^*}, \tag{128}$$

για κάθε ιδιομορφική συνιστώσα. Υπενθυμίζουμε ότι $u(0)$ και $\dot{u}(0)$ τα διανύσματα αρχικών μετατοπίσεων και ταχυτήτων, ενώ M το μητρώο μάζας.

Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι το αρχικό πρόβλημα του πολυβάθμιου συστήματος ταλάντωσης έχει υποπέσει στην επίλυση μιας σειράς, N τον αριθμό, διαφορικών εξισώσεων επιμέρους μονοβάθμιων ταλαντωτών. Το πρόβλημα για κάθε ένα από αυτούς τους μονοβάθμιους ταλαντωτές εκφράζεται από την εξ. (126) μαζί με τις αρχικές συνθήκες (127) και (128). Μπορούμε να υπολογίσουμε τη λύση, αναλυτικά ή αριθμητικά, για κάθε ιδιομορφική συνιστώσα, χρησιμοποιώντας μια οποιαδήποτε μέθοδο από αυτές που είδαμε στην ενότητα του μονοβάθμιου ταλαντωτή. Έπειτα έχοντας τις επιμέρους λύσεις των συνιστωσών $q_i(t)$ μπορούμε να αποκαταστήσουμε τη διανυσματική συνολική λύση με χρήση της επαλληλίας των ιδιομορφών της εξ. (121).

3.5 Οντότητες πακέτου courses.structuraldynamics

3.5.1 Κλάση sdofSeries

Περιγραφή:
Το αντικείμενο αυτό αφορά ένα γραμμικό πολυβάθμιο σύστημα ταλάντωσης που αποτελείται από μια διάταξη μαζών συνδεδεμένων μεταξύ τους σε αλληλουχία. Κάθε μάζα συνδέεται με κάθε μία από γειτονικές της με ένα ελατήριο και ένα αποσβεστήρα όπως και στην εικόνα του Σχήματος 49. Το αντικείμενο αυτό συμπεριλαμβάνει και μεθόδους για επίλυση κάτω από αρχικές συνθήκες και για οποιαδήποτε εξωτερική διέγερση καθώς και για την επίλυση του ιδιοπροβλήματος και τον καθορισμό των ιδιολύσεων.

Δημιουργία στιγμιότυπου:
Ο κονστράκτορας (constructor) ενός στιγμιότυπου του αντικείμενου εμφανίζεται σε δύο εκδοχές. Στην πρώτη το όρισμα του αποτελείται από τρεις μεταβλητές διατάξεων πραγματικών αριθμών διπλής ακρίβειας που αντιστοιχούν με τη σειρά, στις μάζες, τις ελατηριακές σταθερές για τις δυσκαμψίες των ελατηρίων και τους συντελεστές απόσβεσης των αποσβεστήρων του ταλαντωτή. Στην δεύτερη εκδοχή του κονστράκτορα παραλείπεται η διάταξη των τιμών των αποσβεστήρων που θεωρούνται τώρα μηδενικές.

- `sdofSeries(double[] masses, double[] springs, double[] dashpots)`
- `sdofSeries(double[] masses, double[] springs)`

Μέθοδοι:
Η ονομασία των μεθόδων έχει γίνει με τρόπο τέτοιο ώστε να είναι, το δυνατό, επεξηγηματική.

- void setLengths(double[ ] lengths)
- void setInitCond(double[ ] u0, double[ ] v0)
- void setInitCond(double[ ] u0)
- void setRHS(DoubleFunction df)
- void setRHS(DoubleFunction df, int dof)
- void setRHS(DoubleFunction[] df)

συνεχίζεται ...

Κλάση `sdofSeries` (…συνέχεια)

Μέθοδοι:

- RealMatrix getMass()
- RealMatrix getStiffness()
- RealMatrix getDamping()
- void solve(double tot, double dt)
- double[ ] Disp(int w)
- void eigenAnalysis()
- double getEigenFrequency(int i)
- double[ ] getEigenFrequencies()
- double[ ] getEigenVecArray(int i)
- RealVector getEigenVector(int i)

3.5.2 Κλάση **shearframe**

Περιγραφή:
Το αντικείμενο αυτό αφορά ένα γραμμικό πολυβάθμιο σύστημα ταλάντωσης που αποτελείται από μια κατακόρυφη διάταξη μαζών συνδεδεμένων μεταξύ τους. Κάθε μάζα συνδέεται με κάθε μία από γειτονικές της με στύλους και ένα αποσβεστικό σύστημα όπως και στην εικόνα του Σχήματος 51. Το αντικείμενο αυτό συμπεριλαμβάνει και μεθόδους για επίλυση κάτω από αρχικές συνθήκες και για οποιαδήποτε εξωτερική διέγερση καθώς και για την επίλυση του ιδιοπροβλήματος και τον καθορισμό των ιδιολύσεων.

Δημιουργία στιγμιότυπου:
Ο κονστράκτορας (constructor) ενός στιγμιότυπου του αντικείμενου εμφανίζεται σε δύο εκδοχές. Στην πρώτη το όρισμα του αποτελείται από τρεις μεταβλητές διατάξεων πραγματικών αριθμών διπλής ακρίβειας που αντιστοιχούν με τη σειρά, στις μάζες των ορόφων, τις δυσκαμψίες των ορόφων και τους συντελεστές απόσβεσης για καθε όροφο του ταλαντωτή. Στην δεύτερη εκδοχή του κονστράκτορα παραλείπεται η διάταξη των τιμών των αποσβεστήρων που θεωρούνται τώρα μηδενικές.

- `shearframe(double[] masses, double[] stiff, double[] dashpots)`
- `shearframe(double[] masses, double[] stiff)`

Μέθοδοι:
Οι μέθοδοι της κλάσης `shearframe` είναι πανομοιότυποι με αυτές της κλάσης `sdofSeries` που περιγράφτηκε στην προηγούμενη Ενότητα 3.5.1.

3.5.3 Κλάση mdof

Περιγραφή:
Το αντικείμενο είναι μία πρωτογενής πολύ απλή και ταυτόχρονα βασική οντότητα. Αφορά ένα γραμμικό πολυβάθμιο σύστημα ταλάντωσης που περιγράφεται από το μητρώο μάζας, το μητρώο δυσκαμψίας και το μητρώο απόσβεσης. Το αντικείμενο αυτό είναι εφοδιασμένο με βασικές μεθόδους για την επίλυση του ιδιοπροβλήματος και τον καθορισμό των ιδιολύσεων.

Δημιουργία στιγμιότυπου:
Ο κονστράκτορας (constructor) ενός στιγμιότυπου του αντικείμενου εμφανίζεται σε τρεις εκδοχές. Στην πρώτη το όρισμα του αποτελείται από τρεις μεταβλητές διατάξεων πραγματικών αριθμών διπλής ακρίβειας που αντιστοιχούν με τη σειρά, στο «μητρώο» δυσκαμψίας, «μητρώο» μάζας και το «μητρώο» απόσβεσης του πολυβάθμιου ταλαντωτή. Στη δεύτερη εκδοχή του κονστράκτορα παραλείπεται η διάταξη των τιμών του «μητρώου» απόσβεσης που θεωρειται τώρα το μηδενικό «μητρώο». Στη τρίτη εκδοχή δηλώνουμε μόνο τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του πολυβάθμιου συστήματος με μια ακέραιη μεταβλητή.

- `mdof(double[][] K, double[][] M, double[][] C)`
- `mdof(double[][] K, double[][] M)`
- `mdof(int NDOFS)`

Μέθοδοι:
Η ονομασία των μεθόδων έχει γίνει με τρόπο τέτοιο ώστε να είναι, το δυνατό, επεξηγηματική.

- void setC(double[][] c)
- void setC(double am, double ak)
- void setC(double[] xis)
- void setC(double[] xis, boolean computeC)
- void setDiagonalMass(boolean b)

συνεχίζεται ...

Κλάση mdof (...συνέχεια)

Μέθοδοι:

- void eigenAnalysis()
- double getEigenMass(int i)
- double getEigenValue(int i)
- double[ ] getEigenValues()
- double[ ] getEigenVecArray(int i)
- RealVector getEigenVector(int i)

3.6 Παραδείγματα και εφαρμογές

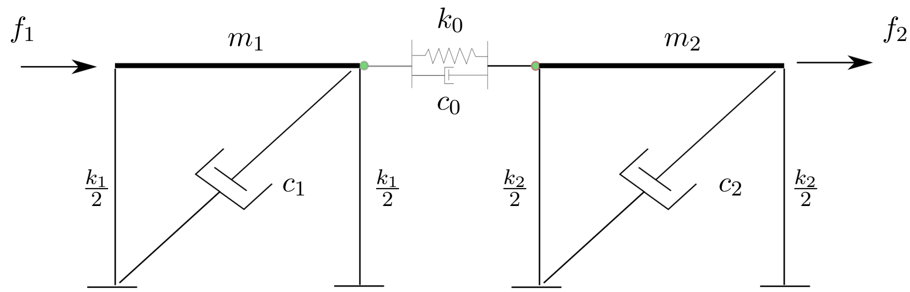
3.6.1 Συζευγμένα διατμητικά πλαίσια ως διβάθμιο σύστημα ταλάντωσης

Για τα συζευγμένα, μέσω ελατηρίου και αποσβεστήρα, διατμητικά πλαίσια του Σχήματος 53 θεωρείται ότι η δυσκαμψία των στύλων στήριξης αντιστοιχεί σε συντελεστές, k_1=13377.78 kN/m, k_2=12902.51 kN/m, ενώ k_0=0.5(k_1+k_2). Οι μάζες των ορόφων είναι m_1=7.95 tn και m_2=9.25 tn. Όσο αφορά την απόσβεση του συστήματος, θεωρούμε ότι οι ιδιομορφικές αποσβέσεις αντιστοιχούν σε κρίσιμη απόσβεση ξ_1=ξ_2=ξ, όπου ξ=2%. Το διάνυσμα της εξωτερικής φόρτισης με συνιστώσες $f_2(t)$=$f_1(t)$=100 για $t \leq T_1/2$ και ύστερα μηδέν. Η χρονική δηλαδή εξέλιξη της εξωτερικής φόρτισης είναι ένα ορθογωνικό πλήγμα παρόμοιο με αυτό της εικόνας του Σχήματος 20 της Ενότητας 2.14.1.

Στο παράδειγμα αυτό θα υπολογίσουμε την απόκριση του πολυβάθμιου συστήματος με τη μέθοδο της ιδιομορφικής επαλληλίας.

Επίλυση ιδιοπροβλήματος

Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να λύσουμε το αντίστοιχο ιδιοπρόβλημα του αναπόσβεστου συστήματος, εξ. (114). Αφού διαμορφώσουμε τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν το πρόβλημα του διβάθμιου αυτού συστήματος (βλ. και Ενότητα 4.6.3), λαμβάνουμε τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας όπου μπορούμε να αντικαταστήσουμε με τις συγκεκριμένες τιμές που αντιστοιχούν στις



Σχήμα 53: Συζευγμένα διατμητικά πλαίσια ως διβάθμιο σύστημα ταλάντωσης.

δυσκαμψίες και μάζες του παρόντος.

$$\left[\begin{array}{cc} k_1+k_0-\lambda_i m_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_2+k_0-\lambda_i m_2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

Οι ιδιοτιμές λ του συστήματος θα προκύψουν από το μηδενισμό της ορίζουσας, εξ. (106), που στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα λαμβάνει τη μορφή,

$$\left|\begin{array}{cc} k_1+k_0-\lambda m_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_2+k_0-\lambda m_2 \end{array}\right|=0 \rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{cc} 26517.925-7.95\lambda & -13140.145 \\ -13140.145 & 26042.655-9.25\lambda \end{array}\right|=0 \rightarrow$$

$$73.538\lambda^2-452329.914\lambda+517933761.470=0$$

Από τη επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (τριώνυμο) ως προς λ λαμβάνουμε τι λύσεις,

$$\lambda_1=1521.288, \quad \omega_1=\sqrt{\lambda_1}=39.004 \text{ rad/sec}, \quad T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=0.161 \text{ sec}$$

$$\lambda_2=4629.681, \quad \omega_2=\sqrt{\lambda_2}=68.042 \text{ rad/sec}, \quad T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}=0.092 \text{ sec}$$

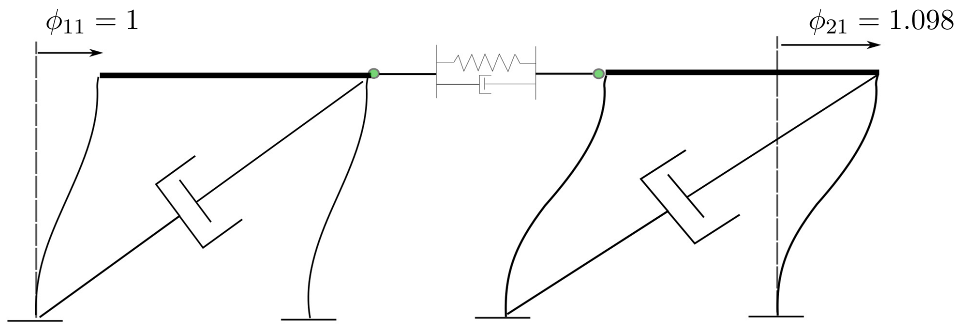
Για να υπολογίσουμε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα,

$$\left[\begin{array}{cc} k_1+k_0-\lambda_1 m_1 & -k_0 \\ -k_0 & k_2+k_0-\lambda_1 m_2 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

και αυθαίρετα επιλέγουμε μια τιμή για κάποια συνιστώσα του ιδιοδιανύσματος, εδώ ϕ_{11}=1,

$$\left[\begin{array}{cc} 14423.685 & -13140.145 \\ -13140.145 & 11970.741 \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \phi_{11}=1 \\ \phi_{21} \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

Η μια εκ των δυο εξισώσεων της πιο πάνω μητρωικής σχέσης, μας παρέχει τη τιμή $\phi_{21}{\approx}1.098$, ενώ η άλλη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επαλήθευση[20] του αποτελέσματος.



Σχήμα 54: Πρώτη ιδιομορφή, οι τιμές που αναγράφονται αναφέρονται σε κανονικοποίηση με θεώρηση μοναδιαίας τιμής της συνιστώσας που αντιστοιχεί στο πρώτο βαθμό ελευθερίας.

Με όμοια διαδικασια, αφού αντικαταστήσουμε τη τιμή της δεύτερης ιδιοτιμής λ_2 και αυθαίρετα επιλέγοντας μια τιμή για κάποια συνιστώσα του ιδιοδιανύσματος, εδώ $\phi_{12}{=}1$,

$$\begin{bmatrix} -10288.039 & -13140.145 \\ -13140.145 & -16781.894 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \phi_{12}{=}1 \\ \phi_{22} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

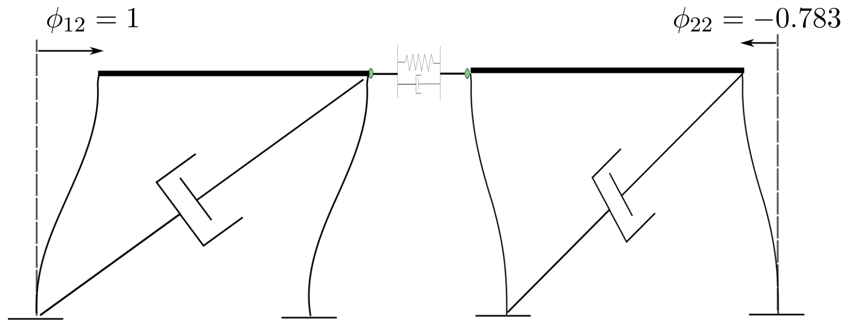
υπολογίζεται η τιμή $\phi_{22} \approx -0.783$. Τα ιδιοδιανύσματα του συστήματος όπως υπολογίστηκαν εδώ και για τη συγκεκριμένη κανονικοποίηση, αυτή δηλαδή της θεώρηση μοναδιαίας τιμής της συνιστώσας που αντιστοιχεί στο πρώτο βαθμό ελευθερίας, είναι,

$$\phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1.098 \end{array} \right\} \text{ και } \phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -0.783 \end{array} \right\}$$

και έχουν σχεδιαστεί στα Σχήματα 54 και 55, αντίστοιχα. Οι γενικευμένες (ιδιομορφικές) μάζες και αντίστοιχες δυσκαμψίες που αντιστοιχούν σε αυτή τη κανονικοποίηση δίνονται ως,

$$m_1^* = \phi_1^T M \phi_1 = 19.102, \quad k_1^* = \phi_1^T K \phi_1 = \lambda_1 m_1^* = \omega_1^2 m_1^* = 29059.854$$
$$m_2^* = \phi_2^T M \phi_2 = 13.621, \quad k_2^* = \phi_2^T K \phi_2 = \lambda_2 m_2^* = \omega_2^2 m_2^* = 63061.670$$

[20]Ενδέχεται να παρατηρούμε σχετικά σημαντικές «αποκλίσεις» από τη μηδενική τιμή λόγω των στρογγυλοποιήσεων.



Σχήμα 55: Δεύτερη ιδιομορφή για κανονικοποίηση με θεώρηση μοναδιαίας τιμής της συνιστώσας που αντιστοιχεί στο πρώτο βαθμό ελευθερίας.

όπου M και K τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας αντίστοιχα.

Κανονικοποίηση ως προς το μητρώο μάζας

Αναζητούμε κατάλληλο συντελεστή ώστε να προκύψουν ιδιοδιανύσματα κανονικοποιημένα ως προς το μητρώο μάζας. Αυτό σημαίνει πως για ένα ιδιοδιάνυσμα ϕ_i θα ισχύει η σχέση $\phi_i^T M \phi_1 = = 1$, δηλαδή η γενικευμένη (ιδιομορφική) μάζα m_i^* θα είναι ίση με τη μονάδα. Για να πραγματοποιηθεί αυτό ξεκινάμε από ένα ιδιοδιάνυσμα οποιασδήποτε κανονικοποίησης και το διαιρούμε με τη ρίζα της γενικευμένης μάζας της ίδιας κανονικοποίησης. Με το τρόπο αυτό, διαιρώντας το ιδιοδιάνυσμα ϕ_1 της προηγούμενης παραγράφου, με την ριζά της αντίστοιχης γενικευμένης μάζας $\sqrt{m_1^*}$ θα λάβουμε ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα για τη πρώτη ιδιόμορφη το οποίο θα είναι κανονικοποιημένο ως προς τη μάζα.

$$\phi_1 = \left\{ \begin{array}{c} \phi_{11}/\sqrt{m_1^*} \\ \phi_{21}/\sqrt{m_1^*} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1/\sqrt{19.102} \\ 1.098/\sqrt{19.102} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.229 \\ 0.251 \end{array} \right\}$$

Όμοια για τη δεύτερη ιδιομορφή, η κανονικοποίηση ως προς προς τη μάζα προκύπτει,

$$\phi_2 = \left\{ \begin{array}{c} \phi_{12}/\sqrt{m_2^*} \\ \phi_{22}/\sqrt{m_2^*} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1/\sqrt{13.621} \\ -0.783/\sqrt{13.621} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.271 \\ -0.212 \end{array} \right\}$$

Το μητρώο, των κανονικοποιημένων ως προς το μητρώο μάζας, ιδιοδιανυσμάτων είναι,

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.229 & 0.271 \\ 0.251 & -0.212 \end{bmatrix}.$$

Ιδιομορφική απόσβεση και το αντίστοιχο μητρώο απόσβεσης

Αναφέρθηκε από την αρχή ότι θα θεωρηθεί ποσοστό κρίσιμης απόσβεσης για κάθε ιδιόμορφη $\xi = 2\%$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ιδιομορφική εξίσωση θα έχει συντελεστή γενικευμένης απόσβεσης $c_i^* = 2m_i^*\omega_i\xi_i$, ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι, $\xi_i = \xi$ και για κανονικοποίηση ως προς τη μάζα τελικά θα έχουμε $c_i^* = 2\omega_i\xi_i$. Το μητρώο των γενικευμένων (ιδιομορφικών) αποσβέσεων θα είναι διαγώνιο λόγω της θεωρούμενης ορθογωνικότητας του ως προς τα ιδιοδιανύσματα,

$$C^* = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\xi\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.560 & 0 \\ 0 & 2.722 \end{bmatrix}.$$

Από τη σχέση που δίνεται στην εξ. (118) μπορούμε να υπολογίσουμε το μητρώο απόσβεσης που αντιστοιχεί στην ιδιομορφική αυτή απόσβεση.

$$C = M\Phi C^*\Phi^T M = \begin{bmatrix} 17.804 & -4.904 \\ -4.904 & 18.876 \end{bmatrix} \tag{129}$$

Έχει ίσως ενδιαφέρον να αναφερθεί εδώ πως για να ταυτιζονται το μητρώο απόσβεσης που αντιστοιχεί στις εξισώσεις Lagrange (βλ. εξ. (161) Ενότητας 4.6.3), θα πρέπει :

$$\begin{aligned} c_0 &= -4.904 \\ c_1 + c_0 = 17.804 \rightarrow c_1 &= 22.708 \\ c_2 + c_0 = 18.876 \rightarrow c_2 &= 23.780 \end{aligned}$$

και σε αυτή τη περίπτωση το μητρώο απόσβεσης θα ήταν αναλογικό.

Εφαρμογή μεθόδου επαλληλίας ιδιομορφών

Η σχέση της εξ. (121) αν την αναλύσουμε στα δυο ιδιοδιανύσματα του συστήματος

$$u(t) = \phi_1 q_1(t) + \phi_2 q_2(t) \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} q_1(t) + \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} q_2(t)$$

έχοντας επιλέξει τα κανονικοποιημένα ως προς τη μάζα ιδιοδιανύσματα και λαμβάνοντας έποψη ότι $f_1^*(t) = \phi_1^T f(t)$ και $f_2^*(t) = \phi_2^T f(t)$, οι δυο διαφορικές εξισώσεις που έχουμε να λύσουμε είναι,

$$\ddot{q}_1(t) + 2\xi\omega_1\dot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \phi_{11} f_1(t) + \phi_{21} f_2(t) \tag{130}$$

$$\ddot{q}_2(t) + 2\xi\omega_2\dot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \phi_{12} f_1(t) + \phi_{22} f_2(t) \tag{131}$$

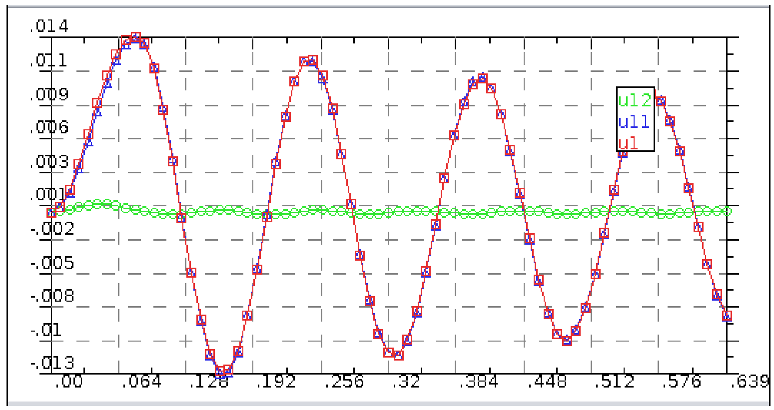
Αφού αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές από τους αντίστοιχους αριθμούς θα καταλήξουμε στις εξισώσεις,

$$\ddot{q}_1(t) + 1.560\dot{q}_1(t) + 1521.312 q_1(t) = 48.0 \tag{132}$$

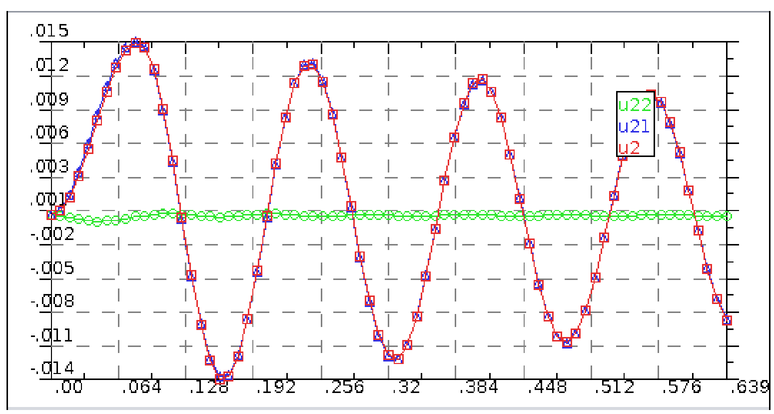
$$\ddot{q}_2(t) + 2.722\dot{q}_2(t) + 4629.714 q_2(t) = 5.9 \tag{133}$$

για $t \leq T_1/2 = 0.161/2$, από το οποίο χρονικό σημείο και ύστερα το σύστημα θα συνεχίσει εκτελώντας ελεύθερη ταλάντωση. Οι αρχικές συνθήκες, στο χρόνο μηδέν, είναι μηδενικές.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να λύσουμε (βλ. για παράδειγμα και Ενότητα 2.14.1) τις πιο πάνω εξισώσεις αναλυτικά ή αριθμητικά. κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί στην εξίσωση κίνησης ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή. Εδώ θα παρουσιάσουμε μόνο τα αποτελέσματα μιας αριθμητικής επίλυσης αφού θεωρήσουμε συνολικό χρόνο απόκρισης και παρατήρησης των αποτελεσμάτων $T_{tot} = 4T_1$. Αποτελέσματα της απόκρισης και για τους δυο βαθμούς ελευθερίας παρουσιάζονται ξεχωριστά στα Σχήματα 56 και 57. Στις ίδιες εικόνες είναι ευδιάκριτη και η συμμετοχή κάθε ιδιομορφικής συνιστώσας, με αυτή της δεύτερης (πράσινο χρώμα) να είναι κατά πολυ μικρότερη. Αυτή η τελευταία παρατήρηση, και πάντα σχετικά με την απαιτούμενη ακρίβεια των αποτελεσμάτων τέτοιων αναλύσεων, θα μπορούσε να οδηγήσει στην επιλογή της αγνόησης στα αποτελέσματα της συμβολής της δεύτερης ιδιομορφής. Η επιλογή αυτή αποτελεί μια συχνή τακτική όταν καταφεύγουμε στη μέθοδο της επαλληλίας των ιδιομορφών όπου η πολυ μικρή επιρροή των ανώτερων ιδιομορφών δεν λαμβάνεται υπόψη.



Σχήμα 56: Απόκριση $u_1(t)$ της μάζας του αριστερά πλαισίου. Η συμβολή της πρώτης ιδιομορφής είναι $u_{11}(t) = \phi_{11} q_1(t)$ και της δεύτερης $u_{12}(t) = \phi_{12} q_2(t)$.



Σχήμα 57: Απόκριση $u_2(t)$ της μάζας του δεξιά πλαισίου. Η συμβολή της πρώτης ιδιομορφής είναι $u_{21}(t) = \phi_{21} q_1(t)$ και της δεύτερης $u_{22} = \phi_{22} q_2(t)$.

4 Εξισώσεις κίνησης

Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των δυναμικών συστημάτων μπορούν να προκύψουν με διαφορετικούς τρόπους, καταλήγουν όμως πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα[21]. Ο πιο θεμελιώδης τρόπος είναι η εφαρμογή της συνθήκης της δυναμικής ισορροπίας του συστηματος υπό μελέτη (ουσιαστικά η αρχή του D' Alembert που προκύπτει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα). Δύο άλλες ενεργειακού τύπου μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν βασίζονται αντίστοιχα στην αρχή των δυνατών έργων και στην αρχή του Hamilton. Κάποιες από αυτές (όπως η αρχή του Hamilton), είναι πιο κατάλληλες για την μελέτη πολύπλοκων συστημάτων, ενώ κάποιες άλλες (όπως η αρχή του D' Alembert) είναι πιο εύκολα εφαρμόσιμες στη μελέτη διακριτοποιημένων συστημάτων με περιορισμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας.

Μια σύντομη παρουσίαση των τριών παραπάνω μεθόδων θα γίνει με αφορμή τη μελέτη του απλούστερου δυναμικού συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας, δηλαδή του μονοβάθμιου ταλαντωτή που έχουμε παρουσιάσει εδώ. Πληρέστερη παρουσίαση μπορεί να βρει κανείς και στην ελληνική βιβλιογραφία, σε βιβλία που αναφέρονται στην εισαγωγή και αλλού[22].

4.1 Αρχή του D' Alembert

Η αρχή αυτή συνδέεται με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, σύμφωνα με τον οποίο ο ρυθμός μεταβολής της ορμής μίας κινούμενης μάζας m, ισούται με το σύνολο των δυνάμεων που δρουν πάνω σε αυτήν. Στην περίπτωση του μονοβάθμιου συστήματος που εξετάζεται εδώ, η αρχή αυτή διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} & m\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \sum_i f_i(t) = f(t) - f_D(t) - f_S(t) \rightarrow \\ & m\ddot{u}(t) + c\dot{u} + ku(t) = f(t) \end{aligned}$$

Κατ΄ αυτό τον τρόπο, προκύπτει μια εξίσωση δυναμικής ισορροπίας, σύμφωνα με την οποία για κάθε χρονική στιγμή η εξωτερική δράση ισούται με το άθροισμα των δυνάμεων αδρανείας, απόσβεσης και επαναφοράς.

4.2 Αρχή των δυνατών έργων

Σύμφωνα με την αρχή αυτή, εαν σε ελαστικό σώμα στο οποίο δρα ένα σύστημα δυνάμεων επιβληθεί μια δυνητική (ή υποθετική) παραμόρφωση που δεν

[21] Μέρος από το υλικό που παρουσιάζουμε εδώ (4.1-4.3) προέρχεται από το βιβλίο [A1] της λίστας στην εισαγωγική ενότητα 1.4.1.

[22] Σ. Νατσιάβας, Εφαρμοσμένη δυναμική, εκδ. Ζήτη, 1994

παραβιάζει τις συνοριακές συνθήκες, τότε το συνολικό έργο που παράγεται από το σύστημα των δυνάμεων ισούται με μηδέν. Συνεπώς, εαν στο μονοβάθμιο σύστημα επιβληθεί η ιδεατή μετακίνηση (virtual displacement) δu η οποία δεν παραβιάζει τις συνθήκες στήριξης, τα σημεία εφαρμογής όλων των δυνάμεων που ενεργούν μετατοπίζονται, με αποτέλεσμα να παραχθεί το συνολικό έργο του μηχανικού συστήματος ως

$$\delta\mathcal{E} = -m\ddot{u}\delta u - c\dot{u}\delta u - ku\delta u + f\delta u = 0$$

από το οποίο προκύπτει η εξίσωση δυναμικής ισορροπίας, εξ. (1), ξανά. Στην παραπάνω διατύπωση του δυνητικού έργου $\delta\mathcal{E}$, το αρνητικό πρόσημο σημαίνει πως η δύναμη αντιτίθεται στην ιδεατή μετατόπιση δu.

4.3 Εξισώσεις Hamilton

Σύμφωνα με την αρχή αυτή, εαν σε ένα ελαστικό σώμα και για το χρονικό διάστημα (t_1, t_2) αθροισθεί η μεταβολή της κινητικής και δυναμικής του ενέργειας, τότε πάνω στο έργο που παράγουν οι εξωτερικές μη-συντηρητικές δυνάμεις, το άθροισμα των μεταβολών ισούται με μηδέν. Ορίζοντας συνεπώς ως,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2$$

την κινητική ενέργεια του σώματος, ως

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}ku^2$$

την δυναμική του ενέργεια στην οποία συμπεριλαμβάνονται οι δυνάμεις επαναφοράς και τυχόν εξωτερικές συντηρητικές δράσεις, ως $\mathcal{W}$ το έργο που παράγεται από εξωτερικές μη-συντηρητικές δράσεις και από τις δυνάμεις απόσβεσης, και τέλος ως δ την μεταβολή (variation), η εξίσωση που προκύπτει για τον μονοβάθμιο ταλαντωτή είναι:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathcal{T} - \mathcal{V})dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{W}dt = 0 \tag{134}$$

Εύκολα αποδεικνύεται τώρα πως οι μεταβολές των ενεργειακών όρων στην παραπάνω εξίσωση είναι $\delta\mathcal{T}{=}m\dot{u}\delta\dot{u}$, $\delta\mathcal{V}{=}ku\delta u$ και $\delta\mathcal{W} = f(t)\delta u - c\dot{u}\delta u$. Μετά από τις παραπάνω αντικαταστάσεις και την παραγοντική ολοκλήρωση του πρώτου όρου της εξίσωσης του Hamilton, προκύπτει η εξίσωση

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(-m\ddot{u} - c\dot{u} - ku + f(t)\right)\delta u dt = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για οποιαδήποτε, μη-μηδενική, αλλά αυθαίρετη μεταβολή δu, τότε ο όρος μέσα στις αγκύλες της εξίσωσης πρέπει να μηδενίζεται. Συνεπώς καταλήγουμε πάλι στην ίδια εξίσωση δυναμικής ισορροπίας, εξ. (1), που προέκυψε από την εφαρμογή των δύο προηγούμενων μεθόδων.

4.4 Εξισώσεις Lagrange

Οι λεγόμενες εξισώσεις Lagrange αφορούν την άμεση εφαρμογή της εξ. 134 εκφράζοντας τις ποσότητες της κινητικής ενέργειας $\mathcal{T}$, της δυναμικής ενέργειας $\mathcal{V}$ και του δυνατού έργου $\delta\mathcal{W}$ σε όρους γενικευμένων συντεταγμένων $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Με τον όρο γενικευμένες συντεταγμένες εννοούμε τις απαραίτητες παραμέτρους που χρειάζονται για να καθορίσουμε την κίνηση του συστήματος, είναι δηλαδή βαθμοί ελευθερίας που μπορεί να έχουν ή όχι άμεση φυσική ερμηνεία.

Για τα περισσότερα μηχανικά και κατασκευαστικά συστήματα η κινητική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί σε όρους των γενικευμένων συντεταγμένων και των πρώτων χρονικών τους παραγώγων, ενώ η δυναμική ενέργεια μπορεί να εκφραστεί αποκλειστικά σε όρους γενικευμένων συντεταγμένων. Επιπλέον το δυνατό έργο μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των μεταβολών.

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N) \tag{135}$$
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(q_1, q_2, \ldots, q_N) \tag{136}$$
$$\delta\mathcal{W} = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_N\delta q_N \tag{137}$$

όπου οι συντελεστές $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ οι γενικευμένες δυνάμεις διέγερσης που αντιστοιχούν στις γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \ldots, q_N$. Με αντικατάσταση των πιο πάνω εξισώσεων στην εξ. (134), ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες για τους όρους των ταχυτήτων και θεωρώντας $\delta q_i(t_1)$=$\delta q_i(t_2)$=0, μπορούν να διαμορφωθούν οι εξίσωσεις,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial q_i} = Q_i \tag{138}$$

οι οποίες είναι γνωστές και ως εξισώσεις κίνησης Lagrange με ευρεία εφαρμογή στις τεχνολογικές και επιστημονικές εφαρμογές.

4.5 Οντότητες πακέτου courses.structuraldynamics

4.5.1 Κλάση pendulum

Περιγραφή:
Το αντικείμενο αυτό αφορά ένα πολυβάθμιο εκκρεμές που αποτελείται από μια διάταξη μαζών συνδεδεμένων μεταξύ τους μέσω σειράς αβαρών και απαραμόρφωτων ράβδων όπως και στην εικόνα του Σχήματος 58. Κάθε επιμέρους μάζα έχει τιμή m_i και κάθε ράβδος μήκος l_i που από προεπιλογή θεωρείται μοναδιαίο. Το εκκρεμές θεωρείται πως εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση, απουσία εξωτερικής διέγερσης. Το αντικείμενο αυτό συμπεριλαμβάνει και μεθόδους για επίλυση κάτω από αρχικές συνθήκες για αμφότερες τις περιπτώσεις διαφορικών εξισώσεων, γραμμικής και μη γραμμικής θεώρησης. Στη τρέχουσα έκδοση επίλυση γίνεται για το απλό (μία μάζα) και το διπλό εκκρεμές (δύο μάζες).

Δημιουργία στιγμιότυπου:
Ο κονστράκτορας (constructor) ενός στιγμιότυπου του αντικείμενου εμφανίζεται σε τρεις εκδοχές. Στην πρώτη το όρισμα του αποτελείται από δύο μεταβλητές διατάξεων πραγματικών αριθμών διπλής ακρίβειας που αντιστοιχούν με τη σειρά, στις μάζες και τα μήκη των ράβδων ανάρτησης. Στην δεύτερη εκδοχή του κονστράκτορα παραλείπεται η διάταξη των τιμών των μηκών που θεωρούνται τώρα μοναδιαία. Τέλος, η τρίτη εκδοχή αφορά τη δημιουργία ενός απλού εκκρεμούς δίνοντας μονάχα το μήκος της ράβδου ανάρτησης.

- `pendulum(double[] masses, double[] lengths)`
- `pendulum(double[] masses)`
- `pendulum(double len)`

Μέθοδοι:
Η ονομασία των μεθόδων έχει γίνει με τρόπο τέτοιο ώστε να είναι, το δυνατό, επεξηγηματική.

- void setLengths(double[ ] lengths)
- void setInitCond(double[ ] th0, double[ ] dth0)
- void setInitCond(double[ ] th0)
- void solve(double tot, double dt)

συνεχίζεται ...

Κλάση pendulum (…συνέχεια)

Μέθοδοι:

- void setGravity(double g)
- void setOrigin(double x0, double y0)
- double[ ] Theta(int dof)
- double[ ] Theta()
- double[ ] DTheta(int dof)
- double[ ] DTheta()
- double[ ] Xdef(int dof)
- double[ ] Ydef(int dof)

4.6 Παραδείγματα και εφαρμογές

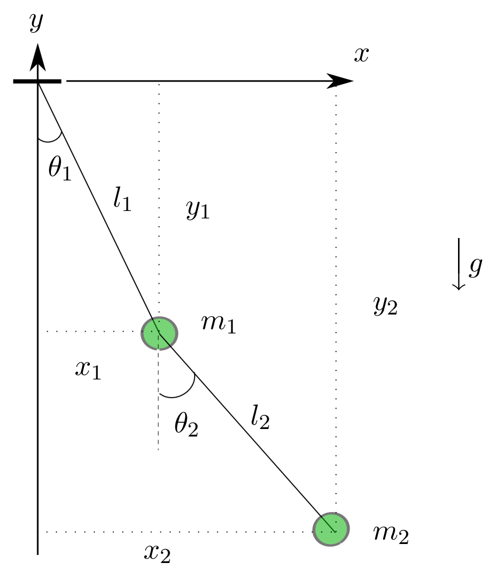
4.6.1 Το διπλό εκκρεμές

Για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης και την περαιτέρω μελέτη της απόκρισης του διπλού εκκρεμούς σε συνθήκες ελεύθερης ταλάντωσης, θα εφαρμόσουμε την διαδικασία της κατάστρωσης των εξισώσεων Lagrange αφού εκφράσουμε τις επιμέρους ενεργειακές ποσότητες (135)-(137) ως συναρτήσεις γενικευμένων συντεταγμένων και των χρονικών τους παραγώγων. Ως γενικευμένες συντεταγμένες θα επιλέξουμε τις γωνίες των ράβδων ανάρτησης με τη κατακόρυφο θ_1 και θ_2. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες των μαζών m_1 και m_2 εκφράζονται μέσω των γενικευμένων συντεταγμένων ως,

$$\begin{aligned}
x_1 &= l_1 \sin\theta_1 & \dot{x}_1 &= l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\
y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 & \dot{y}_1 &= l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \\
x_2 &= x_1 + l_2 \sin\theta_2 & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \\
y_2 &= y_1 - l_2 \cos\theta_2 & \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \qquad (139)
\end{aligned}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$



Σχήμα 58: Σύστημα διπλού εκκρεμούς αναρτημένου μέσω αβαρών και απαραμόρφωτων ράβδων.

και με αντικατάσταση των σχέσεων των εξ. (139),

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2.$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος οφείλεται αποκλειστικά στο βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση της βαρύτητας g θα δίνεται,

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \text{σταθερά} \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 + \text{σταθερά}\end{aligned}$$

Όσο αφορά το έργο $\delta\mathcal{W}$, αυτό θα είναι μηδενικό αφού εξωτερικές δυνάμεις αλλά και λοιπές μη συντηρητικές δυνάμεις δεν υπάρχουν στο συγκεκριμένο παράδειγμα.

Στη συνέχεια θα πρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange, όπως δίνονται στην εξ. (138), για κάθε μια από τις δύο γενικευμένες συντεταγμένες. Αρχικά για q_i:=θ_1, υπολογίζουμε,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

ενώ η χρονική παράγωγος της πιο πάνω σχέσης,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2) \qquad (140)$$

επιπλέον η παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς θ_1,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2), \qquad (141)$$

ενώ η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς θ_1,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta_1} = (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1. \qquad (142)$$

Συνεχίζοντας για $q_i{:=}\theta_2$, υπολογίζουμε,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2$$

ενώ η χρονική παράγωγος της πιο πάνω σχέσης,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2) \qquad (143)$$

επιπλέον η παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς θ_2,

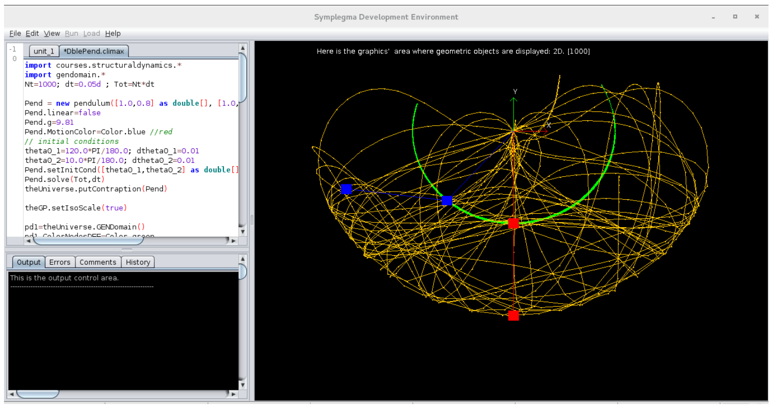
$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2), \qquad (144)$$

ενώ η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς θ_2,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta_2} = m_2 g l_2 \sin\theta_2. \qquad (145)$$

Σύμφωνα με την εξ. (138), τις δυο εξισώσεις του συστήματος των εξισώσεων κίνησης του διπλού εκκρεμούς θα μας δώσει ο συνδυασμός, (140)-(141)+(142) και (143)-(144)+(145),

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1-\theta_2) \\ + (m_1+m_2) l_1 g \sin\theta_1 = 0 \qquad (146)$$



Σχήμα 59: Επίλυση διπλού εκκρεμούς στο περιβάλλον του SDE με χρήση του αντικείμενου `pendulum`.

$$m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin\theta_2 = 0 \quad (147)$$

Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις είναι ισχυρά μη γραμμικές και οδηγούν σε χαοτική συμπεριφορά ενώ για την αριθμητική επίλυση τους, π.χ. με τη μέθοδο Runge-Kutta, χρειάζονται επιπλέον επεξεργασία. Ενδεικτικά δίνεται ένα στιγμιότυπο από οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μιας επίλυσης του διπλού εκκρεμούς όπου σχηματίζονται και οι τροχιές των μαζών στη εικόνα του Σχήματος 59. Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει να γράψουμε τη πρώτη ως προς $\ddot{\theta}_1$ και τη δεύτερη ως προς $\ddot{\theta}_2$ και να προχωρήσουμε με εναλλάξ αντικατάσταση ώστε να αποκτήσουμε δυο εξισώσεις αποσυζευγμένες στις $\ddot{\theta}_1$ και $\ddot{\theta}_2$. Στη τρέχουσα έκδοση του πακέτου `courses.structuraldynamics` και για το αντικείμενο αυτού, `pendulum`, έχουμε υιοθετήσει τις σχέσεις που δίνονται σε ιστοσελίδα στο διαδίκτυο[23] οπότε και απαιτούνται περαιτέρω έλεγχοι. Σε κάθε περίπτωση και με επιφύλαξη αναπαραγάγουμε εδώ τις σχέσεις που μας δίνουν τις μη γραμμικές εξισώσεις του διπλού εκκρεμούς σε μορφή κατάλληλη για αριθμητική επίλυση με τη μέθοδο Runge-Kutta. Έχοντας θέσει για τη χρονική παράγωγο των γωνιών $\dot{\theta}_1 = \omega_1$ και $\dot{\theta}_2 = \omega_2$, δηλαδή τις γωνιακές ταχύτητες,

[23] `https://myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html`

μπορούμε να γράψουμε το σύστημα των εξισώσεων σε μορφή της εξ. (64),

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \omega_1 \\
\dot{\theta}_2 &= \omega_2 \\
\dot{\omega}_1 &= \frac{A_1 + A_2}{l_1 \Gamma} \\
\dot{\omega}_2 &= \frac{B_1 + B_2}{l_2 \Gamma}
\end{aligned}$$

όπου για την πιο εύκολη ανάγνωση θέσαμε,

$$\begin{aligned}
A_1 &= -g(2m_1 + m_2)\sin\theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2), \\
A_2 &= -2\sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 (\omega_2^2 l_2 + \omega_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)),
\end{aligned}$$

παρόμοια,

$$\begin{aligned}
B_1 &= 2\sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega_1^2 l_1 (m_1 + m_2), \\
B_2 &= g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \omega_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)).
\end{aligned}$$

και τέλος

$$\Gamma = (2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)).$$

Επιπλέον αξίζει να σημειωθεί ότι για τη παραδοχή μικρών γωνιών θ_1 και θ_2 οι εξισώσεις μπορούν να γραμμικοποιηθούν αν λάβουμε υπόψη ότι για μικρο θ ισχύουν οι σχέσεις,

$$\begin{aligned}
\sin\theta &\approx \theta \\
\cos\theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2}.
\end{aligned}$$

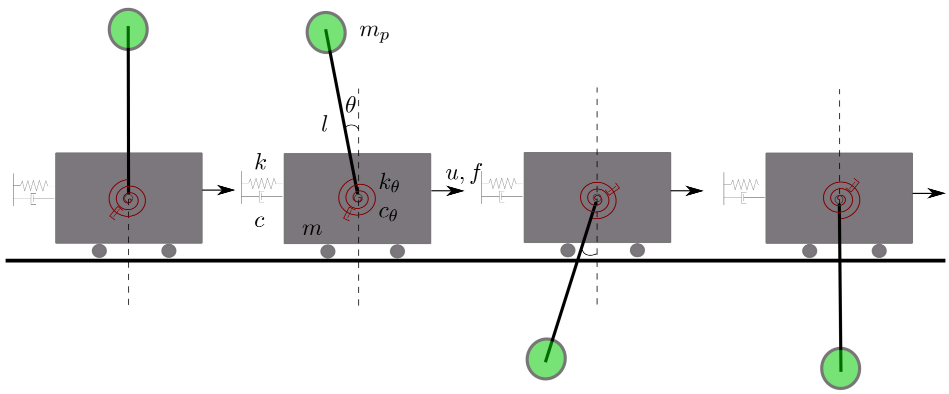
Σε αυτή τη περίπτωση οι εξισώσεις κίνησης θα λάβουν τη μορφή,

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \\
m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0
\end{aligned}$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε και στην πιο συνεκτική μητρωική μορφή,

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

δηλαδή τη γνώριμη μορφή $M\ddot{\theta}(t) + K\theta(t) = 0$ που μπορούμε να λύσουμε με μεθόδους που είδαμε όπως, για παράδειγμα, η β-Newmark.



Σχήμα 60: Σύστημα ανεστραμμένου εκκρεμούς με ελατηριακές συνδέσεις, αποσβεστικούς μηχανισμούς και εξωτερική φόρτιση.

4.6.2 Το ανεστραμμένο εκκρεμές

Το ανεστραμμένο εκκρεμές είναι ένα εκκρεμές που έχει τη μάζα στο άνω σημείο ισορροπίας. Θεωρείται συχνά ότι στηρίζεται μέσω μιας αβαρούς και απαραμόρφωτης ράβδου σε ένα αμαξίδιο που μπορεί να κινηθεί στην οριζόντια διεύθυνση. Η άνω θέση ισορροπίας είναι ασταθής σε αντίθεση με την κάτω που είναι σταθερή. Η προαναφερθείσα αστάθεια σημαίνει ότι από αυτή τη θέση ισορροπίας το σύστημα απομακρύνεται με μια πολυ μικρή διαταραχή.

Το ανεστραμμένο εκκρεμές είναι ένα κλασικό πρόβλημα στη δυναμική και στη θεωρία αυτόματου ελέγχου και άρα και του έλεγχου κατασκευών και συχνά χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για τη δοκιμή αλγόριθμων ελέγχου.

Εδώ παρουσιάζουμε εκδοχή ανεστραμμένου εκκρεμούς το αμαξίδιο του οποίου μπορεί να θεωρηθεί ο κλασικός μονοβάθμιος ταλαντωτής που έχουμε μελετήσει σε αυτές τις σημειώσεις και που αποτελείται από τη μάζα m του αμαξιδίου ενώ ένα ελατήριο σταθεράς k και ένας αποσβεστήρας σταθεράς c προσδίδουν, κατά τα γνωστά, μια αντίσταση στη κίνηση του. Επιπλέον θεωρούμε ότι η «αρθρωτή» σύνδεση της ράβδου ανάρτησης της μάζας m_p του εκκρεμούς πραγματοποιείται μέσω ενός στροφικού ελατηρίου σταθεράς k_θ και ενός αντίστοιχου αποσβεστικού μηχανισμού σταθεράς c_θ. Η κίνηση του αμαξιδίου ελέγχεται από μια εξωτερική δύναμη f, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 60.

Για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης και την περαιτέρω μελέτη της απόκρισης του διπλού εκκρεμούς σε συνθήκες ελεύθερης ταλάντωσης, θα εφαρμόσουμε την διαδικασία της κατάστρωσης των εξισώσεων Lagrange αφού εκφράσουμε τις επιμέρους ενεργειακές ποσότητες (135)-(137) ως συναρτήσεις γενικευμένων συντεταγμένων και των χρονικών τους παραγώγων. Ως γενικευμένες συντεταγμένες θα επιλέξουμε τη γωνία της ράβδου ανάρτησης με τη κατακόρυφο θ και την οριζοντια μετακινηση του αμαξιδίου u. Οι καρτεσιανες συντεταγμενες της μαζας του εκκρεμους m_p, καθως και οι ταχυτητες αυτων, θα δινονται ως,

$$\begin{aligned} x_p &= u - l\sin\theta & \dot{x}_p &= \dot{u} - l\dot{\theta}\cos\theta \\ y_p &= l\cos\theta & \dot{y}_p &= -l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned} \tag{148}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m_p(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2)$$

και με αντικατάσταση των σχέσεων των εξ. (148),

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(m + m_p)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}m_p(l^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{u}l\dot{\theta}\cos\theta)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος οφείλεται στο βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση της βαρύτητας g και στην ελαστικη ενεργεια που αποθηκευεται στα ελατηρια,

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= m_p g y_p + \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}k_\theta\theta^2 + \text{σταθερά} \\ &= m_p g l\cos\theta + \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}k_\theta\theta^2 + \text{σταθερά} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις Lagrange, όπως δίνονται στην εξ. (138), για κάθε μια από τις δύο γενικευμένες συντεταγμένες. Αρχικά για $q_i{:=}u$, υπολογίζουμε,

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{u}} = (m + m_p)\dot{u} - m_p l\dot{\theta}\cos\theta$$

ενώ η χρονική παράγωγος της πιο πάνω σχέσης,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{u}}\right) = (m + m_p)\ddot{u} - m_p l\ddot{\theta}\cos\theta + m_p l\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{149}$$

επιπλέον η παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς u,

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial u} = 0, \tag{150}$$

ενώ η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς u,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u} = ku. \tag{151}$$

Επιπλεον για μια δυνατη μεταβολη δu της γενικευμενης συντεταγμενης u οι αντιστοιχες εξωτερικες και μη συντηρητικες δυναμεις θα παραγουν εργο,

$$\delta \mathcal{W} = Q_u \delta u = (f - c\dot{u})\delta u \to Q_u = f - c\dot{u} \tag{152}$$

Επειτα για q_i:=θ, υπολογίζουμε,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = m_p l^2 \dot{\theta} - m_p \dot{u} l \cos\theta$$

ενώ η χρονική παράγωγος της πιο πάνω σχέσης,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_p l^2 \ddot{\theta} + m_p \dot{u} l \dot{\theta} \sin\theta - m_p \ddot{u} l \cos\theta \tag{153}$$

επιπλέον η παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς θ,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = m_p \dot{u} l \dot{\theta} \sin\theta, \tag{154}$$

ενώ η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς θ,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} = -m_p g l \sin\theta + k_\theta \theta. \tag{155}$$

Επιπλεον για μια δυνατη μεταβολη $\delta\theta$ της γενικευμενης συντεταγμενης θ οι αντιστοιχες εξωτερικες και μη συντηρητικες δυναμεις θα παραγουν εργο,

$$\delta \mathcal{W} = Q_\theta \delta\theta = -c_\theta \dot{\theta} \delta u \to Q_\theta = -c_\theta \dot{\theta} \tag{156}$$

Σύμφωνα με την εξ. (138), τις δυο εξισώσεις του συστήματος των εξισώσεων κίνησης του διπλού εκκρεμούς θα μας δώσει ο συνδυασμός,
(149)-(150)+(151)=(152) και (153)-(154)+(155)=(156),

$$(m + m_p)\ddot{u} - m_p l \ddot{\theta} \cos\theta + m_p l \dot{\theta}^2 \sin\theta + ku + c\dot{u} = f \tag{157}$$

$$m_p l^2 \ddot{\theta} - m_p \ddot{u} l \cos\theta - m_p g l \sin\theta + k_\theta \theta + c_\theta \dot{\theta} = 0 \tag{158}$$

οι οποίες αποτελούν τις μη γραμμικές εξισώσεις του συστήματος του ανεστραμμένου εκκρεμούς που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τη μη γραμμική ανάλυση και έλεγχο του συστήματος.

4.6.3 Διβάθμιο σύστημα ταλάντωσης συζευγμένων διατμητικών πλαισίων

Εδώ θα χρησιμοποιηθεί η ενεργειακή προσέγγιση των εξισώσεων Lagrange για να καταστρωθούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος ταλαντωτής της εικόνας στο Σχήμα 53 που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.6.1. Οι γενικευμένες συντεταγμένες που θα περιγράφουν την κίνηση του συστήματος θα είναι οι μετατοπίσεις των ορόφων (μαζών) κάθε πλαισίου u_1 και u_2 αντίστοιχα. Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m_1\dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{u}_2^2.$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι η ενέργεια που αποθηκεύεται στο σύστημα ως (ελαστική) ενέργεια παραμόρφωσης,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k_1u_1^2 + \frac{1}{2}k_2u_2^2 + \frac{1}{2}k_0(u_2 - u_1)^2.$$

Τέλος το έργο των εξωτερικών και των μη συντηρητικών (αποσβεστικών) δυνάμεων είναι,

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W} &= f_1\delta u_1 + f_2\delta u_2 - c_1\dot{u}_1\delta u_2 - c_2\dot{u}_2\delta u_2 - c_0(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)\delta(u_2 - u_1)\\ &= (\underbrace{f_1 - c_1\dot{u}_1 + c_0\dot{u}_2 - c_0\dot{u}_1}_{Q_{u_1}})\delta u_1 + (\underbrace{f_2 - c_2\dot{u}_2 - c_0\dot{u}_2 + c_0\dot{u}_1}_{Q_{u_2}})\delta u_2\end{aligned}$$

Οι απαραίτητες παραγωγίσεις ώστε να καθοριστούν οι εκφράσεις των εξισώσεων Lagrange, για τη γενικευμένη συντεταγμένη $q_i := u_1$ θα έχουμε,

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{u}_1} = m_1\dot{u}_1$$

και η χρονική της παράγωγος,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{u}_1} = m_1\ddot{u}_1$$

Η παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς τη γενικευμένη συντεταγμένη u_1 είναι μηδενική,

$$\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial u_1} = 0$$

Η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς τη γενικευμένη συντεταγμένη u_1,

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial u_1} = k_1u_1 - k_0(u_2 - u_1) = k_1u_1 + k_0u_1 - k_0u_2$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος ταλάντωσης προκύπτει, σύμφωνα με την εξ. (138), ως,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{u}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u_1} = Q_{u_1}$$

η οποία μετά από τις αντικαταστάσεις και κάποια αναδιάταξη όρων μπορεί να γραφεί ως,

$$m_1\ddot{u}_1 + c_1\dot{u}_1 + c_0\dot{u}_1 - c_0\dot{u}_2 + k_1u_1 + k_0u_1 - k_0u_2 = f_1 \qquad (159)$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος θα προκύψει με τη κατάστρωση της εξίσωσης Lagrange για τη δεύτερη γενικευμένη συντεταγμένη. Θεωρούμε $q_i := u_2$ και υπολογίζουμε,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{u}_2} = m_2\dot{u}_2$$

και η χρονική της παράγωγος,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{u}_2} = m_2\ddot{u}_2$$

Η παράγωγος της κινητικής ενέργειας ως προς τη γενικευμένη συντεταγμένη u_2 είναι μηδενική,

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_2} = 0$$

Η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας ως προς τη γενικευμένη συντεταγμένη u_2,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u_2} = k_2u_2 + k_0(u_2 - u_1) = k_2u_2 + k_0u_2 - k_0u_1$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος ταλάντωσης προκύπτει, σύμφωνα με την εξ. (138), ως,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{u}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u_2} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u_2} = Q_{u_2}$$

η οποία μετά από τις αντικαταστάσεις και κάποια αναδιάταξη όρων μπορεί να γραφεί ως,

$$m_2\ddot{u}_2 + c_2\dot{u}_2 + c_0\dot{u}_2 - c_0\dot{u}_1 + k_2u_2 + k_0u_2 - k_0u_1 = f_2 \qquad (160)$$

Από τις γραμμικές εξισώσεις (159) και (160) μπορούμε να γράψουμε το σύστημα των εξισώσεων στη συνήθη μητρωική μορφή,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\ddot{u}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_0 & -c_0 \\ -c_0 & c_2 + c_0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}}_{\dot{u}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k_2 + k_0 \end{bmatrix}}_{K} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}}_{u(t)} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}}_{f(t)} \tag{161}$$

Παράρτημα Α′ Η Groovy και το SDE

Η γλώσσα την οποία χρησιμοποιούμε ώστε να εφοδιάσουμε το περιβάλλον SDE με κατάλληλα εργαλεία για αξιοποίηση των βιβλιοθηκών που συμπεριλαμβάνονται στην Climax είναι η Groovy. Ο πιο απλός τρόπος για να δοκιμάσουμε την Groovy είναι διαδικτυακά με το Groovy Web Console[24]. Επιπλέον για να χρησιμοποιήσει κανείς είτε την Groovy είτε τις δυνατότητες του συνόλου της βιβλιοθήκης Climax μπορεί να τρέξει «διαδικτυακά» το περιβάλλον SDE[25] μέσω της τεχνολογίας του Java Web Start.

Για να διαχωρίσουμε τις ενδογενείς μεθόδους της Groovy[26] από δυνατότητες με τις οποίες έχουμε εφοδιάσει τον συνδυασμό των πακέτων που απαρτίζεται από την Climax και/ή το SDE θα δηλώνουμε στο τίτλο των ενοτήτων αυτού του κεφαλαίου με ένα αστερίσκο (*) για την δεύτερη περίπτωση. Σημειώνεται πως σε αυτή την ενότητα δεν θα αναφερθούμε σχεδόν καθόλου στις δυνατότητες αξιοποίησης των υπολογιστικών μεθόδων που περιλαμβάνονται στην βιβλιοθήκη Climax, ενώ περισσότερο θα επικεντρώσουμε στην χρήση της Groovy σαν μια εναλλακτική γλώσσα για υπολογισμούς και επιστημονικές/εκπαιδευτικές εφαρμογές.

Μια πληρέστερη και ταυτόχρονα συνοπτική περιγραφή μπορεί κανείς να βρεις στην επίσημη ιστοσελίδα της γλώσσας Groovy[27]

Α′.1 Μεταβλητές

Μεταβλητές (Variables), μπορούν να ονοματοδοτηθούν χρησιμοποιώντας κεφαλαίους ή πεζούς χαρακτήρες σε συνδυασμό με αριθμούς. Αποδεκτά ονόματα μπορεί να έχουν τη μορφή:

```
NetCost, Left2Pay, x3, X3, z25c5
```

Δεν επιτρέπεται να δίνουμε ονόματα τα οποία περιέχουν ειδικούς χαρακτήρες ή μεταβλητές που ξεκινάνε με αριθμό. Για παράδειγμα μη αποδεκτά ονόματα μεταβλητών είναι:

```
Net-Cost, 2pay, %x, *sign
```

[24] https://groovyconsole.appspot.com/

[25] http://symplegma.org/

[26] Σημειώνουμε εδώ ότι η γλώσσα προγραμματισμού Groovy απλοποιητικά πολλές φορές αναφέρεται και ως ένα υπερσύνολο, ή αλλιώς μια επέκταση, της γλώσσας Java.

[27] http://groovy-lang.org/documentation.html

Επιπλέον δεν πρέπει να χρησιμοποιηθούν ονόματα τα οποία χρησιμοποιούνται από την ίδια τη Groovy (ή και από το περιβάλλον SDE) όπως για παράδειγμα το PI=$3.14159\ldots \simeq \pi$.

```
x=13; y=5*x
z=x**2+y
println x
println "y= "+y
```

Όπως φαίνεται πιο πάνω για να εμφανιστεί μια η τιμή κάποιας μεταβλητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εντολή `print` ή την `println`. Το ελληνικό ερωτηματικό (;) χρησιμοποιείται για να χωρίσουμε επιμέρους εντολές που δίνονται στην ίδια γραμμή.

Α΄.2 Διατάξεις και πινάκες

Μια πολυ χρήσιμη οντότητα αποτελεί το αντικείμενο της διάταξης που θα χρησιμοποιούμε εδώ πολύ συχνά σε μια από τις δύο συνήθεις μορφές, αυτή του array καθώς και της ArrayList.

```
x=[]
x.add(1.0); x.add(4.5); x<<3.5
println x.size()
x[0]=2.5; x.remove(1)
println x
```

Μια χρήσιμη μέθοδος, όπως βλέπουμε και πιο πάνω, με την οποία μπορούμε να ανακτήσουμε το είδος κάποιας μεταβλητής είναι η getClass().

Α΄.3 Εσωτερικές συναρτήσεις

Στις εσωτερικές συναρτήσεις της Groovy συμπεριλαμβάνονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin, cos κ.α. καθώς και άλλες συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται ευρέως όπως για παράδειγμα οι sqrt, log, exp κ.α.. Για να ακριβολογούμε οι συναρτήσεις αυτές για να είναι διαθέσιμες στην Groovy, όπως και στη Java, θα πρέπει πρώτα να εισάγουμε (μέσω της εντολής, import static java.lang.Math.*) την προκαθορισμενη βιβλιοθήκη Math της Java. Στο περιβάλλον του SDE αυτό έχει γίνει εκ των πρότερων ώστε οι συναρτήσεις και οι σταθερές (όπως για παράδειγμα οι PI, E, για τα $\pi \approx 3.14$ και $e \approx 2.718$, αντίστοιχα) να είναι άμεσα διαθέσιμες. Μερικά παραδείγματα χρήσης είναι:

```
x=PI**2
println sqrt(x)
```

Σε αντίθεση με την Matlab/Octave οι εσωτερικές συναρτήσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε διατάξεις ή διανύσματα/πίνακες.

Α'.4 Δομές ελέγχου

Οι δομές ελέγχου είναι κομμάτια κώδικα τα οποία αφορούν εντολές και διαδικασίες που θα εκτελεστούν ή όχι ανάλογα με το αν ισχύει κάποια συγκεκριμένη συνθήκη ή μια ομάδα συνθηκών. Χρήσιμη ενδογενής μεταβλητή των γλωσσών Java/Groovy είναι η λογική boolean μεταβλητή που παίρνει τις αυτονόητες τιμές true ή false.

Αν σε κάποιο σημείο έχουμε αναθέσει κάποια τιμή στην μεταβλητή x, τότε μπορούμε να κάνουμε ελέγχους σε αυτό, όπως

- x == 2 είναι το x ίσο με 2;
- x ! =2 δεν είναι το x ίσο με 2;
- x > 2 είναι το x μεγαλύτερο από 2;
- x < 2 είναι το x μικρότερο από 2;
- x >=2 είναι το x μεγαλύτερο από ή ίσο με 2;
- x <= 2 είναι το x μικρότερο από ή ίσο με 2;

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι ο έλεγχος για την ισότητα απαιτεί δύο σύμβολα ισότητας ==. Σε αντίθεση με την Matlab/Octave οι εσωτερικές συναρτήσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε διατάξεις ή διανύσματα/πίνακες.

Α'.4.1 Δομή ελέγχου if/else

Η δομή ελέγχου if εξετάζει την αλήθεια μιας συνθήκης/πρότασης και προχωρά ή όχι σε κάποια ενέργεια. Η δομή αυτή μπορεί να συνοδεύεται και από ένα ακόλουθο else που δίνει την οδηγία του θα συμβεί αν δεν ισχύει η πρόταση ελέγχου. Αν δεν υπάρχει η επέκταση του else και δεν είναι αληθής η πρόταση τότε δεν θα γίνει καμιά περαιτέρω ενέργεια. Ένα παράδειγμα είναι και το παρακάτω.

```
// Initializing a local variable
int a = 2

//Check for the boolean condition
if (a<100) {
    //If the condition is true print the following statement
    println("The value is less than 100");
} else {
    //If the condition is false print the following statement
    println("The value is greater than 100");
}
```

A′.4.2 Δομή ελέγχου switch

Μια άλλη δομή ελέγχου και απόφασης των Java/Groovy είναι η switch μέσω της οποίας για να συμβεί κάτι εξετάζονται επιμέρους περιπτώσεις για μια πρόταση. Ένα παράδειγμα δίνεται πιο κάτω.

```
//initializing a local variable
a = 2

//Evaluating the expression value
switch(a) {
    //There is case statement defined for 4 cases
    // Each case statement section has a break condition to exit
     the loop
    case 1:
        println("The value of a is One");
        break;
    case 2:
        println("The value of a is Two");
        break;
    default:
        println("The value is neither One or Two");
        break;
}
```

A′.5 Δομές επανάληψης

Μια δομή επανάληψης επαναλαμβάνει μια διαδικασία, ο αριθμός των επαναλήψεων εξαρτάται από την αλήθεια/ισχύ μιας συνθήκης/πρότασης. Η γλώσσα Groovy διαθέτει πλούσιο εύρος σε δομές επανάληψης, ενώ εδώ θα παρουσιάσουμε αυτές που συνηθέστερα θα χρησιμοποιούμε στις εφαρμογές των σημειώσεων αυτών.

Α΄.5.1 Δομή επανάληψης for

Η δομή επανάληψης θα εκτελέσει την εντολή που είναι στο block της 5 φορές για τιμές του i από 0 έως και 4.

```
for(int i = 0;i<5;i++){println(i)}
// or equivalent
for(int i in 0..<5){println(i)}
```

Α΄.5.2 Δομή επανάληψης while

Όσο η συνθήκη ελέγχου είναι αληθής, εκτελούνται οι εντολές μέσα στο block της δομής while. Το αποτέλεσμα στο παράδειγμα που ακολουθεί θα είναι ίδιο με αυτό του παραδείγματος της δομής for που δόθηκε παραπάνω.

```
int i = 0;
while(i<5) {
    println(i);
    i++;
}
```

Α΄.5.3 Δομή επανάληψης σε πεδίο τιμών range

Μια πολυ χρήσιμη οντότητα της Groovy είναι και η αριθμοσειρά (range) ακεραίων η οποία μπορεί να οριστεί ως (start..end) και περιλαμβάνει τους αριθμούς από τον start έως και τον end. Σε συνδυασμό με την συνάρτηση each (και με όρισμα ένα συναρτησιακό αντικείμενο (closure), το οποίο παρουσιάζεται σε επόμενη παράγραφο) μπορούμε να ορίσουμε μια δομή επανάληψης όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί, με αποτέλεσμα ίδιο με τα πιο πάνω παραδείγματα.

```
(0..4).each{println(it)}
```

Α΄.6 Συναρτήσεις

Μια μέθοδος ή αλλιώς συνάρτηση στη Groovy ορίζεται έτσι ώστε να παίρνει ένα ή κάποια ορίσματα και να επιστρέφει κάτι. Το αντικείμενο που θα επιστρέφει μπορεί να είναι και ένα κενό αντικείμενο (void) ή ακόμα και κάποιο απροσδιόριστο αντικείμενο (def). Η συνάρτηση αφού ολοκληρώσει τις διαδικασίες που δίνονται στο σώμα της επιστρέφει την έξοδο της με την εντολή return. Στη περίπτωση που η συνάρτηση έχει οριστεί ως (void) ή (def) η τελευταία return δήλωση μπορεί να παραληφθεί.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα ορίσουμε και θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση:

$$f(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$$

```
double f(double x, double y){
 return Math.sin(2.0*Math.PI*x)*Math.sin(2.0*Math.PI*y)
}
println f(0.85,0.2)
```

Ο ορισμός για τους τύπους των παραμέτρων στο όρισμα της συνάρτησης είναι προαιρετικός. Στα πλαίσια του περιβάλλοντος SDE το όνομα της κλάσης Math μπορεί να παραληφθεί. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη θα μπορούσαμε να γράψουμε σε πιο συμπτυγμένη μορφή, όπως παρακάτω.

```
double f(x, y){
 return sin(2.0*PI*x)*sin(2.0*PI*y)
}
println f(0.85,0.2)
```

Α΄.7 Συναρτησιακά αντικείμενα (closures)

Για πολλούς λόγους, η εξήγηση των οποίων ξεπερνά την εμβέλεια και το διδακτικό σκοπό του παρόντος τεύχους, εδώ προτιμάμε τη χρήση του συναρτησιακού αντικείμενου (closure) αντί της συνάρτησης (method), αν και κάποιοι από τους λόγους αυτούς πιθανώς να φανούν αυτονόητοι από το περιεχόμενο αυτών των σημειώσεων. Ένας, ίσως απλοϊκός, τρόπος να αντιληφθεί κανείς το αντικείμενο closure, είναι να το θεωρήσει ως μια συνάρτηση που μπορεί να περάσει ως όρισμα μέσα σε μια άλλη συνάρτηση. Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει και η ονομασία που εδώ έχουμε επιλέξει στα ελληνικά ως *συναρτησιακό αντικείμενο*. Τα αντικείμενα αυτά είναι και μια από τις βασικές οντότητες, μαζί με τις δυνατότητες δυναμικού προγραμματισμού και του υψηλού βαθμού συμβατότητας με την Java, που καθιστούν την Groovy εξαιρετικά χρήσιμη. Ένα συναρτησιακό αντικείμενο ορίζεται μέσα σε αγκύλες με τις παραμέτρους εισόδου (ορίσματα) να χωρίζονται από το σώμα με το σύμβολο (−>). Τέλος, το συναρτησιακό αντικείμενο μπορεί να καταλήγει με μια δήλωση επιστροφής (return) ή και απουσία αυτής. Στην δεύτερη περίπτωση ως επιστροφή ορίζεται το υπολογισμένο μέγεθος από τη τελευταία διαδικασία που έχει γίνει μέσα στο σώμα του αντικειμένου.

Εδώ ως απλό παράδειγμα θα δώσουμε τον ορισμό της προηγούμενης τριγωνομετρικής συνάρτησης ως συναρτησιακό αντικείμενο.

```
f={x, y->
 sin(2.0*PI*x)*sin(2.0*PI*y)
}
println f(0.85,0.2)
```

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμα και όταν λείπουν οι μεταβλητές εισόδου το συναρτησιακό αντικείμενο της Groovy εχει μια προκαθορισμένη μεταβλητή με την ονομασία it. Αυτό μπορεί να φανεί στο παράδειγμα που ακολουθεί.

```
f={sin(2.0*PI*it[0])*sin(2.0*PI*it[1])}
println f([0.85,0.2])
```

Α΄.8 Είσοδος και έξοδος δεδομένων σε και από αρχεία

Η Groovy παρέχει με μια ομάδα βοηθητικών μεθόδων για την επικοινωνία με και διαχείριση δεδομένων προς και από αρχεία. Μια βασική ενέργεια είναι αρχικά να οριστεί ή να δημιουργηθεί αυτό το αρχείο

```
SomeFile = new File("somedirectory/Example.txt")
```

Α΄.8.1 Αποθήκευση δεδομένων

Για να γράψει κανείς σε ένα αρχείο, για παράδειγμα στο SomeFile που δημιουργήσαμε προηγούμενα, μπορεί να χρησιμοποιήσει μεθόδους όπως αυτές στο παράδειγμα που ακολουθεί.

```
SomeFile.write "This is the first line\n"
SomeFile << "This is the second line\n"
SomeFile.leftShift "This is the third line\n"
SomeFile.append "This is the fourth line\n"
println SomeFile.text
```

Η μέθοδος write ουσιαστικά σβήνει ότι έχει γραφτεί στο αρχείο και γράφει από πάνω το αλφαριθμητικό περιεχόμενο του ορίσματος. Η μέθοδος leftShift ή append για την οποία η Groovy υιοθετεί τον συμβολικό τελεστή <<, γράφει το περιεχόμενο του ορίσματος, στο τέλος του αρχείου χωρίς να σβήνει το προηγούμενο περιεχόμενο.

A′.8.2 Ανάκτηση δεδομένων

Για να διαβάσουμε δεδομένα από ένα αρχείο ο πιο απλός τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο text που επιστρέφει το περιεχόμενο του αρχείου σε μια αλφαριθμητική String μεταβλητή.

```
filetext=SomeFile.text
println filetext
```

ενώ αν θέλουμε μπορούμε να διαβάσουμε το αρχείο γραμμή προς γραμμή τοποθετώντας το σε μια λίστα με χρήση της μεθόδου readLines

```
lines = SomeFile.readLines()
lines.each{println it}
```

A′.9 Αρχεία δέσμης εντολών (scripts) *

Η γλώσσα προγραμματισμού Groovy διαθέτει δυνατότητες μιας scripting programming language. Με το όρο script (αρχείο δέσμης εντολών) εννοούμε ένα αρχείο το οποίο περιέχει μια ομάδα εντολών ή οδηγιών σε γραφή που ακολουθεί τις συμβάσεις κάποιας συγκεκριμένης γλώσσας προγραμματισμού, με σκοπό τη διενέργεια συγκεκριμένων διαδικασιών από κάποιο ηλεκτρονικό υπολογιστικό σύστημα. Η Groovy μπορεί να διαβάσει και να διαχειριστεί τέτοια αρχεία που μπορεί να έχουν οποιαδήποτε κατάληξη. Στα πλαίσια του περιβάλλοντος SDE έχει επιλεγεί η σύμβαση τα αντίστοιχα αρχεία να έχουν κατάληξη .climax καθώς βασική βιβλιοθήκη και ταυτόχρονα και κύριος λόγος ανάπτυξης του περιβάλλοντος ήταν η διαχείριση και αξιοποίηση της Java βιβλιοθήκης υπολογιστικών μεθόδων υπό τον τίτλο Climax. Ουσιαστικά ο μηχανισμός που αναλαμβάνει να εκτελέσει τις εντολές που περιέχονται στα script αυτά αρχεία είναι το αντικείμενο GroovyShell.

Στο παράρτημα παραθέτονται ολοκληρωμένα script αρχεία climax τα οποία περιέχουν τα σενάρια (εντολών) για την αντιμετώπιση προβλημάτων που παρουσιάζονται σε αυτές τις σημειώσεις.

Α΄.10 Μητρώα και διανύσματα *

Στο περιβάλλον του SDE ο προκαθορισμένος τύπος που χρησιμοποιείται για τους πίνακες (αλγεβρικά μητρώα) είναι αυτός που μας προσφέρεται από τη βιβλιοθήκη της JAMA : A Java Matrix Package[28]. Όσο αφορά τα διανύσματα εδώ νοούνται ως πίνακες με κατάλληλες διαστάσεις. Ταυτόχρονα υπάρχουν και ενσωματωμένες δυνατότητες επίλυσης γραμμικών συστημάτων και ανάλυσης του ιδιοσυστήματος. Παράδειγμα ορισμού και χρήσης δίνεται στην ομάδα εντολών που ακολουθεί.

```
order = 3
// define an array double[][]
da=new double[order][order]

for(i in 0..<order){
    for(j in 0..<order){
        da[i][j]=random()
    }
}

// use the above defined double array to equip a matrix M
M=Matrix(da)

// update array da for another use
for(i in 0..<order){
    for(j in 0..<order){
        da[i][j]=random()
    }
}

// use the above defined double array to equip a matrix K
K=Matrix(da)

M.print()
K.print()

(K+M).print()
```

[28] http://math.nist.gov/javanumerics/jama/

```
(K-M).print()
(K*M).print()
M.inverse().print()
M.transpose().print()
```

Ακολουθεί παράδειγμα με τον κώδικα που απαιτείται για να λύσουμε το γενικευμένο ιδιοπρόβλημα,

$$(K - \lambda M)x = 0$$

```
Eigen= EigenDescomposition(M.inverse()*K)
EigenValues=Eigen.getRealEigenvalues()
EigenVectors=Eigen.getV()

(1..order).each{println EigenValues[it-1]}
EigenVectors.print()
```

Επισημαίνεται εδώ πως η μέθοδος getRealEigenvalues() επιστρέφει μια διάταξη (double array) με όρους τις ιδιοτιμές λ_i, ενώ η getV() επιστρέφει ένα πίνακα του οποίου κάθε στήλη περιέχει και ένα ιδιοδιάνυσμα x_i.

Α΄.11 Μιγαδικοί αριθμοί *

Στο περιβάλλον του SDE ο προκαθορισμένος τύπος που χρησιμοποιείται για τους μιγαδικούς αριθμούς είναι αυτός που μας προσφέρεται από την βιβλιοθήκη της Apache Commons Math[29]. Παράδειγμα ορισμού και χρήσης δίνεται στην ομάδα εντολών που ακολουθεί.

```
c1= new Complex(1.0,2.0)
c2= new Complex(3.0,2.4)
println c1+c2
println c1-c2
println c1*c2
println c1/c2
println c1.conj() // c1.conjugate()
println c1.re() // c1.getReal()
println c1.im() // c1.getImaginary()
println c1.abs() // absolute value of c1
```

[29] http://commons.apache.org/proper/commons-math/

Α′.12 Διαγράμματα (plotting)*

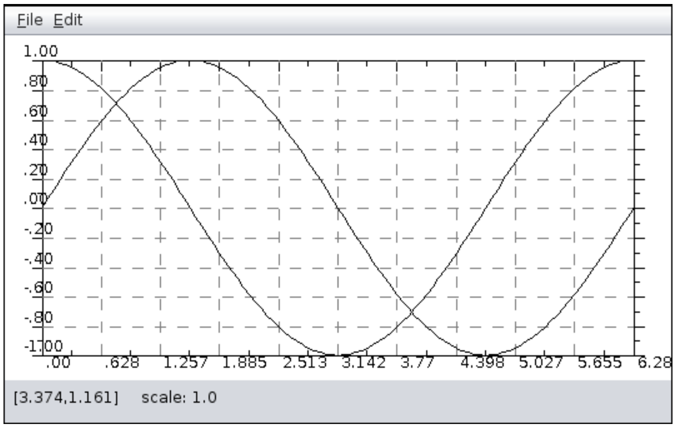
Τα προς σχεδίαση, σε δομή διαγράμματος, αντικείμενα είναι τα plotfunction. Ο καθορισμός (κατασκευή) ενός τέτοιου αντικείμενου απαιτεί την δήλωση των διακριτών τιμών της συνάρτησης (τεταγμένες) μέσω μιας διάταξης αριθμών και προαιρετικά τις τιμές του οριζόντιου άξονα (τετμημένες) οι οποίες αν δεν δηλωθούν θεωρείται ότι αυξάνονται με μοναδιαίο βήμα. Εναλλακτικά, για τον οριζόντιο άξονα μπορεί να δοθεί ένας μόνο αριθμός που θα είναι το επαυξητικό βήμα ξεκινώντας από το μηδέν. Η δομή διαγράμματος[30] που σχεδιάζει τα πιο πάνω αντικείμενα ονομάζεται PlotFrame και μπορεί να φιλοξενεί αυθαίρετο πλήθος plotfunction. Στο παράδειγμα που ακολουθεί σχεδιάζουμε σε ένα κοινό διάγραμμα τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημίτονου και συνημίτονου.

```
trigPlot = new PlotFrame()
n=100; dt=2.0*PI/n
t=new double[n+1]
s=new double[n+1]
c=new double[n+1]
(0..n).each{
     td=dt*it
     t[it]=td
     s[it]=sin(td)
     c[it]=cos(td)
}
trigPlot.addFunction(new plotfunction(dt,s))
trigPlot.addFunction(new plotfunction(t,c))
trigPlot.show()
```

Η χρήση του πιο πάνω κομματιού κώδικα θα εμφανίσει το διάγραμμα όπως περίπου φαίνεται στην πρώτη εικόνα 61 που ακολουθεί. Εμπλουτίζοντας (και σε κάποια σημεία τροποποιώντας) τον κωδικά όπως πιο κάτω, θα μπορούσαμε να εφοδιάσουμε περαιτέρω το διάγραμμα με πληροφορίες αλλά και κάποιες δυνατότητες μορφοποίησης.

```
trigPlot = new PlotFrame()
n=100; dt=2.0*PI/n
s=[];c=[]
(0..n).each{s[it]=sin(dt*it);c[it]=cos(dt*it)}
fp=new plotfunction(dt,s); fp.setMarker(true)
fp.setMarkerFill(true); fp.setName("sine")
```

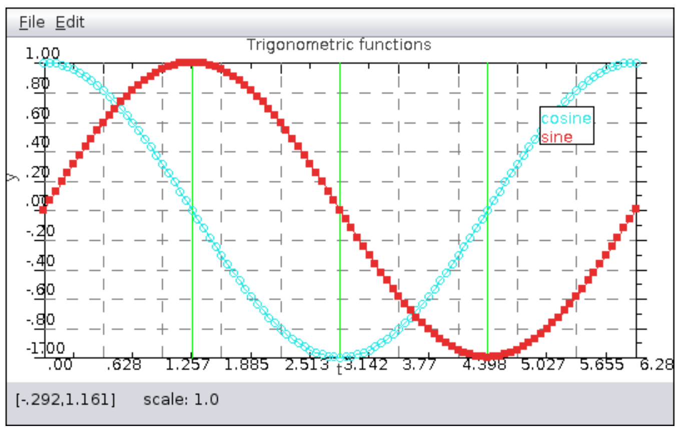
[30]Στο περιβάλλον του SDE υπάρχει ένα προκαθορισμένο αντικείμενο δομής διαγράμματος με όνομα μεταβλητής thePlot.



Σχήμα 61: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

```
trigPlot.addFunction(fp)
fp=new plotfunction(dt,c); fp.setMarker(true)
fp.setMarkerStyle(1);  fp.setName("cosine")
trigPlot.addFunction(fp)

trigPlot.setAutoColor(true)
trigPlot.Title("Trigonometric functions")
trigPlot.makeLegend()
trigPlot.xLabel("t")
trigPlot.yLabel("y")
trigPlot.vline(PI/2,java.awt.Color.green)
trigPlot.vline(PI,java.awt.Color.green)
trigPlot.vline(3*PI/2,java.awt.Color.green)
trigPlot.show()
```

Το αποτέλεσμα θα είναι παρόμοιο με το διάγραμμα της αντίστοιχης εικόνας 62.



Σχήμα 62: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εμπλουτισμένο διάγραμμα σε σχέση με αυτό του σχήματος 61