

Δυναμική Ταλαντώσεις και Έλεγχος Κατασκευών

Δρ. Μαγδαληνή Μαρινάκη, ΕΔΙΠ, Σχολή
Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης,
Πολυτεχνείο Κρήτης (magda@dssl.tuc.gr)



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

Μοντελοποίηση συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

Βάση της φύσης του μαθηματικού μοντέλου που χρησιμοποιείται, το σύστημα μπορεί να ονομάζεται **διακριτό** ή **συνεχές**.

- Στο **διακριτό μοντέλο** , το φυσικό σύστημα θεωρείται ότι αποτελείται από πολλά στερεά σώματα που συνδέονται με ελατήρια και αποσβεστήρες.
- Τα ελατήρια υποδηλώνουν δυνάμεις που τείνουν να επιστρέψουν τις μάζες στην κατάσταση ισορροπίας τους.
- Οι αποσβεστήρες παρουσιάζουν αντίσταση στην ανάπτυξη ταχύτητας και διαχέουν την ενέργεια του συστήματος.
- Στο συνεχές μοντέλο η μάζα, η ελαστικότητα και η απόσβεση θεωρούνται ότι κατανέμονται σε όλο το σύστημα.
- Οι εξισώσεις κίνησης ενός διακριτού συστήματος είναι με τη μορφή n -διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού, όπου το n δηλώνει τον αριθμό των μαζών.
- Ο αριθμός των ανεξάρτητων συντεταγμένων που χρειάζονται για να περιγράψουν το σύστημα οποιαδήποτε χρονική στιγμή καθορίζει τον βαθμό ελευθερίας του συστήματος.



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

Μοντελοποίηση συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

Βάση της φύσης του μαθηματικού μοντέλου που χρησιμοποιείται, το σύστημα μπορεί να ονομάζεται **διακριτό** ή **συνεχές**.

- Η εξίσωση κίνησης ενός **συνεχούς συστήματος** έχει τη μορφή μερικής διαφορικής εξίσωσης.
- Ένα συνεχές σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε ως διακριτό σύστημα ή ως σύστημα συγκεντρωμένων παραμέτρων με διάφορους βαθμούς ελευθερίας είτε ως συνεχές σύστημα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας.



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

Μοντελοποίηση συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

- Τα περισσότερα μηχανικά συστήματα έχουν κατανεμημένη μάζα, ελαστικότητα και απόσβεση.
- Αυτά τα συστήματα μοντελοποιούνται ως συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας (n) ώστε να διευκολυνθεί η ανάλυση των ταλαντώσεων .
- Πολλές μέθοδοι είναι διαθέσιμες για να κατασκευαστεί ένα τέτοιο μοντέλο συνεχούς συστήματος.
- Κάποιες από αυτές είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων .
- Στις περισσότερες περιπτώσεις ο βαθμός ελευθερίας που θα χρησιμοποιηθεί στο μοντέλο εξαρτάται από το εύρος των συχνοτήτων.
- Εάν το σύστημα ενδέχεται να παρουσιάσει σημαντικές μεταβολές σε υψηλότερες συχνότητες το μοντέλο θα πρέπει να περιλαμβάνει αρκετά μεγάλο βαθμό ελευθερίας για την κάλυψη των σημαντικών συχνοτήτων.
- Τα περισσότερα χαρακτηριστικά ενός συστήματος n -βαθμού ελευθερίας είναι παρόμοια με αυτά του ενός-βαθμού ελευθερίας.
- Υπάρχουν βέβαια κάποια χαρακτηριστικά που συναντώνται μόνο σε συστήματα n -βαθμού ελευθερίας.



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

Το μοντέλο του ενός τετάρτου του οχήματος

Το μοντέλο του ενός τετάρτου του οχήματος είναι ένα από τα πιο εύχρηστα μοντέλα για προσομοίωση της απόδοσης ενός μονοδιάστατου συστήματος ανάρτησης.

Στην απλοποιημένη μορφή της η ανάρτηση αποτελείται από ένα ελατήριο με σταθερά k , και ένα αποσβεστήρα με σταθερά c .

Το ελατήριο έχει το ρόλο της στήριξης του στατικού βάρους του οχήματος ενώ ο αποσβεστήρας βοηθάει την διάχυση της ενέργειας και τον περιορισμό των δονήσεων που προέρχονται από τον δρόμο.

Οι τιμές των σταθερών k , c επιλέγονται ανάλογα το φορτίο του οχήματος και των οδικών συνθηκών.



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

Το μοντέλο του ενός τετάρτου του οχήματος

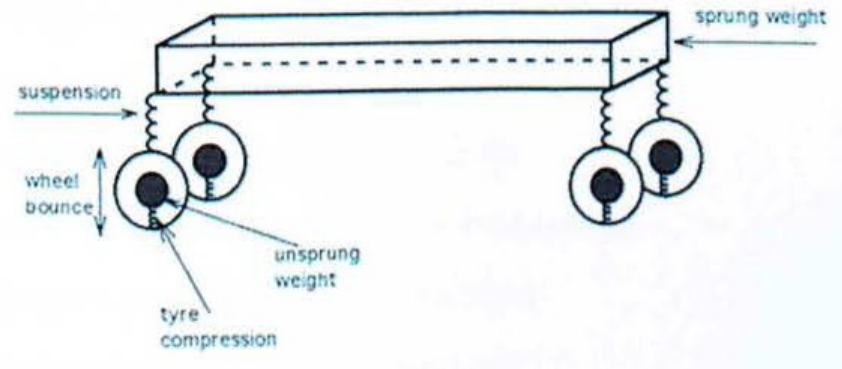
- Για μια εξαιρετικά σκληρή ανάρτηση, το σύστημα θα είναι ιδιαίτερα σταθερό αλλά η επιτάχυνση της αναρτημένης μάζας θα είναι πολύ μεγάλη με αποτέλεσμα να μειώνεται η άνεση των επιβατών.
- Για μία εξαιρετικά μαλακή ανάρτηση το σύστημα θα είναι σχεδόν ασταθές.
- Από παλαιότερες έρευνες, τα συστήματα ενεργών αναρτήσεων έχουν αποδειχθεί πολύ αποτελεσματικά στη βελτίωση του χειρισμού και την άνεση της οδήγησης.
- Ωστόσο όταν το όχημα κινείται σε ανώμαλο έδαφος το σύστημα αυτό δεν είναι τόσο αξιόπιστο όσο το παθητικό σύστημα ανάρτησης .



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

Δυναμικό μοντέλο - Διαφορικές εξισώσεις.

- Μπορούμε με τη βοήθεια αυτού του μοντέλου να αναπαραστήσουμε την κάθετη δόνηση (μετατόπιση) του συστήματος που αποτελείται από δύο στερεές μάζες m_s και m_u , τη μάζα του οχήματος και τη μάζα του συστήματος της ανάρτησης.

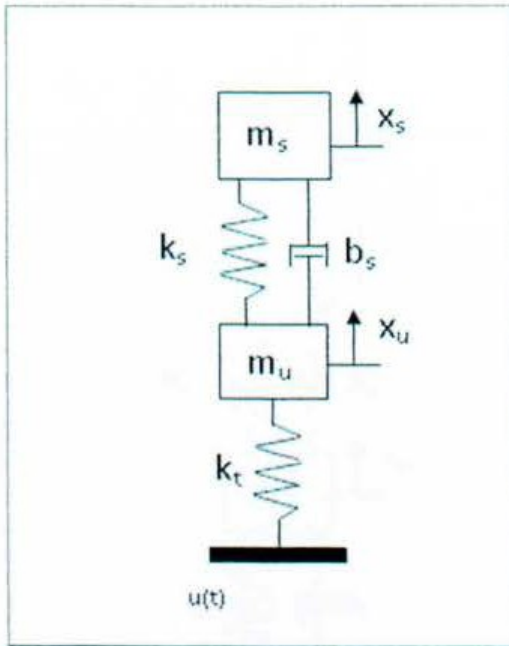


- Η αναρτημένη μάζα m_s αντιστοιχεί στο 1/4 της συνολικής μάζας του οχήματος και η μάζα του συστήματος της ανάρτησης m_u αντιστοιχεί στη μάζα του ενός τροχού του οχήματος και του συστήματος της ανάρτησης.
- Η δυναμική κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τις μετατοπίσεις x_u και x_s



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

- Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα στην περίπτωση που θεωρούμε την κίνηση του ελαστικού όμοια με του ελατηρίου είναι οι



$$m_s \ddot{x}_s + b_s \dot{x}_s + k_s x_s = b_s \dot{x}_u + k_s x_u$$

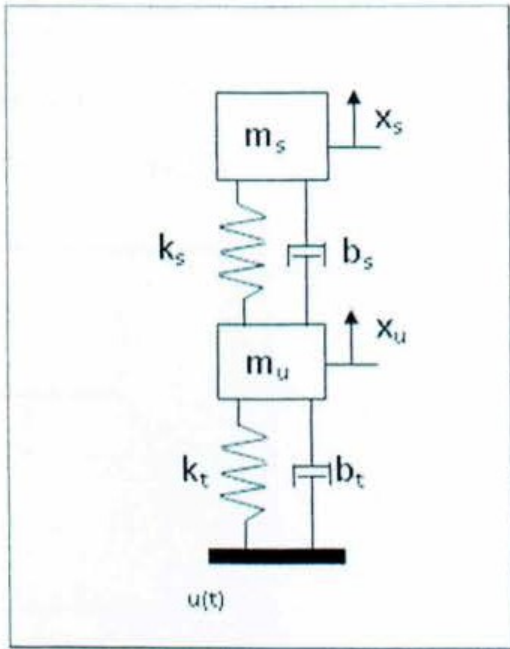
$$m_u \ddot{x}_u + b_s \dot{x}_u + k_t x_u + k_s x_u = b_s \dot{x}_s + k_s x_s + k_t u$$

- m_s : η (μάζα του οχήματος) χ $\frac{1}{4}$
- m_u : μάζα του συστήματος ανάρτησης
- x_s : μετατόπιση m_s
- x_u : μετατόπιση μάζας m_u
- b_s : συντελεστής αποσβεστήρα ανάρτησης
- k_s : συντελεστής σκληρότητας ελατηρίου
- k_t : συντελεστής σκληρότητας ελαστικού



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

- Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε την συμπεριφορά του ελαστικού βισκοελαστική που είναι πιο κοντά στην πραγματική.
- Βισκοελαστικότητα είναι μία ιδιότητα των υλικών που παρουσιάζουν χαρακτηριστικά ιξώδους και ελαστικότητας όταν υποβάλλονται σε παραμόρφωση
- Συνεπώς το ελαστικό του οχήματος περιγράφεται από ένα ελατήριο και έναν αττική εξίσωση του συστήματος θα είναι :

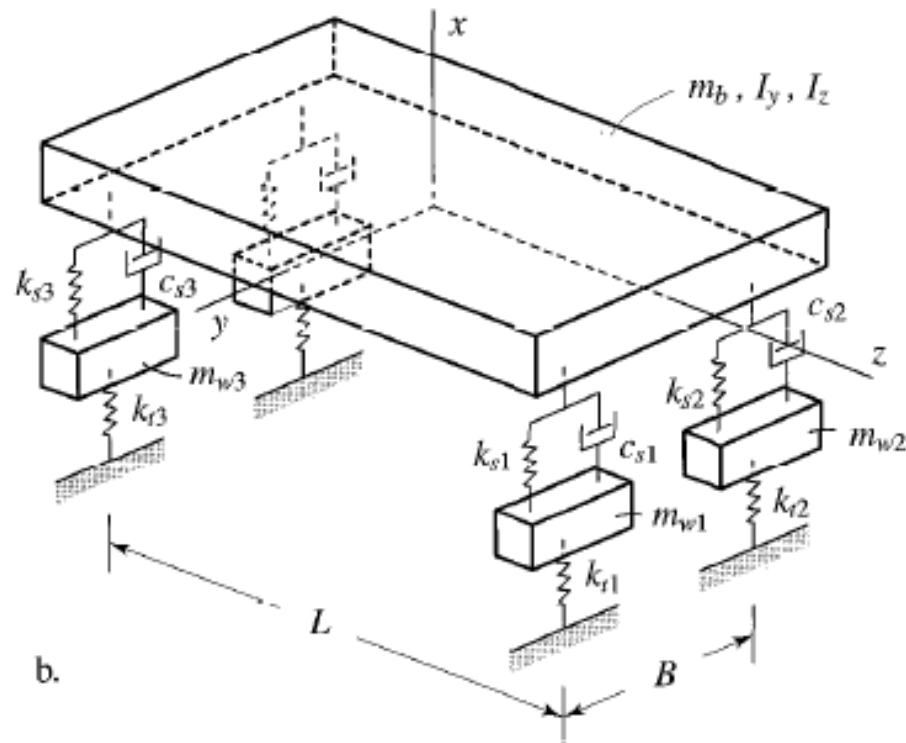


$$m_s \ddot{x}_s + b_s \dot{x}_s + k_s x_s = b_s \dot{x}_u + k_s x_u$$

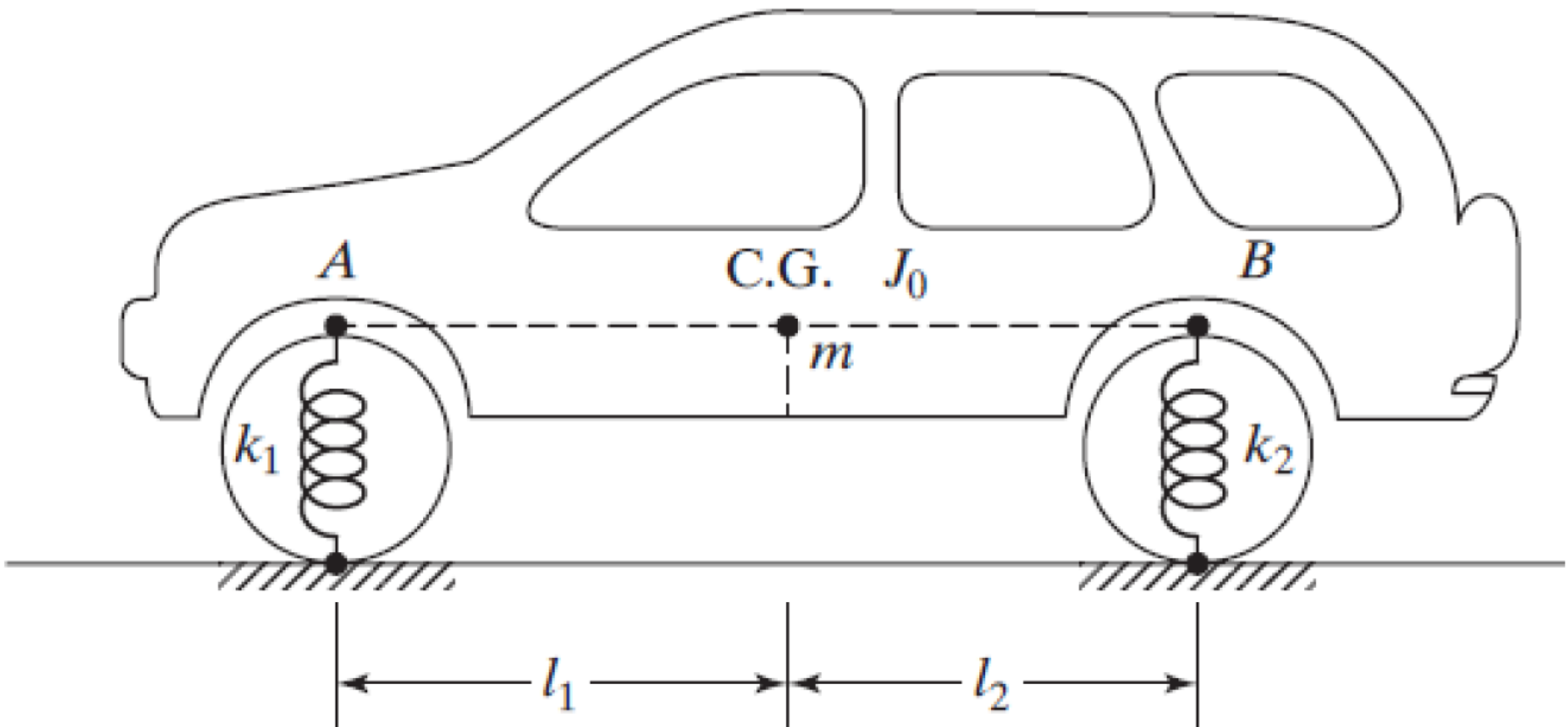
$$m_u \ddot{x}_u + (b_s + b_t) \dot{x}_u + (k_s + k_t) x_u = b_s \dot{x}_s + k_s x_s + b_t \dot{u} + k_t u$$



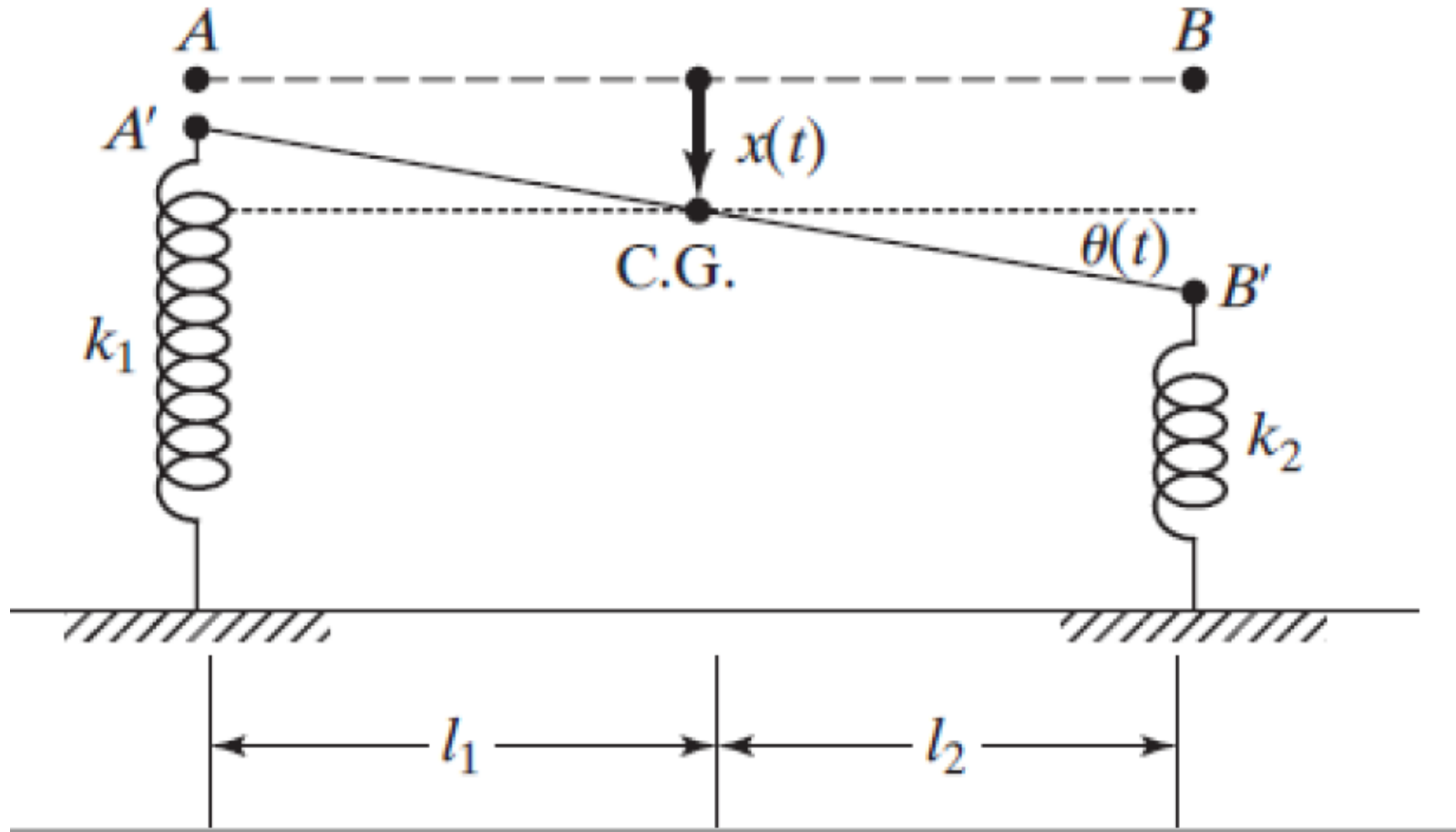
ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

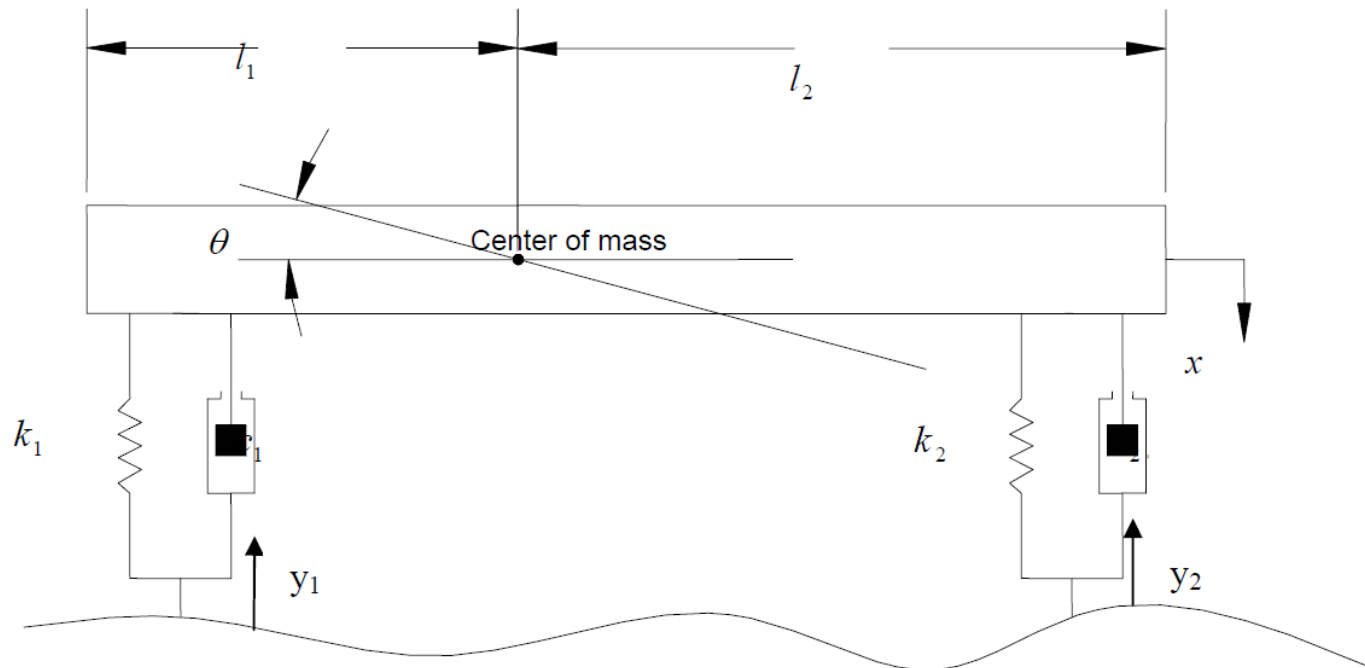
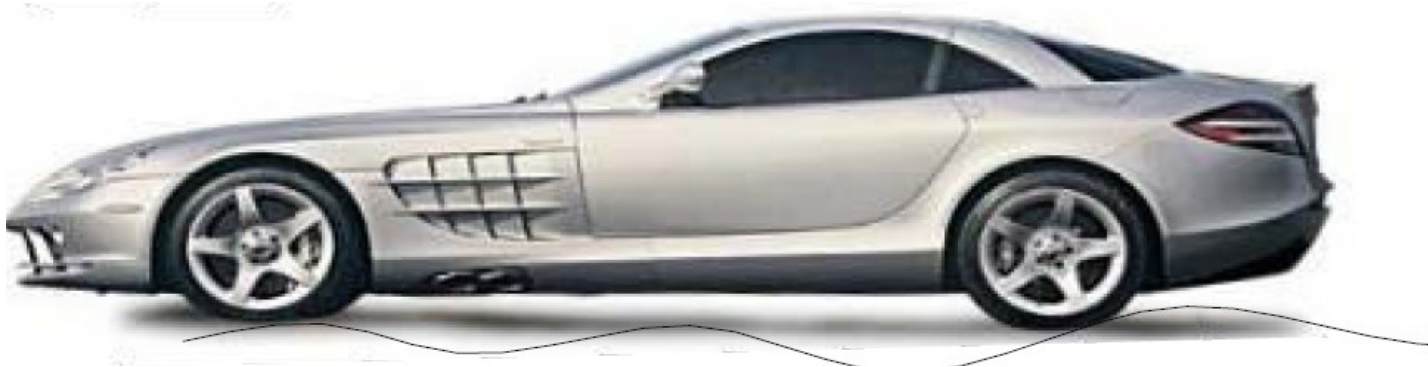


ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

□ Άσκηση



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

□ Άσκηση

$$m = 2000 \text{ kg} \quad J = 2500 \text{ kg.m}^2 \quad k_1 = k_2 = 30000 \text{ N/m} \quad c_1 = c_2 = 3000 \text{ N.s/m}$$

$$l_1 = 1 \text{ m} \quad \text{and} \quad l_2 = 1.5 \text{ m}$$

- Όπου m είναι η μάζα του οχήματος, J είναι η ροπή αδράνειας γύρω από το κέντρο μάζας, ο δείκτης 1 αναφέρεται στην μπροστινή αδράνεια και ο δείκτης 2 στο σύστημα της πίσω ανάρτησης και l_1 and l_2 είναι οι αποστάσεις μεταξύ το κέντρου μάζας και της μπροστινής και πίσω ανάρτησης.
- Το όχημα ταξιδεύει με 50 km/hr και ο δρόμος προσεγγίζεται ως ημιτονοειδής με πλάτος 10 mm και μήκος κύματος $\lambda = 5 \text{ m}$.



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

■ Άσκηση

- Οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις κινήσεις αναπήδησης και βήματος του συστήματος βρίσκονται από τις εξισώσεις Lagrange.
- Οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι $x(t)$ $\theta(t)$
- Η κινητική ενέργεια δίνεται από την:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

- Η δυναμική ενέργεια δίνεται από:

$$U = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - x + l_1 \theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - x - l_2 \theta)^2 \quad (2)$$

- Η εξίσωση του Rayleigh που περιγράφει που χρησιμοποιείται για τους αποσβεστήρες είναι

$$Q = \frac{1}{2} c_1 (\dot{y}_1 - \dot{x} + l_1 \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{y}_2 - \dot{x} - l_2 \dot{\theta})^2 \quad (3)$$



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

□ Άσκηση

Η Λαγκρανσιανή $L = T - U$ που υπολογίζεται από την (1) και (2), και μαζί με την (3), αντικαθιστώντας τις στις (4) και (5), μπορούμε να αποκτήσουμε τις εξισώσεις κίνησης.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial Q}{\partial \theta} \quad (5)$$

Η εφαρμογή των εξισώσεων 4 και 5, δίνει:

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (l_2c_2 - l_1c_1)\dot{\theta} + (k_1 + k_2)x + (l_2k_2 - l_1k_1)\theta = k_1y_1 + k_2y_2 + c_1\dot{y}_1 + c_2\dot{y}_2$$

$$J\ddot{\theta} + (c_2l_2 - c_1l_1)\dot{x} + (l_2^2c_2 + l_1^2c_1)\dot{\theta} + (k_2l_2 - k_1l_1)x + (l_1^2k_1 + l_2^2k_2)\theta = k_2l_2y_2 - k_1l_1y_1 + c_2l_2\dot{y}_2 - c_1l_1\dot{y}_1$$



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

- **Άσκηση**
- Οι εξισώσεις της κίνησης σε μορφή πίνακα είναι:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & l_2 c_2 - l_1 c_1 \\ l_2 c_2 - l_1 c_1 & l_2^2 c_2 + l_1^2 c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 l_1 & k_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 l_1 & c_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

□ Άσκηση

- Εύρεση φυσικών συχνοτήτων και ιδιομορφών
- Θέτουμε το δεξί μέρος της (6) με μηδέν.
- Θεωρώντας αρμονική απόκριση, η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος βρίσκεται θέτοντας την ορίζουσα του χαρακτηριστικού πίνακα ίσο με 0:

$$\det \begin{bmatrix} ms^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2 & (c_2l_2 - c_1l_1)s + k_2l_2 - k_1l_1 \\ (c_2l_2 - c_1l_1)s + k_2l_2 - k_1l_1 & Js^2 + (l_2^2c_2 + l_1^2c_1)s + l_2^2k_2 + l_1^2k_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

□ Άσκηση

```
>> m = 2000; J = 2500; k1 = 30000; k2=30000; c1= 3000; c2=3000;  
>> l1=1; l2=1.5;  
>> a = [m c1+c2 k1+k2];  
>> b = [J c2*l2^2+c1*l1^2 k2*l2^2+k1*l1^2];  
>> C = conv(a,b)
```

C =

1.0e+009 *

0.0050 0.0345 0.4035 1.1700 5.8500

```
>> d = [c2*l2-c1*l1 k2*l2-k1*l1];
```

```
>> e = conv(d,d)
```

e =

2250000 45000000 225000000

```
>> f= 1.0e+009*[0.005 0.0345 0.4035 1.1700 5.8500] - [0. 0. 2250000 45000000 225000000]
```

f =

1.0e+009 *

0.0050 0.0345 0.4013 1.1250 5.6250

```
>> r = roots(f)
```

r =

-2.1289 + 6.1681i

-2.1289 - 6.1681i

-1.3211 + 4.9676i

-1.3211 - 4.9676i

(8)



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

■ Άσκηση

$$\begin{aligned}\omega_{d1} &= \omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2} = 4.9676 \text{rad} / \text{s} \\ \omega_{d2} &= \omega_{n2} \sqrt{1 - \zeta_2^2} = 6.1681 \text{rad} / \text{s}\end{aligned}\quad (9)$$

- Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από το πραγματικό μέρος των συζυγών ριζών δείχνουν την μειούμενη φύση της ταλάντωσης

$$\begin{aligned}-\zeta_1 \omega_{n1} &= -1.3211 \text{rad} / \text{s} \\ -\zeta_2 \omega_{n2} &= -2.1289 \text{rad} / \text{s}\end{aligned}\quad (10)$$



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

□ Άσκηση

Οι εξισώσεις (9) και (10) δίνουν:

$$\omega_{n1} = 5.1399 \text{ rad/s} \quad (11)$$

$$\omega_{n2} = 6.5251 \text{ rad/s} \quad (12)$$

$$\zeta_1 = 0.2570 \quad (13)$$

$$\zeta_2 = .3263 \quad (14)$$

Οι ιδιομορφές είναι:

$$\frac{A1}{B1} = \left[\frac{(c_2 l_2 - c_1 l_1)s + k_2 l_2 - k_1 l}{ms^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2} \right]_{s=-1.3211-4.9676i} = -2.0963$$

$$\frac{A2}{B2} = \left[\frac{(c_2 l_2 - c_1 l_1)s + k_2 l_2 - k_1 l}{ms^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2} \right]_{s=-2.1289-6.1681i} = 0.5963$$



ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΥ

□ Άσκηση

- Η πρώτη ιδιομορφή

$$\begin{bmatrix} A1 \\ B1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0963 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Η δεύτερη ιδιομορφή

$$\begin{bmatrix} A2 \\ B2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5963 \\ 1 \end{bmatrix}$$

