
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Αποθέματα
Πρόβλεψη
Προγραμματισμός

Γιάννης Α. Φίλης, Βασίλης Σ. Κουϊκόγλου
Φεβρουάριος 2021

Πολυτεχνείο Κρήτης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
1.1	Περιγραφή και κατηγορίες συστημάτων παραγωγής.....	3
1.2	Λήψη αποφάσεων.....	4
1.3	Περιεχόμενο του μαθήματος.....	5
2	ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ	6
2.1	Εισαγωγή.....	6
2.2	Στρατηγικές ελέγχου αποθεμάτων	10
2.2.1	Στρατηγική περιοδικού ελέγχου (R, r)	10
2.2.2	Συνεχής στρατηγική (R, r).....	11
2.2.3	Στρατηγική δεδομένης ποσότητας (Q, r).....	11
2.3	Αιτιοκρατικά μοντέλα (Q, r) ενός είδους με στατική ζήτηση.....	12
2.3.1	Μοντέλο I	13
2.3.2	Μοντέλο II.....	22
2.3.3	Μοντέλο III.....	22
2.3.4	Μοντέλο IV	23
2.4	Εκπτώσεις ποσοτήτων.....	24
2.5	Μεγέθη παραγγελίας με δυναμική ζήτηση.....	26
2.6	Στατικά προβλήματα σχεδίασης παραγωγής.....	30
2.6.1	Προβλήματα ανάμιξης.....	31
2.6.2	Σχεδίαση παραγωγής πολλών προϊόντων	33
2.6.3	Επιλογή διαδικασίας παραγωγής.....	35
2.7	Στοχαστική ζήτηση.....	38
2.8	Διανυσματική βελτιστοποίηση με περιορισμούς	40
2.8.1	Περιορισμοί ισότητας.....	43
2.8.2	Περιορισμοί ανισότητας	46
2.9	Μοντέλο στοχαστικής ζήτησης με μία αναπλήρωση.....	47
2.10	Μοντέλα μεγέθους παρτίδων παραγωγής	50
2.11	Μία εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού στην παραγωγή κατά παρτίδες.....	55
2.11.1	Εισαγωγή στον δυναμικό προγραμματισμό	55
2.11.2	Πρόγραμμα για την ελαχιστοποίηση της προετοιμασίας	57
2.12	Προβλήματα	60
3	ΠΡΟΒΛΕΨΗ	63
3.1	Γραμμική παλινδρόμηση.....	63
3.2	Κινούμενος μέσος όρος.....	66
3.3	Εκθετική εξομάλυνση	67
3.4	Εκτίμηση της κατανομής πιθανότητας.....	70
3.5	Μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων	74

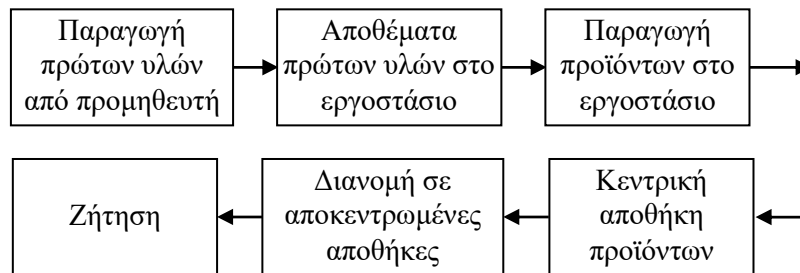
3.5.1	Εκτίμηση με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων	74
3.5.2	Εκτίμηση Bayes.....	75
3.5.3	Εφαρμογή στην εκτίμηση της μέσης ζήτησης.....	76
3.6	Μοντέλα Box-Jenkins	78
3.6.1	Υποθέσεις και περιγραφή των μοντέλων	78
3.6.2	Εκτίμηση παραμέτρων αυτοπαλινδρομικού μοντέλου.....	85
3.6.3	Εκτίμηση παραμέτρων άλλων μοντέλων.....	90
3.7	Προβλήματα	92
4	ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ.....	94
4.1	Εισαγωγή.....	94
4.2	Τα προβλήματα $1 \sum F_i$, $1 \sum w_i F_i$ και $1 r_i, \text{prmp} \sum F_i$	96
4.3	Το πρόβλημα $F_2 F_{\max}$	100
4.4	Το πρόβλημα $F_3 F_{\max}$	101
4.5	Προθεσμίες παράδοσης - Τα προβλήματα $1 L_{\max}(T_{\max})$ και $1 L_{\min}(T_{\min})$	102
4.6	Προγραμματισμός με απαιτούμενη διαδοχή εργασιών	105
4.7	Προγραμματισμός πρότζεκτ.....	107
4.8	Προβλήματα	110
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Διαφόριση Πινάκων.....		112
Γινόμενα πινάκων και διανυσμάτων.....		112
Παράγωγοι		113
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Η τυποποιημένη κανονική κατανομή, $N(0, 1)$		116
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		117

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Περιγραφή και κατηγορίες συστημάτων παραγωγής

Σύστημα παραγωγής (production system) είναι το σύνολο όλων των διαδικασιών που μετατρέπουν τις πρώτες ύλες σε έτοιμα προϊόντα.

Το διάγραμμα ροής ενός συστήματος παραγωγής είναι το ακόλουθο:



Δυναμικότητα (capacity) ενός συστήματος παραγωγής είναι η ποσότητα παραγωγικών πόρων (εργατικά χέρια, μηχανές) που διαθέτει. Βασικό μέτρο δυναμικότητας είναι η

Παραγωγικότητα ή *μέγιστος ρυθμός παραγωγής* = μέγιστη παραγωγή/μονάδα χρόνου.

Συχνά οι όροι δυναμικότητα και παραγωγικότητα χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία.

Το *απόθεμα* (inventory) διακρίνεται σε:

1. *Απόθεμα πρώτων υλών* (raw items inventory).
2. *Απόθεμα παραγωγής* (work in process, work in progress, WIP, in-process inventory) είναι το σύνολο των υλικών που είτε υφίστανται επεξεργασία ή περιμένουν σε κάποιο στάδιο της παραγωγής.
3. *Απόθεμα έτοιμων προϊόντων* (on hand inventory) στην κεντρική αποθήκη ή σε κατά τόπους καταστήματα.

Στο μάθημα θα συναντήσουμε δύο ακόμη μεταβλητές που έχουν τα χαρακτηριστικά του αποθέματος:

4. *Πρώτες ύλες που είναι υπό μεταφορά* στην κεντρική αποθήκη ή σε κατά τόπους καταστήματα.
5. *Εκκρεμείς παραγγελίες* (backlog, outstanding orders) προϊόντων από πελάτες που είναι σε αναμονή γιατί δεν βρήκαν απόθεμα στην κεντρική αποθήκη.

Τρία χαρακτηριστικά της παραγωγής μας ενδιαφέρουν:

1. *Ρυθμός παραγωγής*: ρυθμός σε κάποια χρονική στιγμή (παραγωγή ανά μονάδα χρόνου) ή μέσος ρυθμός για μία περίοδο (συνολική παραγωγή/περίοδος).

2. *Κόστος*: συνολικό κόστος λειτουργίας για μία περίοδο (κόστος ανά μονάδα χρόνου)
3. *Ποιότητα*: (α) βαθμός συμμόρφωσης προϊόντων με προδιαγραφές και (β) ταχύτητα εξυπηρέτησης πελατών.

Θ' ασχοληθούμε με τα δύο πρώτα χαρακτηριστικά και με την ταχύτητα εξυπηρέτησης.

Υπάρχουν 4 είδη συστημάτων παραγωγής.

1. *Συνεχή* (continuous production systems): Παράγουν ένα είδος προϊόντος ή περισσότερα αλλά στενά σχετιζόμενα προϊόντα (π.χ. επεξεργασία ενός τροφίμου και συσκευασία σε διάφορα μεγέθη κονσερβών).
2. *Διακοπτόμενα* (intermittent production systems): Παράγουν διάφορα προϊόντα που δεν έχουν στενή σχέση μεταξύ τους και οι εγκαταστάσεις πρέπει να προσαρμόζονται στο εκάστοτε προϊόν (π.χ. παραγωγή φαρμάκων διαφόρων τύπων). Αν τα περισσότερα προϊόντα έχουν ίδιες φάσεις παραγωγής ή δρομολόγηση από μηχανή σε μηχανή παραγωγής τότε η διαδικασία λέγεται *κατάστημα ροής* (flow shop) ή *γραμμή παραγωγής*. Αν έχουμε διαφορετικά προϊόντα με διαφορετικά στάδια παραγωγής, τότε οργανώνουμε τις εγκαταστάσεις σε *καταστήματα εργασιών* (job shop). Παράδειγμα καταστήματος εργασιών είναι ένα μηχανουργείο με τρυπάνια, φρέζες και τόνους και διαφορετικά προϊόντα που παράγονται κατά παραγγελία και σε μικρές ποσότητες.
3. *Έργα* (projects): Παράγεται ένα ή λίγα προϊόντα (π.χ. η κατασκευή ενός διύλιστηρίου ή το ερευνητικό έργο για την παραγωγή ενός νέου εμβολίου).
4. *Καθαρά αποθεματικά συστήματα* (pure inventory systems): Σ' αυτά τα συστήματα υπάρχει μόνο προμήθεια αλλά όχι παραγωγή (π.χ. εμπορικά καταστήματα).

1.2 Λήψη αποφάσεων

Οι αποφάσεις που σχετίζονται με τα συστήματα παραγωγής και που θα εξετάσουμε εδώ είναι του τύπου μεγίστου-ελαχίστου. Μεγιστοποιούμε φερ' ειπείν το κέρδος ή ελαχιστοποιούμε το κόστος. Έχουμε 3 ειδών αποφάσεις:

1. *Μακροχρόνιες ή στρατηγικές αποφάσεις* (long-range/long-term/strategic decisions): Χαρακτηριστικά νέου εργοστασίου ή νέας γραμμής παραγωγής: δυναμικότητα, είδη προϊόντων (product lines), όγκοι παραγωγής, πολιτική εξυπηρέτησης πελατών, δίκτυο διανομής.
2. *Ενδιάμεσες, μεσοπρόθεσμες ή τακτικές αποφάσεις* (intermediate-range/medium-term/tactical decisions): Σε υπάρχον σύστημα τίθενται στόχοι για μέγεθος αποθεμάτων, σχέδια προμηθειών και το μέγεθος εργατικού δυναμικού, αναλόγως της εποχής του

έτους.

3. (α) *Βραχυχρόνιες ή λειτουργικές αποφάσεις* (short-range/short-term/operational decisions), (β) *έλεγχος σε πραγματικό χρόνο* (real-time control): Εβδομαδιαίος προγραμματισμός παραγωγής, αποφάσεις για υπερωρίες, ανάθεση εργασιών. Αποφάσεις για την αντιμετώπιση καθημερινών, απρόβλεπτων συμβάντων, όπως η άφιξη μίας νέας παραγγελίας από σημαντικό πελάτη και η διεκπεραίωσή της κατά προτεραιότητα ή η βλάβη κάποιας μηχανής και η αντιμετώπισή της με αλλαγή του πλάνου παραγωγής.

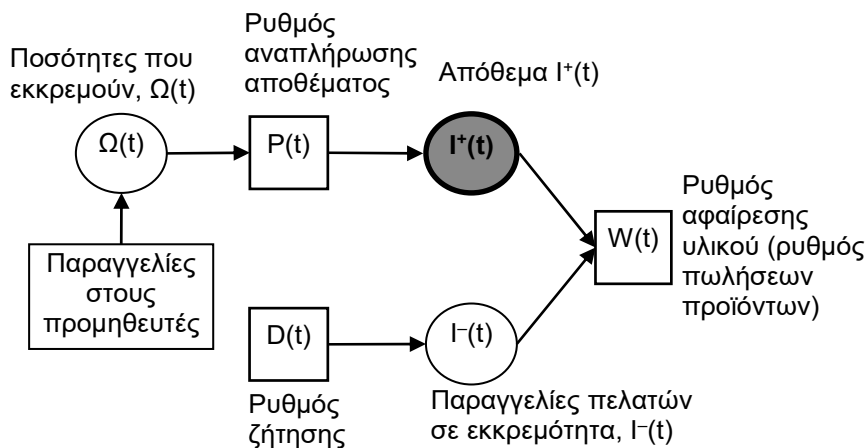
1.3 Περιεχόμενο του μαθήματος

Στο Κεφάλαιο 2 θα εξετάσουμε προβλήματα λήψης μεσοπρόθεσμων αποφάσεων για συστήματα που αποθηκεύουν προϊόντα προς πώληση ή αποθηκεύουν εξαρτήματα για συναρμολόγηση και παραγωγή κάποιου προϊόντος. Στο Κεφάλαιο 3 θα ιδούμε το πρόβλημα της πρόβλεψης της ζήτησης. Τα δύο αυτά κεφάλαια βασίζονται κυρίως στο βιβλίο [1]. Στο Κεφάλαιο 4 θα ασχοληθούμε με προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής (βραχυχρόνιες αποφάσεις) από τα βιβλία [2] και [3].

2 ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Το σχήμα αναπαριστά ένα αποθεματικό σύστημα (inventory system) με έναν τύπο υλικού ή προϊόντος. Οι κύκλοι περιγράφουν χώρους αποθήκευσης υλικών ή καταγραφή παραγγελιών. Ο γκρι κύκλος περιγράφει την αποθήκη προϊόντων προς πώληση.



Αρχίζουμε με τον ορισμό των ακόλουθων μεγεθών:

$P(t)$: Ρυθμός (κομμάτια/μονάδα χρόνου) που υλικά προστίθενται στο απόθεμα την στιγμή t

$D(t)$: Ρυθμός ζήτησης την στιγμή t

$I^+(t)$: Απόθεμα την στιγμή t (αριθμός κομματιών που βρίσκονται στην αποθήκη, απόθεμα ανά χείρας, inventory)

$I^-(t)$: Έλλειψη ή πλήθος παλαιών παραγγελιών πελατών που δεν έχουν ικανοποιηθεί μέχρι την στιγμή t (backlog, backorders).

Είναι λογικό σε ένα κατάστημα να μην υπάρχουν συγχρόνως και απόθεμα προϊόντων και παραγγελίες πελατών. Συνεπώς, κάθε χρονική στιγμή t , ένα τουλάχιστον εκ των $I^+(t)$ και $I^-(t)$ είναι μηδέν. Συνεχίζουμε με μερικούς ακόμη ορισμούς:

$W(t)$: Πραγματικός ρυθμός που υλικά αφαιρούνται από το απόθεμα ή ρυθμός πωλήσεων. Για να αφαιρεθεί ένα προϊόν χρειάζεται μία μονάδα υλικού και μία παραγγελία. Αυτή η διαδικασία είναι όμοια με την συναρμολόγηση όπου δύο διαφορετικά είδη συνδυάζονται και παράγεται ένα σύνθετο προϊόν. Στην προκειμένη περίπτωση το «προϊόν» είναι η πώληση. Έχουμε:

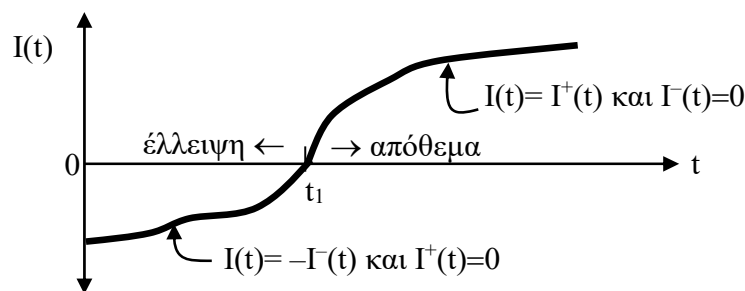
$W(t) = D(t)$, αν υπάρχει απόθεμα, $I^+(t) > 0$.

$W(t) = P(t)$, αν υπάρχουν εκκρεμείς παραγγελίες πελατών που δεν είχαν εξυπηρετηθεί αμέσως λόγω έλλειψης αποθέματος, $\Gamma(t) > 0$.

$\Omega(t)$: Ποσότητα που έχουμε παραγγείλει μέχρι την στιγμή t αλλά δεν έχουμε παραλάβει

$I(t)$: Καθαρό απόθεμα = απόθεμα – παραγγελίες πελατών που δεν έχουν ικανοποιηθεί = $\Gamma^+(t) - \Gamma(t)$. Όταν το καθαρό απόθεμα είναι αρκετά μεγάλο, τότε δεν είναι απαραίτητη η άμεση αναπλήρωση. Για το απόθεμα του παρακάτω σχήματος έχουμε

$$I(t) = \begin{cases} -\Gamma^-(t) & t \in [0, t_1) \\ \Gamma^+(t) & t \in [t_1, \infty). \end{cases}$$



$X(t)$: Αποθεματική θέση = καθαρό απόθεμα + ποσότητα που έχουμε παραγγείλει αλλά δεν έχουμε παραλάβει = $I(t) + \Omega(t)$. Η $X(t)$ καθορίζει το πόσο θα παραγγείλουμε: αν είναι αρνητική τότε συνήθως πρέπει να γίνει άμεσα παραγγελία αναπλήρωσης.

Παράδειγμα

Ένα αποθεματικό σύστημα ξεκινά χωρίς απόθεμα και χωρίς έλλειψη προϊόντων. Δίνονται η ημερήσια τροφοδοσία και η ημερήσια ζήτηση προϊόντων για το πενθήμερο:

ημέρα	1	2	3	4	5
τροφοδοσία	9	22	19	11	12
ζήτηση	10	16	25	8	18

Υποθέτουμε ότι όλα τα γεγονότα γίνονται στην αρχή κάθε ημέρας και με την ακόλουθη σειρά: στην αρχή της ημέρας γίνεται η τροφοδοσία και αμέσως μετά φθάνει όλη η ημερήσια ζήτηση. Η ζήτηση ικανοποιείται αμέσως αν υπάρχει αρκετό απόθεμα. Τυχόν ανικανοποίητη ζήτηση προστίθεται στην ζήτηση της επομένης ημέρας ενώ αν ικανοποιηθεί όλη η ζήτηση και περισσέψει προϊόν, αυτό αποθηκεύεται για χρήση κατά την επομένη ημέρα. Όλα αυτά συμβαίνουν στην αρχή μίας ημέρας. Στην συνέχεια και μέχρι το τέλος της ημέρας η κατάσταση του συστήματος παραμένει αμετάβλητη.

Θα υπολογίσουμε το καθαρό απόθεμα, το απόθεμα προϊόντων και την έλλειψη προϊόντων στην αρχή κάθε ημέρας αμέσως μετά την ζήτηση. Με βάση αυτά θα υπολογίσουμε το μέσο απόθεμα και την μέση έλλειψη για το πενθήμερο.

Υπολογίζουμε το καθαρό απόθεμα την ημέρα t από τον ισολογισμό υλικού

$$I(t) = I(t-1) + \text{τροφοδοσία}(t) - \text{ζήτηση}(t)$$

με αρχική τιμή $I(0) = \text{απόθεμα} - \text{έλλειψη} = 0 - 0 = 0$. Από αυτό ευρίσκουμε καθαρό απόθεμα ή έλλειψη κάθε ημέρας και παίρνουμε μέσες τιμές. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα:

ημέρα	1	2	3	4	5
τροφοδοσία	9	22	19	11	12
ζήτηση	10	16	25	8	18
καθαρό απόθεμα	$0+9-10$ $= -1$	$-1+22-16$ $= 5$	$5+19-25$ $= -1$	$-1+11-8$ $= 2$	$2+12-18$ $= -4$
απόθεμα	0	5	0	2	0
έλλειψη	1	0	1	0	4

Μέσο απόθεμα $= (0 + 5 + 0 + 2)/5 = 1.4$ και μέση έλλειψη $= (1 + 0 + 1 + 0 + 4)/5 = 1.2$.

Συνεχίζουμε με εκφράσεις που συνδέουν τις μεταβλητές που ορίστηκαν προηγουμένως. Έχουμε ήδη ορίσει

$$I(t) = I^+(t) - I^-(t)$$

$$X(t) = I(t) + \Omega(t).$$

Ο ρυθμός μεταβολής καθαρού αποθέματος είναι, $\dot{I}(t) = \dot{I}^+(t) - \dot{I}^-(t)$. Επειδή τα P , D και W είναι ρυθμοί, από το σχήμα του αποθεματικού συστήματος προκύπτουν

$$\dot{I}^+(t) = P(t) - W(t) \quad \text{και} \quad \dot{I}^-(t) = D(t) - W(t). \quad (2.1)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη ευρίσκουμε

$$\dot{I}(t) = \dot{I}^+(t) - \dot{I}^-(t) = P(t) - D(t)$$

και ολοκληρώνοντας για $t > 0$ έχουμε τελικά

$$I(t) = I(0) + \int_0^t [P(\tau) - D(\tau)] d\tau.$$

Γενικότερα, αν το $I(t_0)$ είναι γνωστό κάποια στιγμή t_0 τότε για κάθε $t > t_0$ ισχύει ότι

$$I(t) = I(t_0) + \int_{t_0}^t [P(\tau) - D(\tau)] d\tau. \quad (2.2)$$

Αφού πάντα ένα ή και τα δύο εκ των $I^+(t)$ και $I^-(t)$ είναι 0, ισχύει ότι

$$\text{είτε } I(t) = I^+(t) \text{ και } I^-(t) = 0,$$

$$\text{είτε } I(t) = -I^-(t) \text{ και } I^+(t) = 0$$

ενώ η περίπτωση $I(t) = I^+(t) = I^-(t) = 0$ είναι οριακή και ικανοποιείται και από τις δύο συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές γράφονται ισοδύναμα ως εξής:

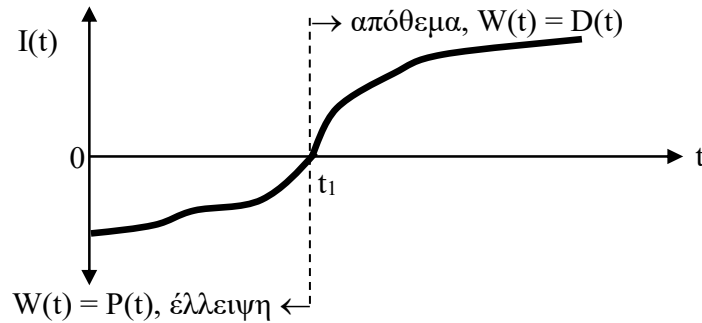
$$I^+(t) = \max [0, I(t)]$$

$$\Gamma(t) = -\min[0, I(t)] = \max[0, -I(t)].$$

Όταν υπάρχει απόθεμα, η παραγωγή απλώς το αυξάνει και μόνον η ζήτηση οδηγεί σε πωλήσεις. Όταν υπάρχει έλλειψη, η ζήτηση αυξάνει την έλλειψη ενώ η παραγωγή οδηγεί σε πωλήσεις. Όταν $I(t) = 0$, οι πωλήσεις δεν ξεπερνούν την παραγωγή ούτε τη ζήτηση. Το $I(t)$ μεταβάλλεται. Οι προηγούμενες συνθήκες μπορεί να ισχύουν μόνο σε μικρά διαστήματα (και μόνο αν δεν έχουμε βηματικές αλλαγές όπως δέλτα του Dirac). Οι πωλήσεις σ' ένα διάστημα $[t, t+dt)$ είναι $W(t)dt$ όπου

$$W(t) = \begin{cases} D(t) & I(t) > 0: \text{η ζήτηση ικανοποιείται από το απόθεμα} \\ P(t) & I(t) < 0: \text{η παραγωγή ικανοποιεί εκκρεμείς παραγγελίες} \\ \min[D(t), P(t)] & I(t) = 0: \text{ο μικρότερος ρυθμός καθορίζει τον ρυθμό πωλήσεων.} \end{cases}$$

Τον τύπο αυτόν τον είδαμε και προηγουμένως, εκτός από τον μεσαίο κλάδο. Ακολουθεί ένα παράδειγμα.



Στο διάστημα $[0, t_1)$ υπάρχει έλλειψη, άρα $W(t) = P(t)$. Γύρω από το t_1 η $I(t)$ αυξάνει. Επομένως ο ρυθμός τροφοδοσίας $P(t)$ είναι μεγαλύτερος του ρυθμού ζήτησης $D(t)$. Τη στιγμή t_1 έχουμε $I(t_1) = 0$ και $W(t_1) = \min[D(t_1), P(t_1)] = D(t_1)$. Για $t > t_1$, έχουμε $I(t) > 0^1$ και $W(t) = D(t)$.

Συχνά, οι πελάτες είναι ανυπόμονοι και αν δεν εύρουν ετοιμοπαράδοτο προϊόν σε απόθεμα φεύγουν χωρίς να αφήσουν παραγγελία. Έχουμε τότε ένα σύστημα με *απώλειες πωλήσεων* (lost sales). Στην περίπτωση αυτή $\Gamma(t) = 0$ για κάθε t οπότε $I(t) = I^+(t) \geq 0$ και, ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση από τις (2.1),

$$I(t) = I^+(0) + \int_0^t [P(\tau) - W(\tau)] d\tau,$$

όπου τώρα

$$W(t) = \begin{cases} D(t) & I(t) > 0 \\ \min[D(t), P(t)] & I(t) = 0 \end{cases}$$

¹ Να δείξετε χρησιμοποιώντας την (2.2) ότι αν $I(t_1) = 0$ και $P(\tau) > D(\tau)$ για κάθε τ στο διάστημα $[t_1, t]$, τότε $I(t) > 0$.

Τις περισσότερες φορές η ζήτηση είναι στοχαστική διαδικασία. Θα ξεκινήσουμε υποθέτοντας για απλούστευση ότι η $D(t)$ είναι σταθερή, κατόπιν θα δούμε τι γίνεται όταν είναι χρονικά μεταβαλλόμενη αλλά γνωστή και αργότερα θα εξετάσουμε μία περίπτωση στην οποία η ζήτηση είναι τυχαία μεταβλητή.

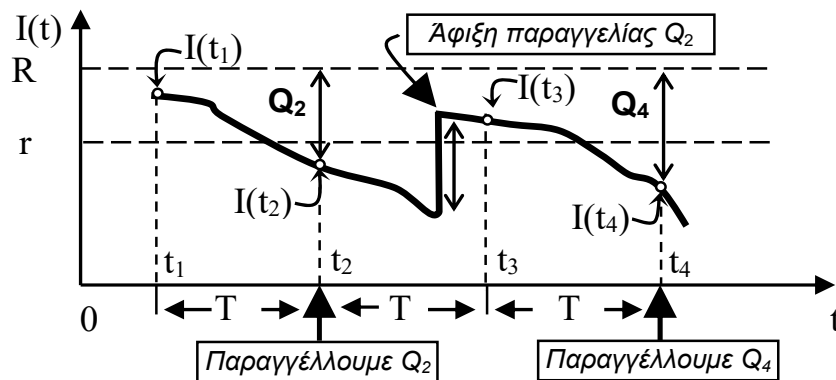
2.2 Στρατηγικές ελέγχου αποθεμάτων

Συνήθεις πολιτικές ελέγχου αποθεμάτων (inventory policies) είναι οι ακόλουθες:

2.2.1 Στρατηγική περιοδικού ελέγχου (R, r)

(Periodic-review (R, r) policy)

Παρατηρούμε το απόθεμα κάθε T μονάδες χρόνου και αν η στάθμη είναι κάτω από ένα σημείο r τότε παραγγέλλουμε στον προμηθευτή του συστήματος μια ποσότητα για να ανεβάσουμε την στάθμη στο σημείο R . Σχηματικά:



T : περίοδος ελέγχου (κάθε πότε γίνονται καταγραφή αποθέματος και πιθανές παραγγελίες)

t_j : χρόνοι που γίνεται καταγραφή του αποθέματος, $j = 1, 2, \dots$, με $t_{j+1} - t_j = T$.

r : σημείο παραγγελίας (παραγγέλλουμε αν το καθαρό απόθεμα έχει πέσει στο επίπεδο r ή χαμηλότερα)

R : μία άλλη παράμετρος αποθεματικού ελέγχου

$I(t)$: καθαρό απόθεμα την στιγμή t (μπορεί να γίνει και αρνητικό)

Στην παρατήρηση j την στιγμή t_j , η ποσότητα παραγγελίας είναι

$$Q_j = \begin{cases} 0 & I(t_j) > r \\ R - I(t_j) & I(t_j) \leq r \end{cases}$$

Για την πολιτική αυτή, θα πρέπει ο χρόνος άφιξης παραγγελίας να είναι $\leq T$. Αν οι χρόνοι άφιξης είναι μεγάλοι, τότε είναι δυνατόν τη στιγμή t_j να υπάρχει ποσότητα $\Omega(t_j)$ υπό

μεταφορά που αντιστοιχεί σε παλαιότερες παραγγελίες αναπλήρωσης του αποθέματος που δεν έχουν αφιχθεί. Αν αγνοήσουμε τέτοιες παραγγελίες τότε μπορεί να παραγγέλλουμε περισσότερο απ' όσο χρειάζεται.

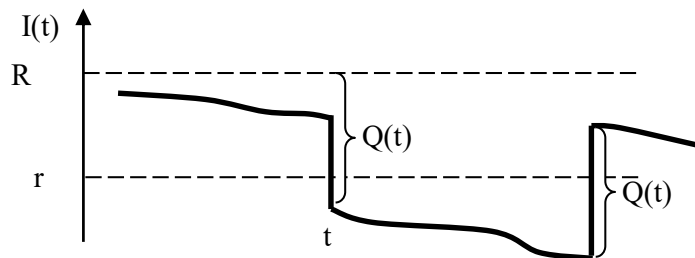
Για ν' αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, αντί του $I(t_j)$ θεωρούμε την αποθεματική θέση $X(t_j) = I(t_j) + \Omega(t_j)$ και

$$Q_j = \begin{cases} 0 & X(t_j) > r \\ R - X(t_j) & X(t_j) \leq r. \end{cases}$$

Αν $r = R$ τότε σε κάθε σημείο ελέγχου παραγγέλλουμε $Q_j = R - X(t_j)$.

2.2.2 Συνεχής στρατηγική (R, r)

(Continuous-review (R, r) policy)



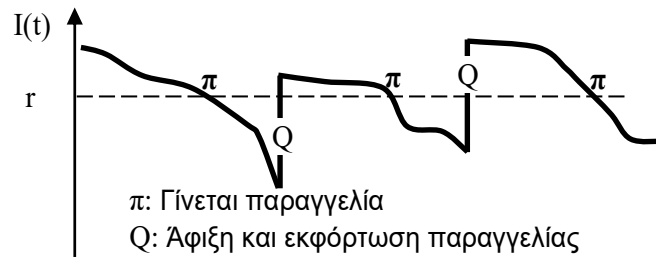
Εδώ $T \rightarrow 0$ και, αν οι παραγγελίες φθάνουν ακαριαία, τότε $Q(t) = R - I(t)$. Θα έπρεπε να γράψουμε $Q(t) = R - r$ αλλά υπάρχει περίπτωση απότομης (βηματικής) βύθισης. Όπως προηγουμένως, όταν η παραγγελία $Q(t)$ χρειάζεται κάποιο χρόνο για να φθάσει, όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε είναι ορθότερο να λάβουμε υπ' όψιν και την ποσότητα που αντιστοιχεί σε παλαιότερες παραγγελίες που δεν έχουν φθάσει ακόμη. Η μεταβλητή ελέγχου είναι τώρα η αποθεματική θέση $X(t) = I(t) + \Omega(t)$. Η πολιτική είναι και πάλι

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & X(t) > r \\ R - X(t) & X(t) \leq r. \end{cases}$$

2.2.3 Στρατηγική δεδομένης ποσότητας (Q, r)

(Fixed reorder (Q, r) policy)

Παραγγέλλουμε σταθερή ποσότητα Q κάθε φορά που το καθαρό απόθεμα γίνεται r . Το σχήμα δείχνει μία εφαρμογή της πολιτικής αυτής με χρονικά μεταβαλλόμενη ζήτηση και καθυστέρηση στην άφιξη παραγγελιών.



Η πολιτική αυτή είναι καλή όταν οι χρόνοι άφιξης των παραγγελιών είναι σύντομοι ή όταν η ζήτηση έχει σταθερό ρυθμό. Θα εξετάσουμε λεπτομερώς την πολιτική (Q, r) για την τελευταία περίπτωση, όταν δηλαδή $D(t) = D = \text{σταθερή}$. Θα ιδούμε και τις περιπτώσεις όπου, όταν φθάνει η ποσότητα Q , δεν εκφορτώνεται ακαριαία αλλά με κάποιο πεπερασμένο ρυθμό.

2.3 Αιτιοκρατικά μοντέλα (Q, r) ενός είδους με στατική ζήτηση

[Deterministic, single-item (Q, r) models with static demand]

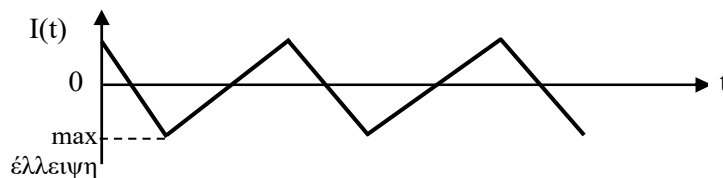
Υποθέσεις:

- Απόθεμα μ' ένα είδος. Υπάρχει κόστος συντήρησης αποθέματος.
- Ρυθμός ζήτησης γνωστός και σταθερός.
- Η ζήτηση θα ικανοποιηθεί όλη. Ακόμη και αν συμβεί έλλειψη και καθυστερούν οι παραδόσεις προϊόντων, ποτέ δεν αποθαρρύνονται οι πελάτες να θέσουν νέες παραγγελίες ούτε ακυρώνεται υπάρχουσα παραγγελία. Έχουμε όμως κόστος καθυστερήσεων.
- Οι συχνές παραγγελίες με μικρές ποσότητες αναπλήρωσης αποθέματος κοστίζουν περισσότερο από μεγάλες παραγγελίες.

Πρόβλημα: Πόσο και πότε πρέπει να παραγγελθεί ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος;

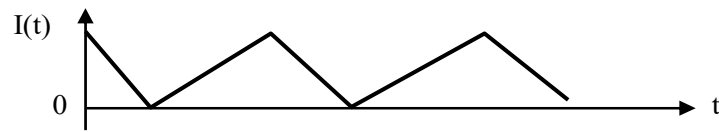
Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις:

Μοντέλο I. Πεπερασμένος ρυθμός εκφόρτωσης με επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη.

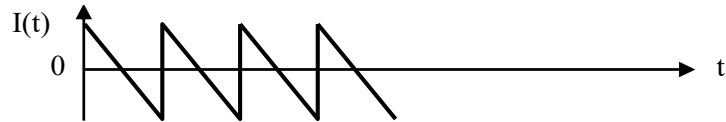


Αρνητικό απόθεμα σημαίνει ότι η ζήτηση θα ικανοποιηθεί μόλις φθάσουν ή παραχθούν νέα υλικά.

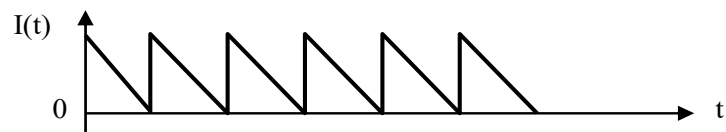
Μοντέλο II. Πεπερασμένος ρυθμός εκφόρτωσης μη επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη.



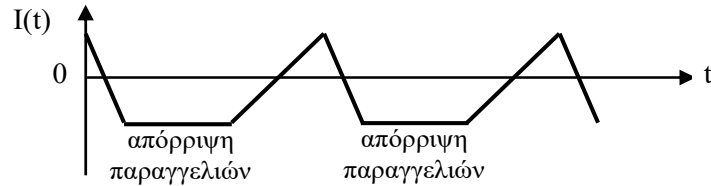
Μοντέλο III. Άπειρος ρυθμός εισόδου με επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη.



Μοντέλο IV. Άπειρος ρυθμός εισόδου μη επιτρεπόμενη αρνητική στάθμη.

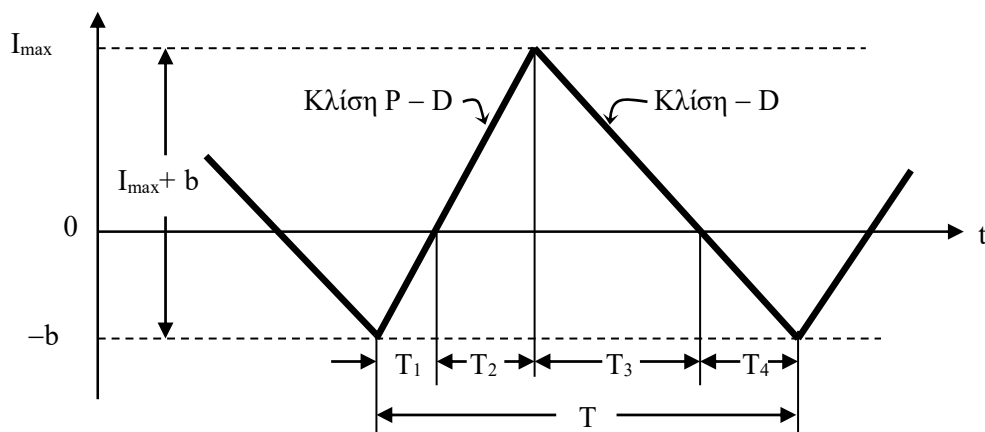


Γενίκευση των μοντέλων: Εδώ η ζήτηση δεν ικανοποιείται όλη γιατί είτε απορρίπτονται νέες παραγγελίες πελατών είτε οι ίδιοι οι πελάτες αρνούνται να αναθέσουν την παραγγελία τους όταν πρέπει να περιμένουν μέχρι να την παραλάβουν. Αν έχουμε χρόνο θα συζητήσουμε στην τάξη τέτοια συστήματα.



Ξεκινάμε με την πρώτη περίπτωση.

2.3.1 Μοντέλο I



Έστω

$I_{\max}$: μέγιστο ανά χείρας απόθεμα

Q : ποσότητα παραγγελίας

P : ρυθμός παραγωγής ή εκφόρτωσης αφού φθάσει το φορτηγό (ποσότητα/χρόνο)

D : ρυθμός ζήτησης (ποσότητα/χρόνο), με την υπόθεση ότι $D < P$

b : μέγιστη επιτρεπόμενη στάθμη παραγγελιών που δεν έχουν ικανοποιηθεί.

Θα υπολογίσουμε διάφορα μεγέθη που συνδέονται με το κόστος λειτουργίας του συστήματος και θα τα εκφράσουμε συναρτήσει των μεταβλητών Q και b . Αργότερα θα αναζητήσουμε τον συνδυασμό (Q^*, b^*) που ελαχιστοποιεί το κόστος.

Στο το σχήμα βλέπουμε έναν κύκλο διάρκειας T όπου γίνεται μία εκφόρτωση παραγγελίας και το καθαρό απόθεμα έχει ίδια αρχική και τελική τιμή, $-b$. Η είσοδος σε έναν κύκλο είναι Q και η έξοδος (ζήτηση) είναι DT . Από τον ισολογισμό αποθέματος, τελικό απόθεμα = αρχικό + (είσοδος – έξοδος)

προκύπτει

$$-b = -b + (Q - DT) \Rightarrow T = \frac{Q}{D} \quad (2.3)$$

Συνεχίζουμε με το $I_{\max}$. Στο σχήμα φαίνεται ότι η εκφόρτωση διαρκεί $T_1 + T_2$. Ξεκινά όταν το απόθεμα είναι $-b$ και τελειώνει όταν είναι $I_{\max}$. Στο διάστημα $T_1 + T_2$ το απόθεμα αυξάνει με ρυθμό $(P - D)$. Επομένως, πάλι από την εξίσωση ισολογισμού αποθέματος

$$I_{\max} = -b + (P - D)(T_1 + T_2).$$

Η ποσότητα Q παρέχεται σε χρόνο $T_1 + T_2$ με ρυθμό P άρα $P(T_1 + T_2) = Q$ ή

$$T_1 + T_2 = \frac{Q}{P}$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις ευρίσκουμε

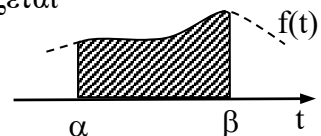
$$I_{\max} = \frac{Q}{P}(P - D) - b. \quad (2.4)$$

Επίσης από το σχήμα:

$$T_1 = \frac{b}{P - D}, \quad T_2 = \frac{I_{\max}}{P - D}, \quad T_3 = \frac{I_{\max}}{D}, \quad T_4 = \frac{b}{D}. \quad (2.5)$$

Η μέση τιμή μίας συνάρτησης $f(t)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ορίζεται

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$



όπου το ολοκλήρωμα είναι το διαγραμμισμένο εμβαδόν. Άρα το μέσο απόθεμα $\bar{I}$ είναι:

$$\bar{I} = \frac{\text{εμβαδόν}}{T} = \frac{\frac{1}{2}(T_2 + T_3)I_{\max}}{T} = \frac{1}{T} \frac{[Q(P-D) - Pb]^2}{2P^2} \frac{P}{(P-D)D} = \frac{\left[Q\left(1 - \frac{D}{P}\right) - b\right]^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)}.$$

όπου στα ανωτέρω έχουμε αντικαταστήσει τις Εξ. (2.4) και (2.5). Ομοίως, η μέση τιμή εκκρεμών παραγγελιών, οι οποίες δεν ικανοποιήθηκαν άμεσα λόγω έλλειψης, είναι

$$\bar{B} = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} bT_1 + \frac{1}{2} bT_4 \right) = \frac{b^2 P}{2Q(P-D)} = \frac{b^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{P}\right)}.$$

Ορίζουμε τα ακόλουθα:

- A: σταθερό κόστος μίας παραγγελίας (κόστος προώθησης παραγγελίας, λογιστές κ.λπ.)
- C: μοναδιαίο μεταβλητό κόστος προμήθειας (κόστος κάθε μονάδας)
- h: κόστος αποθέματος ανά μονάδα προϊόντος και ανά μονάδα χρόνου αποθήκευσης· στην διοίκηση αποθεμάτων συνηθίζεται να γράφουμε το κόστος αυτό ως ποσοστό i του κόστους προμήθειας C δηλαδή $h = iC$
- Π: κόστος έλλειψης προϊόντος ανά μονάδα, ανεξάρτητο από την διάρκεια έλλειψης
- $\hat{\Pi}$: κόστος έλλειψης προϊόντος ανά μονάδα και ανά μονάδα χρόνου έλλειψης
- τ : χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην ζήτηση και την λήψη παραγγελίας
- r: σημείο παραγγελίας
- T: διάρκεια ενός κύκλου ο οποίος επαναλαμβάνεται (αποδείξαμε πριν ότι $T = Q/D$)
- K: συνολικό μέσο κόστος λειτουργίας του συστήματος ανά μονάδα χρόνου (ή μέσος ρυθμός κόστους του συστήματος)

Το συνολικό κόστος ανά μονάδα χρόνου έχει τρεις συνιστώσες:

$$\begin{aligned} K = & (\text{Μέσο κόστος παραλαβής/μονάδα χρόνου}) \\ & + (\text{Μέσο κόστος αποθέματος/μονάδα χρόνου}) \\ & + (\text{Μέσο κόστος έλλειψης/μονάδα χρόνου}). \end{aligned}$$

Σε έναν κύκλο $T = Q/D$ (βλ. Εξ. (2.3)) γίνεται μία παραλαβή με κόστος $A + CQ$. Επομένως
(Μέσο κόστος παραλαβής/μονάδα χρόνου) =

$$\begin{aligned} &= (\text{Κόστος παραλαβής σε έναν κύκλο}/T) = (A + CQ) \frac{D}{Q} \\ &= \frac{AD}{Q} + CD \end{aligned}$$

Το μέσο κόστος αποθέματος ανά μονάδα χρόνου είναι $h\bar{I}$. Το κόστος έλλειψης έχει δύο

συνιστώσες. Η μία είναι αντίστοιχη του κόστους αποθέματος: $\hat{\Pi}\bar{B}$. Η άλλη ευρίσκεται στην συνέχεια.

Το σύστημα επιβαρύνεται με μία ακόμη παράμετρο κόστους Π για κάθε ζητούμενο προϊόν που δεν είναι ετοιμοπαράδοτο, ανεξάρτητα από τον χρόνο καθυστέρησης της παραγγελίας. Σε έναν κύκλο, όλη η ζήτηση στα διαστήματα T_1 και T_4 καθυστερεί. Στο διάστημα T_4 δεν υπάρχει απόθεμα και το $I(t)$ είναι αρνητικό και μειώνεται ως το $-b$. Στο T_1 ξεκινά η αναπλήρωση με ρυθμό P που ξεπερνά το ρυθμό ζήτησης D , όμως και τότε εξυπηρετούνται πρώτα οι πελάτες που είχαν έλθει παλαιότερα, στο διάστημα T_4 , οπότε όλη η ζήτηση που έρχεται στο T_1 δεν ικανοποιείται αμέσως. Τελικά κάθε προϊόν που ζητείται στο $T_1 + T_4$ έχει κόστος Π . Αφού ζητούνται $D(T_1+T_4)$ το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι

$$\frac{\text{κόστος λόγω } \Pi \text{ ανά κύκλο}}{\text{διάρκεια κύκλου, } T} = \frac{D(T_1 + T_4)}{Q/D} \Pi = \frac{D}{Q} D \left(\frac{b}{P-D} + \frac{b}{D} \right) \Pi = \frac{DbP}{Q(P-D)} \Pi$$

όπου κάναμε χρήση της Εξ. (2.30) για το T και των (2.5) για τα T_1 και T_4 .

Το συνολικό μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου συνοψίζεται

$$K = \frac{AD}{Q} + CD + h\bar{I} + \hat{\Pi}\bar{B} + \frac{D\Pi bP}{Q(P-D)}$$

Ορίζουμε το $\rho \triangleq D/P$ που δηλώνει το κλάσμα του χρόνου που χρειάζεται να παράγουμε (με ρυθμό P) προκειμένου να καλύπτεται η ζήτηση (με ρυθμό D). Αφού $D < P$ έχουμε ότι $\rho < 1$. Αντικαθιστούμε το ρ στις εκφράσεις των $\bar{I}$ και $\bar{B}$ που βρήκαμε και προκύπτει

$$K(Q, b) = \frac{AD}{Q} + CD + \frac{h[Q(1-\rho) - b]^2}{2Q(1-\rho)} + \frac{\hat{\Pi} b^2}{2Q(1-\rho)} + \frac{D\Pi b}{Q(1-\rho)}. \quad (2.6)$$

Θέλουμε να βρούμε το βέλτιστο σημείο (Q^*, b^*) ώστε το K να γίνει ελάχιστο.

Αν $h = 0$, τότε η βέλτιστη πολιτική είναι να παραγγείλουμε μία μόνον φορά $Q = \infty$ (το b δεν χρειάζεται) και να διατηρούμε άπειρο απόθεμα χωρίς έλλειψη. Τότε $K = CQ$ και οι άλλοι όροι της Εξ. (2.6) μηδενίζονται.

Μία άλλη ειδική περίπτωση είναι εκείνη όπου $A = 0$. Στην εξίσωση κόστους ο πρώτος όρος είναι $AD/Q = 0$. Παίρνοντας όρια $Q \rightarrow 0$ και $b \rightarrow 0$ προκύπτει επίσης $K = CD$ που είναι η ελάχιστη τιμή. Τώρα όμως, αντίθετα με την προηγούμενη περίπτωση, γίνονται άπειρες παραγγελίες ανά μονάδα χρόνου, όλες χωρίς κόστος αφού $A = 0$. Σε κάθε απειροστικό μικρό χρονικό διάστημα $dt \rightarrow 0$, η ζήτηση είναι $Ddt (= 0)$ και καλύπτεται πλήρως από μία παραγγελία $Q = Ddt (= 0)$, δεν δημιουργείται απόθεμα, δεν υπάρχει έλλειψη, ούτε κόστος εξ αιτίας τους. Έχουμε $I(t) = 0$ πάντοτε και $K = CD$.

Στο εξής εξετάζουμε αποκλειστικά το πρόβλημα για

$$h > 0 \text{ και } A > 0.$$

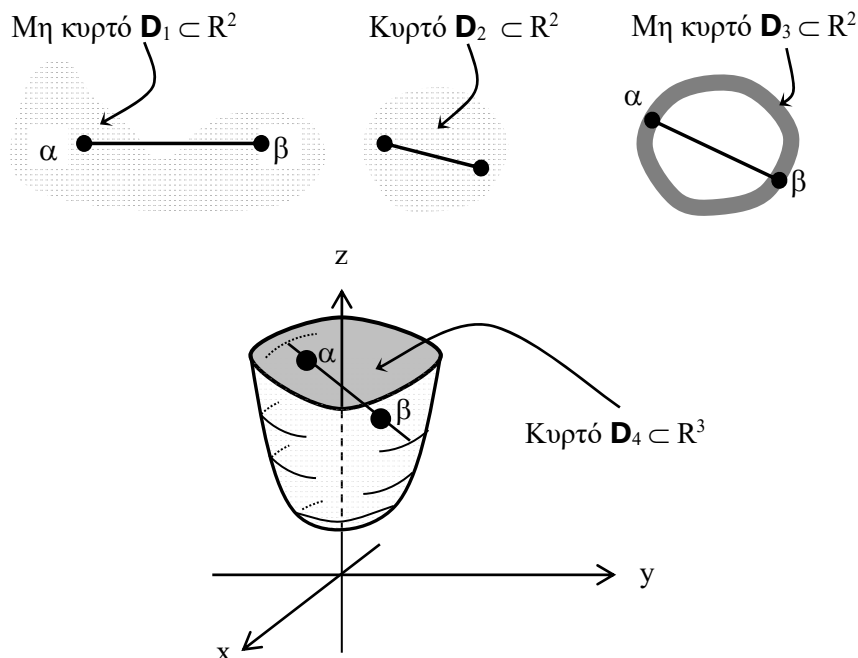
Τα Q και b λαμβάνουν τιμές από 0 έως ∞ και ορίζουν ένα ημιεπίπεδο. Τα σημεία (Q, b) του ημιεπιπέδου για τα οποία $Q > 0$ και $b > 0$ λέγονται εσωτερικά, ενώ σημεία για τα οποία $Q = 0$ ή $b = 0$ ανήκουν στο σύνορο του ημιεπιπέδου. Όπως θα αποδείξουμε αργότερα για να έχει η συνάρτηση K τοπικό ακρότατο σε εσωτερικό σημείο (Q, b) πρέπει

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial b} = 0. \quad (2.7)$$

Για να είναι το ακρότατο απόλυτο ελάχιστο *αρκεί* η συνάρτηση K να είναι *κυρτή* ($\cup$) για όλα τα (Q, b) που ανήκουν σε επίσης κυρτό σύνολο. Τα σύνολα αυτά ονομάζονται διανυσματικοί χώροι γιατί κάθε σημείο (Q, b) ορίζει επίσης ένα διάνυσμα με αρχή το $(0, 0)$ και τέλος το (Q, b) . Έδώ μιλάμε για σημείο ή διάνυσμα εννοώντας το ίδιο πράγμα.

Θα ιδούμε στην συνέχεια πώς ορίζεται η κυρτότητα συνόλων και συναρτήσεων και πώς εφαρμόζεται στην βελτιστοποίηση.

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $\mathbf{D}$ ενός διανυσματικού χώρου είναι *κυρτό* αν για οποιαδήποτε σημεία $\alpha, \beta \in \mathbf{D}$ και κάθε αριθμό $\theta, 0 < \theta < 1$, το σημείο $\theta\alpha + (1-\theta)\beta$ ανήκει στο $\mathbf{D}$, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία α και β *ευρίσκεται μέσα* στο σύνολο $\mathbf{D}$.

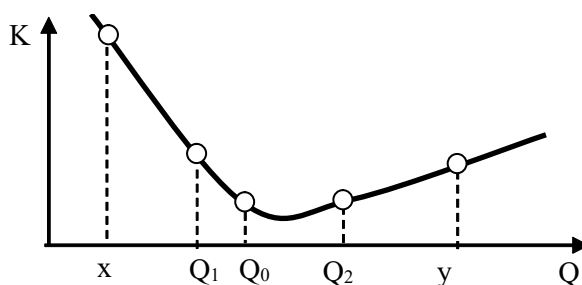


Ορισμός: Μία συνάρτηση f ενός διανύσματος είναι *αυστηρά κυρτή* (strictly convex) σε μια κυρτή περιοχή $\mathbf{D}$ ενός διανυσματικού χώρου αν για όλα τα διανύσματα α, β της $\mathbf{D}$

με $\alpha \neq \beta$ και κάθε θ , $0 < \theta < 1$, το ακόλουθο ισχύει

$$\theta f(\alpha) + (1 - \theta)f(\beta) > f[\theta\alpha + (1 - \theta)\beta].$$

Το $\theta\alpha + (1 - \theta)\beta$ είναι ένα σημείο επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα α και β . Αν ισχύει η χαλαρή ανισότητα $\geq$ αντί της αυστηρής ($>$) τότε η συνάρτηση f είναι απλώς κυρτή. Μία συνάρτηση είναι κοίλη αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα ($\leq$).



Βασική ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων: Για κάθε κυρτή συνάρτηση $K(Q)$

(i) αν $Q_1 < Q_0$ και $K(Q_1) > K(Q_0)$ τότε δεν υπάρχει $x < Q_1$ τέτοιο ώστε $K(x) < K(Q_1)$

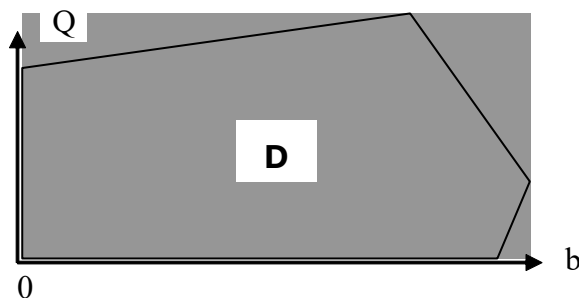
και

(ii) αν $Q_2 > Q_0$ και $K(Q_2) > K(Q_0)$ τότε δεν υπάρχει $y > Q_2$ τέτοιο ώστε $K(y) < K(Q_2)$.

Απόδειξη: Πρόβλημα για το σπίτι.

Αυτή η ιδιότητα, όταν ισχύει, διευκολύνει την βελτιστοποίηση γιατί μας λέει ότι αν μία μεταβολή χειροτερεύει το K , τότε δεν συμφέρει να την κάνουμε μεγαλύτερη και πρέπει να κινηθούμε προς την αντίθετη κατεύθυνση. Ικανοποιείται και από κάποιες μη κυρτές συναρτήσεις, όπως η ανεστραμμένη κωδωνοειδής ∇ . Υπάρχει ανάλογη ιδιότητα για συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών αλλά έχει πιο σύνθετη διατύπωση.

Για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης $K(Q, b)$ που εξετάζουμε, η περιοχή τιμών των δύο παραμέτρων $\mathbf{D} = \{(Q, b) \text{ όπου } Q \geq 0, b \geq 0\}$ είναι κυρτό σύνολο:



Θα ιδούμε σύντομα ότι η $K(Q, b)$ της Εξ. (2.6) έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Ένας τρόπος, πλην του ορισμού, να διαπιστώσουμε αν μία συνάρτηση K είναι κυρτή

βασίζεται στην χρήση του πίνακα *Hess* και των ακόλουθων ιδιοτήτων:

1) Μία συνάρτηση που έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξεως είναι κυρτή (ή κοίλη) αν ο πίνακας Hess,

$$H \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial Q^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial b} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial Q} & \frac{\partial^2 K}{\partial b^2} \end{bmatrix}$$

είναι αντιστοίχως *θετικά ημιορισμένος* (αρνητικά ημιορισμένος για κοίλη συνάρτηση K). Τέτοιοι πίνακες έχουν την ιδιότητα $u^T H u \geq 0$ (ή, για κοίλη συνάρτηση K , $u^T H u \leq 0$) για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $u \neq 0$ ή ισοδύναμα έχουν όλες τις ιδιοτιμές ≥ 0 (ή όλες ≤ 0 αντιστοίχως για κοίλη συνάρτηση K).

2) Οι ιδιοτιμές λ είναι οι λύσεις της $\det(\lambda I - H) = 0$, όπου I = ταυτοτικός πίνακας.

3) Επειδή $\partial^2 K / \partial Q \partial b = \partial^2 K / \partial b \partial Q$, ο πίνακας H είναι πάντοτε συμμετρικός ανεξαρτήτως του αριθμού μεταβλητών που έχει η συνάρτηση K .

4) Όλες οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

5) Αν στο σημείο (Q, b) ισχύει η συνθήκη (2.7) και ο πίνακας H είναι θετικά ημιορισμένος, τότε το (Q, b) είναι τοπικό ελάχιστο της K . Αν ο H είναι θετικά ορισμένος σε κάθε σημείο, τότε το ακρότατο (Q, b) της (2.7) είναι και *ολικό* ή *απόλυτο* ελάχιστο.

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \dots = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{h(1-\rho)}{2} - \frac{(h + \hat{\Pi})b^2}{2Q^2(1-\rho)} - \frac{D\Pi b}{Q^2(1-\rho)}$$

$$\frac{\partial K}{\partial b} = \dots = -h + \frac{(h + \hat{\Pi})b}{Q(1-\rho)} + \frac{D\Pi}{Q(1-\rho)}$$

και δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q^2} = \frac{2AD}{Q^3} + \frac{(h + \hat{\Pi})b^2 + 2D\Pi b}{Q^3(1-\rho)} > 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial b^2} = \frac{h + \hat{\Pi}}{Q(1-\rho)} > 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial b} = -\frac{(h + \hat{\Pi})b + D\Pi}{Q^2(1-\rho)}$$

.

Παρατηρήστε ότι η K είναι κυρτή συνάρτηση ως προς Q και κυρτή ως προς b γιατί $\partial^2 K / \partial Q^2 > 0$ και $\partial^2 K / \partial b^2 > 0$. Αυτές οι συνθήκες δεν συνεπάγονται πάντα ότι η K είναι κυρτή ως προς (Q, b) *από κοινού*. Αυτό φαίνεται στην συνέχεια.

Σχηματίζουμε τον πίνακα H και ευρίσκουμε τις δύο ιδιοτιμές του:

$$\det(\lambda I - H) = \det \begin{bmatrix} \left(\lambda - \frac{2AD}{Q^3} - \frac{(h + \hat{\Pi})b^2 + 2D\Pi b}{Q^3(1-\rho)} \right) & \frac{(h + \hat{\Pi})b + D\Pi}{Q^2(1-\rho)} \\ \frac{(h + \hat{\Pi})b + D\Pi}{Q^2(1-\rho)} & \left(\lambda - \frac{h + \hat{\Pi}}{Q(1-\rho)} \right) \end{bmatrix} = 0$$

Μετά από πράξεις και απλοποιήσεις προκύπτει το τριώνυμο

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda \left[\underbrace{\frac{2AD}{Q^3}}_{M_1} + \underbrace{\frac{(h + \hat{\Pi})b^2}{Q^3(1-\rho)}}_{M_2} + \underbrace{\frac{h + \hat{\Pi}}{Q(1-\rho)}}_{M_3} + \underbrace{\frac{2D\Pi b}{Q^3(1-\rho)}}_{M_4} \right] &+ \underbrace{\frac{2AD(h + \hat{\Pi})}{Q^4(1-\rho)}}_{M_1 M_3} - \underbrace{\frac{(D\Pi)^2}{Q^4(1-\rho)^2}}_{M_5} = \\ &= \lambda^2 - \lambda(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) + M_1 M_3 - M_5 = 0. \end{aligned}$$

Και οι δύο ρίζες του τριωνύμου είναι θετικές όταν

$$M_1 M_3 \geq M_5 \quad \text{ή} \quad 2AD(h + \hat{\Pi}) - \frac{(D\Pi)^2}{1-\rho} \geq 0 \quad (2.8)$$

και τότε η $K(Q, b)$ είναι κυρτή. Αν δεν ισχύει η (2.8), τότε μία ρίζα είναι θετική αλλά η άλλη αρνητική (**γιατί;**). Διακρίνουμε δύο κύριες περιπτώσεις:

i) Ισχύει η (2.8): Το ακρότατο που ικανοποιεί τις (2.7) είναι ολικό ελάχιστο. Από την $\partial K / \partial b$ που βρήκαμε πριν και την (2.7) έχουμε,

$$\frac{\partial K}{\partial b} = -h + \frac{(h + \hat{\Pi})b}{Q(1-\rho)} + \frac{D\Pi}{Q(1-\rho)} = 0$$

και λύνοντας προκύπτει το b συναρτήσει του Q :

$$b(Q) = \frac{hQ(1-\rho) - D\Pi}{h + \hat{\Pi}}.$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση αυτή του b στην συνάρτηση κόστους (2.6). Τώρα η συνάρτηση K έχει ως μόνη μεταβλητή το Q και συμβολίζεται $K_1(Q) = K[Q, b(Q)]$. Η παράγωγός της μετά από αρκετές πράξεις απλοποιείται σε

$$\frac{dK_1(Q)}{dQ} = \left[-AD + \frac{(D\Pi)^2}{2(h + \hat{\Pi})(1-\rho)} \right] \frac{1}{Q^2} + \frac{h\hat{\Pi}(1-\rho)}{2(h + \hat{\Pi})}. \quad (2.9)$$

Λύνοντας προκύπτει το βέλτιστο Q

$$Q^* = \sqrt{\left[2AD(h + \hat{\Pi}) - \frac{(D\Pi)^2}{1-\rho} \right] \frac{1}{h\hat{\Pi}(1-\rho)}} \quad (2.10)$$

(λόγω της (2.8), το υπόριζο είναι θετικό) και με αντικατάσταση στην $b(Q^*)$,

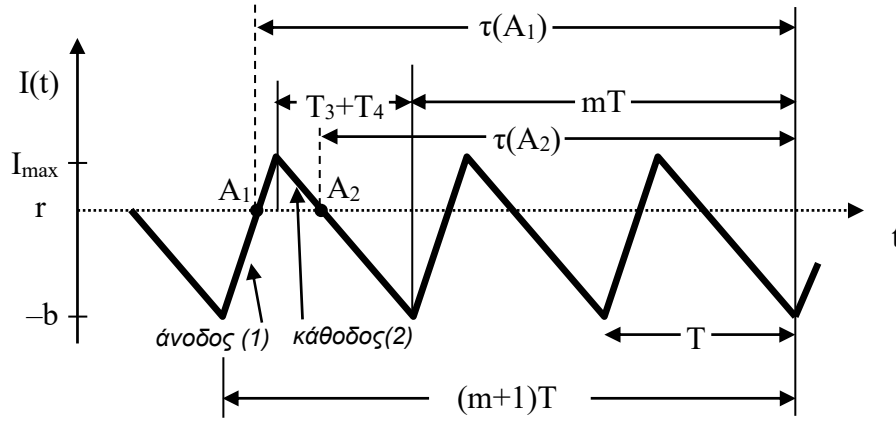
$$b^* = \frac{hQ^*(1-\rho) - D\Pi}{h + \hat{\Pi}}, \quad \text{εφ' όσον } b^* \geq 0. \quad (2.11)$$

Αν προκύψει $b^* < 0$, τότε, λόγω της κυρτότητας της $K(Q, b)$, η βέλτιστη λύση είναι η

πλησιέστερη αποδεκτή: θέτουμε $b^* = 0$ και μεταβαίνουμε στο Μοντέλο II της Παραγράφου 2.3.2. Αν $\hat{\Pi} = 0$ (και ισχύει η (2.8)) τότε συμφέρει να έχουμε $b^* = \infty$, δηλαδή δεν ικανοποιούμε ποτέ την ζήτηση και επιβαρυνόμαστε με μέσο ρυθμό κόστους $(C + \Pi)D$.

ii) Δεν ισχύει η (2.8): Εδώ το βέλτιστο Q είναι > 0 , αλλιώς το μέσο κόστος παραγγελιών ανά μονάδα χρόνου θα απειριζόταν: $AD/0 \rightarrow \infty$. Ωστόσο η Εξ. (2.10) δεν ισχύει πλέον. Η λύση δίνεται από $b^* = 0$ και το Μοντέλο II που θα ιδούμε στην Παράγραφο 2.3.2. Η απόδειξη τούτου παραλείπεται.

Τώρα υπολογίζουμε το σημείο παραγγελίας r . Παραγγέλλουμε τη στιγμή εκείνη που εξασφαλίζει ότι η παραγγελία θα φθάσει ακριβώς όταν το καθαρό απόθεμα αγγίζει το κατώτατο σημείο $-b$. Αν ο χρόνος μεταφοράς τ υπερβαίνει το T , τότε η παραγγελία που φθάνει στην αρχή ενός κύκλου έχει παραγγελθεί πολλούς κύκλους πριν.



Το πηλίκο τ/T έχει ένα ακέραιο μέρος και ένα δεκαδικό. Το ακέραιο μέρος ισούται με τον αριθμό των ολόκληρων κύκλων που καθυστερεί η παραγγελία και το κλασματικό είναι ένα επί πλέον κλάσμα κύκλου. Το ακέραιο μέρος συμβολίζεται

$$m = \text{int}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \left\lfloor \frac{\tau}{T} \right\rfloor \quad (2.12)$$

και εξ ορισμού ικανοποιεί την σχέση

$$m \leq \frac{\tau}{T} < m+1 \Leftrightarrow mT \leq \tau < (m+1)T.$$

Αν συμβεί να έχουμε $\tau = mT$, τότε η παραγγελία έγινε m κύκλους πριν το $-b$. Προφανώς, λόγω περιοδικότητας, το σημείο παραγγελίας θα είναι το $r = -b$.

Όταν το τ δεν είναι πολλαπλάσιο του T , τότε

$$mT < \tau < (m+1)T$$

και εξετάζουμε δύο περιπτώσεις που φαίνονται στο σχήμα.

Σημείο Α₁: Εδώ έχουμε $\tau > mT + T_3 + T_4$ και το απόθεμα $I(t)$ φθάνει το σημείο παραγγελίας r κατά την άνοδό του με ρυθμό $P-D$ μετά το $-b$. Τότε ο χρόνος ανόδου είναι (βλ. σχήμα) $(m+1)T - \tau$ και ο ισολογισμός αποθέματος είναι

$$r = -b + (P - D)[(m + 1)T - \tau].$$

Σημείο Α₂: Τώρα $\tau \leq mT + T_3 + T_4$ και η διαφορά $mT + T_3 + T_4 - \tau$ είναι ο χρόνος καθόδου, με ρυθμό $-D$, μετά το $I_{\max}$. Την στιγμή της παραγγελίας το απόθεμα είναι

$$r = I_{\max} - D(mT + T_3 + T_4 - \tau) = I_{\max} - D\left(m\frac{Q}{D} + \frac{I_{\max} + b}{D} - \tau\right),$$

όπου αντικαταστήσαμε $T=Q/D$ από την (2.3) και $T_3 = I_{\max}/D$, $T_4 = b/D$ από την (2.5).

Συνολικά, το σημείο παραγγελίας είναι:

$$r = \begin{cases} \tau D - mQ - b & \text{όταν το } I(t) \text{ μειώνεται} & 0 \leq \tau - mT \leq T_3 + T_4 \\ \left[(m+1)\frac{Q}{D} - \tau\right](P - D) - b & \text{όταν το } I(t) \text{ αυξάνεται} & \tau - mT > T_3 + T_4 \end{cases} \quad (2.13)$$

Μία έκφραση για το $T_3 + T_4$ ευρίσκεται συνδυάζοντας τις Εξ. (2.4) και (2.5):

$$T_3 + T_4 = \frac{Q}{D}(1 - \rho). \quad (2.14)$$

2.3.2 Μοντέλο II

Εδώ $b = 0$, οπότε η (2.6) γίνεται

$$K = \frac{AD}{Q} + CD + h\frac{Q}{2}(1 - \rho)$$

απ' όπου

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h(1 - \rho)}}$$

και r είναι όπως στο μοντέλο I με $b = 0$.

2.3.3 Μοντέλο III

Εδώ $P \rightarrow \infty$ κι έτσι $\rho = D/P = 0$. Άρα, πάλι από την (2.6),

$$K = \frac{AD}{Q} + CD + \frac{h(Q - b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\Pi} b^2}{2Q} + \frac{D\Pi b}{Q}.$$

Εδώ ισχύουν τα ίδια όπως στο Μοντέλο I με τις δύο περιπτώσεις i, ii και τους ίδιους τύπους, αντικαθιστώντας $(1 - \rho) = 1$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$r = \tau D - mQ^* - b^*.$$

2.3.4 Μοντέλο IV

Σ' αυτήν την περίπτωση $P \rightarrow \infty$, $b = 0$ οπότε

$$K = \frac{AD}{Q} + CD + h \frac{Q}{2}$$

$$\text{και } Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}, \quad r = \tau D - mQ^*.$$

Παράδειγμα

Ένας κεντρικός διανομέας παγωτού προμηθεύεται μεγάλες συσκευασίες που τις διαθέτει σε καταστήματα με συνολικό ρυθμό 2 συσκευασίες/ημέρα. Το κόστος κάθε συσκευασίας είναι \$ 500 και το σταθερό κόστος κάθε παραγγελίας είναι \$ 100. Για την συντήρηση του παγωτού ο διανομέας έχει ψυγεία και το ποσοστό i του κόστους αποθέματος είναι 9.5%. Το αμετάβλητο κόστος έλλειψης είναι \$ 40 ανά συσκευασία ενώ το μεταβλητό κόστος έλλειψης είναι \$ 100 ανά συσκευασία και ανά ημέρα. Ο χρόνος παραγγελίας-άφιξης είναι μισή ημέρα και ο χρόνος εκφόρτωσης είναι 0. Εύρετε τα Q^* , b^* και r^* αν τα Q^* και b^* πρέπει να είναι ακέραιοι αριθμοί.

Από τα δεδομένα

$$D = 2, i = 0.095, \Pi = 40, \hat{\Pi} = 100, C = 500, A = 100, \tau = 0.5 \text{ ημέρες, και } P \rightarrow \infty.$$

Χρησιμοποιούμε το Μοντέλο I με $\rho = 0$ (ή ισοδύναμα το Μοντέλο III) και $h = iC = 47.5$.

Η συνθήκη (2.8) ισχύει:

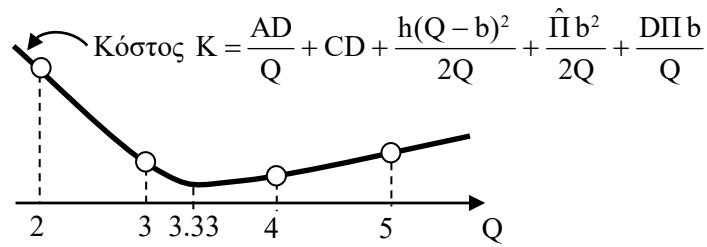
$$2AD(h + \hat{\Pi}) - (D\Pi)^2 = 52600 > 0.$$

Τότε

$$Q^* = \sqrt{\frac{2AD(h + \hat{\Pi}) - (D\Pi)^2}{h\hat{\Pi}}} = 3.33 \text{ και } b^* = \frac{hQ^*(1 - \rho) - D\Pi}{h + \hat{\Pi}} = 0.53 \geq 0.$$

Όμως πρέπει τα Q^* , b^* να είναι ακέραιοι. Μία αβασάνιστη πρόταση θα ήταν να πάρουμε τους πλησιέστερους ακέραιους: $Q = 3$ και $b = 1$. Αυτή όμως δεν είναι η βελτιστη πολιτική.

Η K είναι κυρτή συνάρτηση, άρα όσο απομακρυνόμαστε από το $Q = 3.33$ (είτε προς τα αριστερά είτε προς δεξιά) τόσο μεγαλώνει το K . Η K έχει την ακολουθη μορφή:



Ανάλογα ισχύουν και για την μεταβλητή b . Δοκιμάζουμε, επομένως, ζεύγη (Q, b) ακέραιων γειτονικών τιμών γύρω από το σημείο $(Q^*, b^*) = (3.33, 0.53)$ που βρήκαμε πριν και προκύπτουν οι ρυθμοί κόστους: $K(3, 0) = 1137.9$, $K(3, 1) = 1141.7$, $K(4, 0) = 1145.0$, και $K(4, 1) = 1135.9$.

Η πολιτική με το ελάχιστο κόστος είναι: $Q^* = 4$, $b^* = 1$. Άρα

$$T = \frac{Q^*}{D} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ημέρες, } m = \text{int}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \text{int}(0.25) = 0$$

Από τις Εξ. (2.14) και (2.13):

$$\tau - mT = 0.5, T_3 + T_4 = 2 \text{ και}$$

$$\tau - mT < T_3 + T_4 \Rightarrow r = \tau D - mQ^* - b^* = 0.5(2) - 0(4) - 1 = 0.$$

Δηλαδή παραγγέλλουμε 4 συσκευασίες όταν το απόθεμα είναι 0. Λόγω της ακαριαίας εκφόρτωσης αυτό συμβαίνει όταν φθάνει η προηγούμενη παραγγελία.

2.4 Εκπτώσεις ποσοτήτων

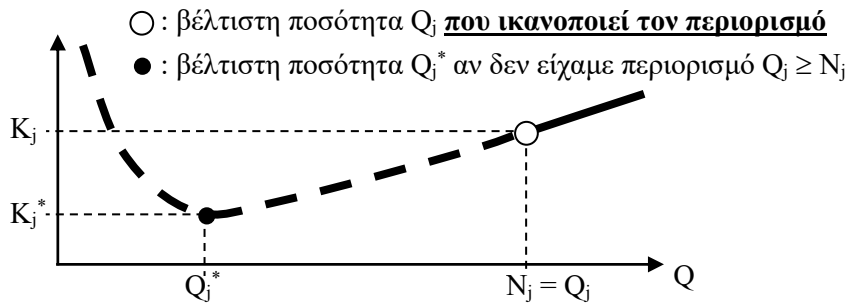
Υπάρχουν περιπτώσεις όπου το μοναδιαίο κόστος C εξαρτάται από την ποσότητα αγοράς και όσο μεγαλύτερη είναι η ποσότητα τόσο μικρότερη είναι η τιμή. Αυτή είναι η περίπτωση εκπτώσεων ποσοτήτων (quantity discounts).

Υποθέτουμε ότι ισχύει το μοντέλο IV. Το εκπτωτικό σχήμα έχει τη μορφή:

$$C = C_j \text{ αν } Q \geq N_j,$$

για διάφορα j όπου $C_{j+1} < C_j$ και $N_{j+1} > N_j$. Ο προμηθευτής κάνει μεγαλύτερη έκπτωση όσο πιο μεγάλη είναι η παραγγελία Q .

Εξετάζουμε την καμπύλη κόστους για κάθε j και ευρίσκουμε το Q_j^* με ελάχιστο κόστος. Αν $Q_j^* \geq N_j$, επιλέγουμε $Q_j = Q_j^*$, αλλιώς $Q_j = N_j$, όπως δείχνει το σχήμα. Η επιλογή αυτή είναι η βέλτιστη λόγω κυρτότητας.



Ακολουθώς επιλέγουμε το j με το ελάχιστο $K_j(Q_j)$. Ουσιαστικά ευρίσκουμε το

$$\min_j \left[\min_{Q \geq N_j} K_j(Q) \right].$$

Παράδειγμα

Κάποια βιομηχανία χρησιμοποιεί μεγάλες ποσότητες κάποιου υλικού στις γραμμές παραγωγής της. Η απαίτησή της είναι να χρησιμοποιεί παραγγελίες σταθερού μεγέθους και καθόλου ανικανοποίητη ζήτηση. Ετησίως χρειάζονται 1000 μονάδες του υλικού, το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι \$ 100, το ετήσιο κόστος τόκων, ασφάλειας, και φόρων στο μέσο απόθεμα είναι 20% της αξίας ανά μονάδα υλικού, το επί πλέον κόστος συντήρησης μίας μονάδας υλικού στην αποθήκη είναι \$ 0.1/μήνα, η τιμή αγοράς εξαρτάται από την ποσότητα παραγγελίας:

Ελάχιστο μέγεθος παραγγελίας N_j	Κόστος/μονάδα (\$) C_j
$0 < Q$	1.00
$400 \leq Q$	0.98
$800 \leq Q$	0.96
$1200 \leq Q$	0.94

Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική.

Εδώ $A = 100/\text{παραγγελία}$, $D = 1000/\text{χρόνο}$, κόστος αποθήκευσης μίας μονάδας υλικού/χρόνο $= 12(0.1) = \$ 1.2$ και επί πλέον κόστος επένδυσης σε απόθεμα $iC = 0.2C$. Στο εξής ως μοναδιαίο ρυθμό κόστους αποθέματος χρησιμοποιούμε το $h = (iC + 1.2)$. Εξετάζουμε τις 4 περιπτώσεις κόστους $C_j = 1, 0.98, 0.96$ και 0.94 , για $j = 1, 2, 3, 4$, και ευρίσκουμε τις αντίστοιχες ποσότητες Q_j που έχουν ελάχιστο μέσο ρυθμό κόστους. Σε κάθε περίπτωση επιβάλλουμε τους περιορισμούς του προηγούμενου πίνακα.

Για το μοντέλο IV έχουμε

$$K_j(Q) = \frac{AD}{Q} + C_j D + (iC_j + 1.2) \frac{Q}{2} = \frac{100000}{Q} + 1000C_j + h_j \frac{Q}{2}$$

και

$$Q_j = \sqrt{\frac{2AD}{h_j}} = \sqrt{\frac{200000}{1.2 + 0.2C_j}}.$$

Αν τα Q_j

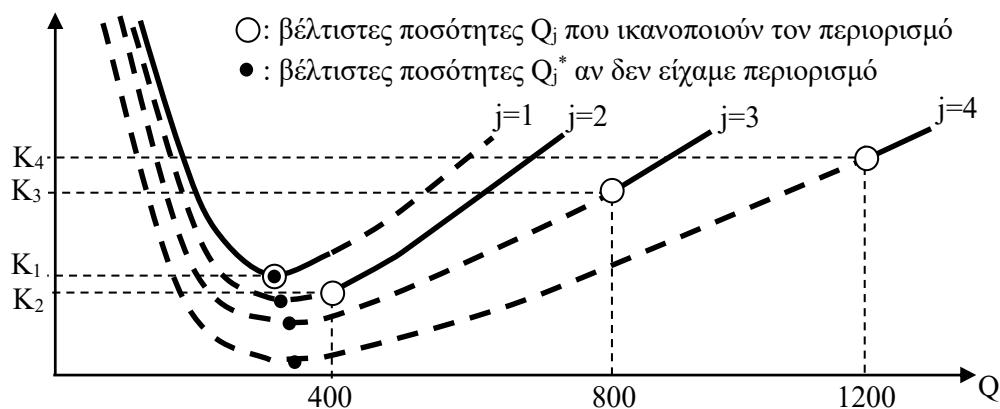
$$j = 1 \Rightarrow C_1 = 1.00, h_1 = 1.4, Q_1^* = 377.96 = Q_1 \text{ και } K_1 = 1529.2$$

$$j = 2 \Rightarrow C_2 = 0.98, h_2 = 1.396, Q_2^* = 378.51 \Rightarrow Q_2 = 400 \Rightarrow K_2 = 1509.2$$

$$j = 3 \Rightarrow C_3 = 0.96, h_3 = 1.392, Q_3^* = 379.05 \Rightarrow Q_3 = 800 \Rightarrow K_3 = 1641.8$$

$$j = 3 \Rightarrow C_4 = 0.94, h_4 = 1.388, Q_4^* = 379.59 \Rightarrow Q_4 = 1200 \Rightarrow K_4 = 1856.1.$$

Επιλέγουμε $Q^* = 400$.



Οι παραγγελίες γίνονται κάθε $400/1000 = 0.4$ έτη ή 4.8 μήνες.

2.5 Μεγέθη παραγγελίας με δυναμική ζήτηση

Κάποιες εταιρείες δεσμεύονται να παρέχουν σε αγοραστές ορισμένες ποσότητες $D(t) \geq 0$ ανά μονάδα χρόνου, όχι απαραίτητα σταθερές, για κάποιο χρονικό διάστημα $[0, T]$.

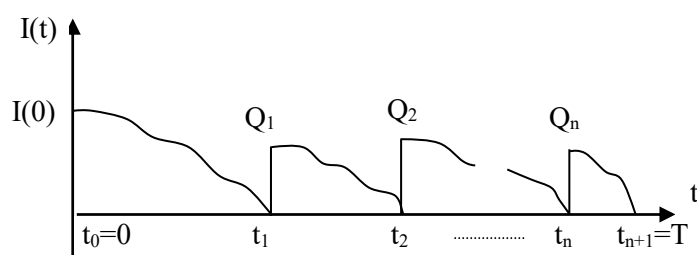
Υπάρχουν δύο εκδοχές του προβλήματος: Είτε πρόκειται για αποθεματικό σύστημα οπότε παραγγέλλει προϊόντα από κάποιον προμηθευτή, είτε πρόκειται για παραγωγική επιχείρηση που τα παράγει η ίδια. Και οι δύο περιπτώσεις έχουν την ίδια μαθηματική διατύπωση. Χρησιμοποιούμε την ορολογία των αποθεματικών συστημάτων.

Έστω n ο συνολικός αριθμός αναπληρώσεων αποθέματος στην περίοδο $[0, T]$ και Q_j η ποσότητα που προστίθεται στο απόθεμα στο χρόνο $t = t_j$, $j = 1, \dots, n$. Η συνολική ζήτηση που πρέπει να καλυφθεί στο διάστημα $[0, t]$ είναι

$$Z(t) = \int_0^t D(\tau) d\tau.$$

Έστω ότι ξεκινάμε με απόθεμα $I(0)$ και στο τέλος δεν απαιτείται να έχουμε απόθεμα.

Απαγορεύεται έλλειψη και επίσης $P \rightarrow \infty$ έχουμε δηλαδή άμεση εκφόρτωση των Q_i :



Βλέπουμε ότι το απόθεμα απόθεμα μειώνεται με ακανόνιστο τρόπο λόγω της μεταβαλλόμενης ζήτησης. Στους χρόνους t_i που το απόθεμα μηδενίζεται, προστίθενται ποσότητες Q_i που με τη σειρά τους εξαντλούνται από την ζήτηση σε επόμενο διάστημα. Αυτή είναι η βέλτιστη πολιτική: αν κάποια αναπλήρωση γίνει σε χρόνο t_j νωρίτερα από την t_j τότε θα υπάρχει επί πλέον κόστος αποθέματος στο διάστημα $[t_j, t_j]$.

Οι χρόνοι t_j και οι ποσότητες Q_j προγραμματίζονται πριν τη στιγμή 0 κατά τρόπον ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος την περίοδο $[0, T]$.

Την στιγμή t_1 όλη η ποσότητα $I(0)$ εξαντλείται λόγω της ζήτησης $Z(t_1)$ ή

$$I(0) = Z(t_1)$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ευρίσκουμε το t_1 .

Από το σχήμα φαίνεται ότι το απόθεμα εξαρτάται από την πιο πρόσφατη αναπλήρωση:

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - \int_0^t D(\tau) d\tau & 0 \leq t \leq t_1 \\ Q_j - \int_{t_j}^t D(\tau) d\tau & t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{cases}.$$

Η ποσότητα Q_j καλύπτει ακριβώς την ζήτηση στο $[t_j, t_{j+1})$. Προφανώς

$$Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t) dt = Z(t_{j+1}) - Z(t_j) \quad \text{και} \quad \int_{t_j}^t D(\tau) d\tau = Z(t) - Z(t_j)$$

άρα

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - Z(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ Z(t_{j+1}) - Z(t) & t_j \leq t \leq t_{j+1} \end{cases}.$$

Πρόβλημα

Δοθέντων των n και Z ή D εύρετε τα t_i και Q_i ώστε να ελαχιστοποιηθεί το

$$K_n = nA + CZ(T) + H_n$$

όπου

nA : συνολικό σταθερό κόστος προμήθειας

$C Z(T)$: συνολικό μεταβλητό κόστος προμήθειας συμπεριλαμβανομένου του $I(0)$

H_n : συνολικό κόστος αποθέματος.

Οι δύο πρώτοι όροι είναι σταθεροί. Επομένως ελαχιστοποιούμε το H_n ή

$$\begin{aligned} H_n &= h \sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} I(t) dt = h \left[\int_0^{t_1} [I(0) - Z(t)] dt + \sum_{j=1}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} [Z(t_{j+1}) - Z(t)] dt \right] \\ &= h \left[I(0)t_1 - \int_0^{t_1} Z(t) dt + \sum_{j=1}^n \left[Z(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} Z(t) dt \right] \right] \\ &= h \left[\sum_{j=0}^n [Z(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j)] - \int_0^T Z(t) dt \right] \\ &= h \left[(t_1 - t_0)Z(t_1) + \dots + (t_j - t_{j-1})Z(t_j) + (t_{j+1} - t_j)Z(t_{j+1}) + \dots + (T - t_n)Z(T) - \int_0^T Z(t) dt \right] \end{aligned}$$

όπου έγινε αντικατάσταση των $Z(t_1) = I(0)$ και $T = t_{n+1}$. Η ποσότητα $\int_0^T Z(t) dt$ δεν

επηρεάζει την ελαχιστοποίηση. Η αναγκαία συνθήκη για ελάχιστο είναι

$$\frac{\partial H_n}{\partial t_j} = h \left[(t_j - t_{j-1}) \frac{dZ(t_j)}{dt_j} + Z(t_j) - Z(t_{j+1}) \right] = 0$$

$$\text{ή } Z(t_{j+1}) = Z(t_j) + (t_j - t_{j-1})D(t_j), \text{ για } j = 2, \dots, n$$

Έχουμε $n - 1$ εξισώσεις με αγνώστους $t_2, \dots, t_n$. Το t_1 προκύπτει λύνοντας την $I(0) = Z(t_1)$.

Επίσης $t_{n+1} = T$. Για $n = 2$ λύνουμε μία ακόμη εξίσωση. Για $n \geq 3$ λύνουμε ένα εν γένει μη γραμμικό σύστημα.

Υποθέτουμε ότι η H_n είναι κυρτή οπότε η λύση είναι ολικό ελάχιστο. Αφού υπολογισθούν τα t_j , ευρίσκουμε τα μεγέθη παραγγελιών

$$Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t) dt = Z(t_{j+1}) - Z(t_j).$$

Παράδειγμα

Τον επόμενο χρόνο η ζήτηση για κάποιο προϊόν θα έχει ρυθμό $D(t) = 1000 - 400t$, $0 \leq t \leq 1$ χρόνια. Το κόστος είναι 20/μονάδα και το σταθερό κόστος παραγγελίας 200 ανά παραγγελία. Το κόστος αποθέματος είναι 20% ετησίως και δεν επιτρέπονται

ανικανοποίητες παραγγελίες. Το αρχικό απόθεμα είναι 192 μονάδες. Δεν απαιτείται τελικό απόθεμα. Πόσο και πότε πρέπει να παραγγελθεί τον επόμενο χρόνο;

Έχουμε

$$Z(t) = \int_0^t D(\tau) d\tau = 1000t - 200t^2.$$

Η πρώτη παραγγελία φθάνει **πάντα** όταν το αρχικό απόθεμα εξαντλείται: $Z(t_1) = 192 \Rightarrow 1000t_1 - 200t_1^2 = 192 \Rightarrow$ επιλέγεται ρίζα τριωνύμου μέσα στο διάστημα $[0, 1]$ και προκύπτει

$$t_1 = 0.2.$$

Το κόστος αποθέματος είναι

$$H_n = h \sum_{j=0}^n (t_{j+1} - t_j) Z(t_{j+1}) - h \int_0^T Z(t) dt$$

όπου εδώ $h = iC = 0.2(20) = 4$. Εξετάζουμε διάφορες περιπτώσεις n :

$n = 1$ ($t_2 = 1$): Εδώ γίνεται μία μόνον παραγγελία την στιγμή 0.2. Το μέγεθός της είναι

$$Q_1 = Z(T) - I(0) = Z(1) - I(0) = 1000 - 200 - 192 = 608 \text{ μονάδες.}$$

Το κόστος αποθέματος είναι

$$\begin{aligned} H_1 &= 4(t_1 - t_0) Z(t_1) + 4(t_2 - t_1) Z(t_2) - 4 \int_0^1 (1000t - 200t^2) dt \\ &= 4(0.2)192 + 4(0.8)800 - 4[1000(1^2/2) - 200(1^3/3)] = 980.27 \end{aligned}$$

Τελικά

$$K_1 = A + H_1 + CZ(1) = 200 + 980.27 + CZ(1) = 1180.27 + CZ(1).$$

$n = 2$ ($t_3 = 1$): $t_1 = 0.2$ όπως ήδη βρήκαμε. Τώρα

$$\left. \begin{aligned} Z(t_3) &= Z(t_2) + (t_2 - t_1)D(t_2) \\ \text{αλλά } Z(t_3) &= Z(T) = 800 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 600t_2^2 - 2080t_2 + 1000 = 0$$

που έχει ρίζες 0.5767 και 2.8899. Κρατούμε την πρώτη που είναι στο $[0, 1]$ και

$$t_2 = 0.5767.$$

Οι ποσότητες παραγγελίας είναι

$$Q_1 = Z(0.5767) - Z(0.2) = 510.19 - 192 = 318.19$$

$$Q_2 = Z(1) - Z(0.5767) = 800 - 510.19 = 289.81$$

και τελικά

$$K_2 = 2A + H_2 + CZ(1) = 943.6 + CZ(1).$$

$n = 3$ ($t_4 = 1$): Έχουμε $t_1 = 0.2$ και

$$Z(t_3) = Z(t_2) + (t_2 - t_1)D(t_2)$$

$$Z(t_4) = 800 = Z(t_3) + (t_3 - t_2)D(t_3)$$

που είναι ένα σύστημα εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Η επίλυση γίνεται με κάποια αριθμητική μέθοδο (που είναι εκτός ύλης) από την οποία προκύπτουν:

$$t_2 = 0.4476, \quad t_3 = 0.7122$$

Η τιμή του t_2 διαφέρει από της περίπτωσης $n = 2$. Το ίδιο ισχύει για κάθε t_j εκτός του t_1 που είναι ίδιο λόγω του ότι το $I(0)$ είναι ίδιο για όλα τα n . Οι ποσότητες παραγγελίας είναι

$$Q_1 = Z(t_2) - Z(t_1) = Z(0.4776) - Z(0.2) = 407.51 - 192 = 215.51$$

$$Q_2 = Z(0.7122) - Z(0.4776) = 610.76 - 407.51 = 203.25$$

$$Q_3 = Z(1) - Z(0.7122) = 800 - 610.76 = 189.24.$$

Τελικά $K_3 = 991.3 + CZ(1)$.

Επιλέγουμε $n = 2$ ως τοπικό ελάχιστο από τις τρεις εναλλακτικές που δοκιμάσαμε. Αν η K_n είναι κυρτή ως προς n , τότε η $K_2 < K_3$ συνεπάγεται την $K_3 < K_4$ και εν γένει τις $K_n < K_{n+1}$. Αυτό είναι συνέπεια της *βασικής ιδιότητας* κυρτών συναρτήσεων που έχουμε αναφέρει στην Παράγραφο 2.3.1. Άρα αποκλείεται κάποιο $n \geq 4$ να δώσει μικρότερο κόστος από το τοπικό ελάχιστο K_2 . Δεν γνωρίζουμε, ωστόσο, αν η συνάρτηση K_n είναι κυρτή ως προς n .

2.6 Στατικά προβλήματα σχεδίασης παραγωγής

(Production planning)

Ένα σύστημα παραγωγής χρησιμοποιεί πόρους για να εκτελέσει επί μέρους κατεργασίες και να παραγάγει τελικά προϊόντα. Οι πόροι του του συστήματος περιλαμβάνουν ο,τιδήποτε πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή και εξαντλείται με τη χρήση του όπως:

- οι πρώτες ύλες
- οι διαθέσιμες ώρες απασχόλησης του ανθρώπινου δυναμικού σε διάφορα τμήματα της παραγωγικής διαδικασίας
- οι διαθέσιμες ώρες λειτουργίας του εξοπλισμού που απαιτείται για την παραγωγή.

Σχεδίαση παραγωγής (production planning) είναι ο προγραμματισμός της κατανάλωσης πόρων για κάποια χρονική περίοδο ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις παραγωγής με το μέγιστο δυνατό όφελος για την επιχείρηση. Στην παράγραφο αυτή εξετάζονται *στατικά* προβλήματα, όπου η ζήτηση προϊόντων και οι διαθέσιμοι πόροι είναι σταθεροί και γνωστοί.

Στην σχεδίαση παραγωγής μας ενδιαφέρει κυρίως το "πόσοι πόροι θα χρησιμοποιηθούν σε κάθε στάδιο παραγωγής προϊόντος και πόσα προϊόντα θα παραχθούν". Άλλα ερωτήματα όπως "ποιες ακριβώς χρονικές στιγμές ο κάθε πόρος θα διατίθεται στις επί μέρους εργασίες" θα τα συζητήσουμε αργότερα. Τέτοια προβλήματα είναι ο προσδιορισμός μεγέθους και προγραμματισμός παρτίδων (lot sizing and scheduling), τα οποία θα εξετάσουμε σε επόμενες παραγράφους ως ξεχωριστά προβλήματα, και τα προβλήματα προγραμματισμού παραγωγής (production scheduling) στο τελευταίο κεφάλαιο.

Για παράδειγμα, από την σχεδίαση παραγωγής προκύπτει ότι θα πρέπει να παραχθούν 150 κομμάτια προϊόντος Α και 340 προϊόντος Β το επόμενο έτος και για τον στόχο αυτόν κάποια μηχανή θα πρέπει να την λειτουργήσουμε 900 ώρες για το Α και 2000 για το Β σε ένα έτος. Η παραγωγή μπορεί να γίνει κατά παρτίδες αλλά με διάφορους τρόπους: μία φορά στην διάρκεια του έτους για κάθε προϊόν ή με συχνότερες εναλλαγές Α-Β-Α-Β- Ο προσδιορισμός μεγέθους και προγραμματισμός παρτίδων λύνει αυτό ακριβώς το πρόβλημα, καθορίζοντας με ποιο προϊόν θα πρέπει να απασχολείται η μηχανή κάθε ώρα στην διάρκεια του χρόνου ώστε τελικά να ικανοποιηθεί η απαίτηση 900/2000 ωρών ανά έτος με το μικρότερο δυνατό κόστος. Ο προγραμματισμός παραγωγής εξετάζει το ίδιο πρόβλημα αλλά για μοναδικά προϊόντα που δεν παράγονται κατά παρτίδες. Οι δύο προγραμματισμοί επίσης εξετάζουν περιπτώσεις όπου το πρόγραμμα παραγωγής πρέπει να αλλάξει λόγω απρόβλεπτων γεγονότων όπως βλάβη μηχανής ή άφιξη παραγγελίας από κάποιον εξαιρετικά σημαντικό πελάτη που δεν πρέπει να καθυστερήσει.

Στα πλαίσια της σχεδίασης παραγωγής θα ιδούμε στην συνέχεια τρία στατικά προβλήματα: βέλτιστη ανάμιξη πρώτων υλών, σχεδίαση παραγωγής προϊόντων, και σχεδίαση χρήσης πόρων στην διαδικασία παραγωγής.

2.6.1 Προβλήματα ανάμιξης

Διάφορα υλικά (πρώτες ύλες) αναμειγνύονται για την παραγωγή ενός προϊόντος όπως λίπασμα, κράμα κ.λπ. Ζητούμε την βέλτιστη αναλογία υλικών ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και να ικανοποιούνται ορισμένες προδιαγραφές.

Έστω:

X_k : ποσότητα υλικού k που χρησιμοποιείται για να παραχθεί μία μονάδα προϊόντος,
 $k = 1, \dots, K$

C_k : κόστος ανά μονάδα του υλικού k

a_{ik} : συμβολή μιας μονάδας του υλικού k στην προδιαγραφή i του προϊόντος

b_i : προδιαγραφή i

Z : κόστος ανά μονάδα προϊόντος

Ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τα X_k που ελαχιστοποιούν το

$$Z = \sum_{k=1}^K C_k X_k$$

υποκείμενο στους περιορισμούς:

$$\sum_{k=1}^K a_{ik} X_k \in \Delta(b_i) \text{ όπου } \Delta(b_i) \text{ είναι κάποια περιοχή που ορίζεται από τα } b_i$$

$$\sum_{k=1}^K X_k = 1, \text{ που σημαίνει ότι όλα τα } X_k \text{ παράγουν μία μονάδα του προϊόντος.}$$

Υποθέτουμε ότι τα υλικά k έχουν σταθερούς συντελεστές καθαρότητας $0 \leq d_k \leq 1$, όπου $d_k=1$ αντιστοιχεί σε απολύτως καθαρή πρώτη ύλη και $d_k=0$ σημαίνει εντελώς άχρηστη. Όταν απομακρυνθούν τυχόν άχρηστες προσμίξεις τότε κάθε πρώτη ύλη k συμβάλλει κατά $d_k \times 100\%$ στην παραγωγή και άρα, αντί του δεύτερου περιορισμού παραπάνω, έχουμε τον

$$\sum_{k=1}^K d_k X_k = 1.$$

Αυτό είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού και λύνεται, για παράδειγμα, με τον αλγόριθμο simplex.

Παράδειγμα

Μία βιομηχανία κραμάτων έχει μία παραγγελία κράματος που συνίσταται από 4 μέταλλα. Οι προδιαγραφές είναι: Μέταλλο Α τουλάχιστον 23%, Μέταλλο Β το πολύ 15%, Μέταλλο C το πολύ 4%, Μέταλλο D μεταξύ 35% και 65%. Ακαθαρσίες θα απομακρυνθούν κατά την επεξεργασία. Έξι ορυκτά είναι διαθέσιμα με τα εξής δεδομένα:

Ορυκτό	Μέταλλα: A%	B%	C%	D%	Ακαθαρσίες %	Κόστος/τόνο
1	25	10	10	25	30	23
2	40	0	0	30	30	20
3	20	10	0	30	40	18
4	0	15	5	20	60	10
5	20	20	0	40	20	27
6	8	5	10	17	60	12

Ποιες είναι οι ποσότητες κάθε ορυκτού;

Εδώ το κόστος είναι

$$\min Z = 23X_1 + 20X_2 + 18X_3 + 10X_4 + 27X_5 + 12X_6$$

Περιορισμοί:

$$0.25X_1 + 0.4X_2 + 0.2X_3 + 0.2X_5 + 0.08X_6 \geq 0.23$$

$$0.1X_1 + 0.1X_3 + 0.15X_4 + 0.2X_5 + 0.05X_6 \leq 0.15$$

$$0.1X_1 + 0.05X_4 + 0.1X_6 \leq 0.04$$

$$0.65 \geq 0.25X_1 + 0.3X_2 + 0.3X_3 + 0.2X_4 + 0.4X_5 + 0.17X_6 \geq 0.35$$

Ισολογισμός υλικών:

$$0.7X_1 + 0.7X_2 + 0.6X_3 + 0.4X_4 + 0.8X_5 + 0.4X_6 = 1$$

Λύση:

$$X_2^* = 0.9714, X_4^* = 0.8.$$

Οι υπόλοιπες ποσότητες είναι 0. Άρα αγοράζουμε 0.9714 τόνους ορυκτού 2 και 0.8 τόνους ορυκτού 4 για την παραγωγή 1 τόνου του κράματος και $Z^* = 27.43/\text{τόνο}$.

2.6.2 Σχεδίαση παραγωγής πολλών προϊόντων

Πρόκειται να παραχθούν N διαφορετικά προϊόντα καθένα από τα οποία χρειάζεται διάφορες κατεργασίες. Το πρόβλημα είναι ν' αποφασίσουμε πόσο θα παράγουμε από το κάθε προϊόν σε ορισμένη χρονική περίοδο ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό καθαρό κέρδος.

Ορίζουμε:

X_i : ποσότητα προϊόντος i , $i = 1, 2, \dots, N$

b_k : διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης ή πόρου k , $k = 1, 2, \dots, K$

a_{ik} : ποσότητα πρώτης ύλης ή πόρου k που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος i

U_i : μέγιστη δυνατή ζήτηση προϊόντος i

L_i : ελάχιστη στάθμη παραγωγής προϊόντος i

r_i : εισόδημα από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος i

C_i : κόστος ανά μονάδα παραγόμενου προϊόντος i .

Z : καθαρό συνολικό κέρδος

Ο σκοπός είναι να μεγιστοποιήσουμε το

$$Z = \sum_{i=1}^N (r_i - C_i) X_i$$

υποκείμενο στους περιορισμούς:

$$\text{πόρων } \sum_{i=1}^N a_{ik} X_i \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$\text{πωλήσεων } L_i \leq X_i \leq U_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Παράδειγμα: Σχεδίαση παραγωγής 4 προϊόντων

Μια βιομηχανία παράγει 4 προϊόντα με τις ακόλουθες απαιτήσεις:

	Χρόνοι παραγωγής (ώρες/μονάδα)				Ώρες παραγωγής διαθέσιμες τον μήνα
	1	2	3	4	
Έλαση	0.03	0.15	0.05	0.10	400
Διάτρηση	0.06	0.12	—	0.10	400
Συναρμολόγηση	0.05	0.10	0.05	0.12	600
Βάψιμο	0.04	0.20	0.04	0.12	400
Συσκευασία	0.02	0.06	0.02	0.05	400

Προϊόν	Τιμή πώλησης/μονάδα	Μεταβλητό κόστος/μονάδα	L κάθε μήνα	U κάθε μήνα
1	10	6	1000	6000
2	25	15	—	500
3	16	11	500	3000
4	20	14	100	1000

Αν τα X_i είναι οι μηνιαίοι όγκοι παραγωγής και πωλήσεων, τότε

$$Z = 4X_1 + 10X_2 + 5X_3 + 6X_4$$

i. Περιορισμοί στους διαθέσιμους χρόνους παραγωγής:

$$\text{Έλαση } 0.03X_1 + 0.15X_2 + 0.05X_3 + 0.1X_4 \leq 400$$

$$\text{Διάτρηση } 0.06X_1 + 0.12X_2 + 0.1X_4 \leq 400$$

$$\text{Συναρμολόγηση } 0.05X_1 + 0.1X_2 + 0.05X_3 + 0.12X_4 \leq 600$$

$$\text{Βάψιμο } 0.04X_1 + 0.2X_2 + 0.04X_3 + 0.12X_4 \leq 400$$

$$\text{Συσκευασία } 0.02X_1 + 0.06X_2 + 0.02X_3 + 0.05X_4 \leq 400$$

ii. Είναι γνωστό ότι απαιτούνται 2 m² ανά μονάδα κάποιου είδους λαμαρίνας για το προϊόν 2, και 1.2 m² ανά μονάδα για το προϊόν 4. Συνολικά υπάρχουν 2000 m² λαμαρίνας, άρα

$$2X_2 + 1.2X_4 \leq 2000$$

iii. Περιορισμοί πωλήσεων

$$1000 \leq X_1 \leq 6000$$

$$0 \leq X_2 \leq 500$$

$$500 \leq X_3 \leq 3000$$

$$100 \leq X_4 \leq 1000$$

Λύση γραμμικού προβλήματος:

$X_1^* = 6000$, $X_2^* = 140$, $X_3^* = 3000$, $X_4^* = 100$ και κέρδος $Z = 41000$.

2.6.3 Επιλογή διαδικασίας παραγωγής

(Process planning)

Αποτελεί τρόπον τινά συνέχεια του προηγούμενου. Σ' αυτήν την περίπτωση οι ποσότητες παραγόμενων προϊόντων είναι γνωστές. Κάθε προϊόν χρειάζεται διάφορες κατεργασίες και κάθε κατεργασία μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους: στο εργοστάσιο με κανονική βάρδια, στο εργοστάσιο με υπερωρία ή από υπεργολάβο. Κάθε εναλλακτικός τρόπος έχει τους δικούς του πόρους παραγωγής (μηχανήματα κ.λπ.) που μπορεί να είναι περιορισμένοι. Ένα προϊόν, μπορεί να παραχθεί με διαφορετικούς συνδυασμούς κατεργασιών. Κάθε τέτοιος συνδυασμός λέγεται *διαδικασία παραγωγής*.

Παράδειγμα

Ένα προϊόν χρειάζεται 2 κατεργασίες και κάθε κατεργασία μπορεί να γίνει με 3 τρόπους: κανονική βάρδια, υπερωρία, υπεργολαβία. Άρα διατίθενται οι ακόλουθες εναλλακτικές διαδικασίες παραγωγής:

(η πρώτη κατεργασία με κανονική βάρδια, η δεύτερη με κανονική βάρδια)

(η πρώτη κατεργασία με κανονική βάρδια, η δεύτερη με υπερωρία)

(η πρώτη κατεργασία με κανονική βάρδια, η δεύτερη από υπεργολάβο)

(η πρώτη κατεργασία με υπερωρία, η δεύτερη με κανονική βάρδια)

...

(η πρώτη κατεργασία από υπεργολάβο, η δεύτερη από υπεργολάβο)

Συνολικά υπάρχουν $J = 3^2 = 9$ εναλλακτικές διαδικασίες παραγωγής για το προϊόν.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι πόσο θα παράγουμε με κάθε διαδικασία ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος παραγωγής. Συμβολισμός:

X_{ij} : ποσότητα προϊόντος i που παράγεται με την διαδικασία j όπου $i = 1, 2, \dots, N$ και $j = 1, 2, \dots, J$

D_i : απαιτούμενη παραγωγή προϊόντος i στην περίοδο παραγωγής

b_k : διαθέσιμη ποσότητα πόρου k , $k = 1, \dots, K$

a_{ij}^k : μονάδες πόρου k που χρησιμοποιούνται στην παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος i με την διαδικασία j , $j = 1, \dots, J$

C_{ij} : κόστος ανά μονάδα προϊόντος i που παράγεται με την διαδικασία j

Z : συνολικό κόστος παραγωγής

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως

$$\min_{\{X_{ij}\}} Z = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J C_{ij} X_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^J X_{ij} = D_i, \forall i$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J a_{ij}^k X_{ij} \leq b_k, \forall k$$

$$X_{ij} \geq 0, \forall i, j.$$

Παράδειγμα

Στο παράδειγμα της σχεδίασης της παραγωγής τεσσάρων προϊόντων που είδαμε στην Παράγραφο 2.6.2 οι βέλτιστες μηνιαίες ποσότητες παραγωγής βρέθηκαν $X_1^* = 6000$, $X_2^* = 140$, $X_3^* = 3000$, $X_4^* = 100$. Το σύστημα λειτούργησε έτσι για κάποιο χρόνο και τώρα χρειάζεται να ικανοποιήσει ζήτηση 20% μεγαλύτερη για κάθε προϊόν. Οι νέες απαιτήσεις είναι: $D_1 = 6000(1.2) = 7200$, $D_2 = 168$, $D_3 = 3600$, $D_4 = 120$. Οι ρυθμοί παραγωγής σε ώρες/μονάδα είναι όπως στο παράδειγμα της 2.6.2.

Με τέτοιους όγκους παραγωγής παραβιάζονται οι περιορισμοί χρόνων έλασης, διάτρησης και βαψίματος. Η επιχείρηση εισάγει νέες διαδικασίες παραγωγής για ν' αντιμετωπίσει τις νέες απαιτήσεις. Η έλαση και η διάτρηση μπορούν να δοθούν σε υπερβολάβους με συνακόλουθη αύξηση του συνολικού κόστους παραγωγής κατά 20%. Ο βιομήχανος μπορεί να δουλέψει το τμήμα βαφής σε υπερωρία 100 ωρών/μήνα. Αυτό επαυξάνει το κόστος των προϊόντων 1 και 3 κατά 0.2 ανά μονάδα, του προϊόντος 2 κατά 0.4 και του προϊόντος 4 κατά 0.3.

Συνεχίζει να υφίσταται ο περιορισμός 2000 m² λαμαρίνας για τα προϊόντα 2 και 4 για την εσωτερική έλαση και διάτρηση.

Ο βιομήχανος έχει 4 επιλογές-διαδικασίες παραγωγής:

1. Εσωτερική έλαση-διάτρηση, βάψιμο χωρίς υπερωρία
2. Εσωτερική έλαση-διάτρηση, βάψιμο με υπερωρία

3. Υπεργολαβία για έλαση-διάτρηση, βάψιμο χωρίς υπερωρία

4. Υπεργολαβία για έλαση-διάτρηση, βάψιμο με υπερωρία

Στους ανωτέρω συνδυασμούς περιλαμβάνονται και η συναρμολόγηση και η συσκευασία αλλά είναι πάντα εσωτερικές κατεργασίες χωρίς παραλλαγές και για συντομία δεν τις αναφέραμε. Ζητούνται οι ποσότητες X_{ij} που θα παράγονται με κάθε διαδικασία $j = 1, 2, 3, 4$ ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος ανά μήνα.

Από τα δεδομένα κόστους που αναφέρθηκαν προηγουμένως και τον πίνακα κόστους του παραδείγματος στην Παράγραφο 2.6.2, το κόστος ανά μονάδα προϊόντος $i = 1$ είναι:

$$X_{11} \rightarrow C_{11} = 6$$

$$X_{12} \rightarrow C_{12} = 6 + 0.2 = 6.2$$

$$X_{13} \rightarrow C_{13} = 6 + 20\% \times 6 = 7.2$$

$$X_{14} \rightarrow C_{14} = 7.2 + 0.2 = 7.4.$$

Παρόμοια $C_{21} = 15, C_{22} = 15.4, \dots, C_{44} = 14 + 20\% \times 14 + 0.3 = 17.1$.

Ελαχιστοποιούμε το

$$Z = 6X_{11} + 6.2X_{12} + 7.2X_{13} + 7.4X_{14} + 15X_{21} + 15.4X_{22} + 18X_{23} + 18.4X_{24} + 11X_{31} \\ + 11.2X_{32} + 13.2X_{33} + 13.4X_{34} + 14X_{41} + 14.1X_{42} + 16.8X_{43} + 17.1X_{44}$$

υποκείμενο στους περιορισμούς:

i. Ωράριο εργοστασίου:

$$\text{Εσωτερική έλαση: } \sum_{j=1}^2 (0.03X_{1j} + 0.15X_{2j} + 0.05X_{3j} + 0.1X_{4j}) \leq 400$$

$$\text{Εσωτερική διάτρηση: } \sum_{j=1}^2 (0.06X_{1j} + 0.12X_{2j} + 0.1X_{4j}) \leq 400$$

$$\text{Συναρμολόγηση: } \sum_{j=1}^4 (0.05X_{1j} + 0.1X_{2j} + 0.05X_{3j} + 0.12X_{4j}) \leq 600.$$

Βάψιμο χωρίς υπερωρία (επιλογές 1 και 3):

$$0.04(X_{11} + X_{13}) + 0.2(X_{21} + X_{23}) + 0.04(X_{31} + X_{33}) + 0.12(X_{41} + X_{43}) \leq 400$$

$$\text{Συσκευασία: } \sum_{j=1}^4 (0.02X_{1j} + 0.06X_{2j} + 0.02X_{3j} + 0.05X_{4j}) \leq 400.$$

ii. Βάψιμο με υπερωρία (επιλογές 2 και 4):

$$0.04(X_{12} + X_{14}) + 0.2(X_{22} + X_{24}) + 0.04(X_{32} + X_{34}) + 0.12(X_{42} + X_{44}) \leq 100$$

αφού μόνο οι επιλογές 2 και 4 έχουν υπερωρία.

iii. Επιφάνεια λαμαρίνας (για τα προϊόντα 2 και 4 και για τις επιλογές 1 και 2):

$$2(X_{21} + X_{22}) + 1.2(X_{41} + X_{42}) \leq 2000.$$

iv. Περιορισμοί ποσοτήτων:

$$\sum_{j=1}^4 X_{1j} = 7200, \sum_{j=1}^4 X_{2j} = 168, \sum_{j=1}^4 X_{3j} = 3600, \sum_{j=1}^4 x_{4j} = 120.$$

Λύση του γραμμικού προβλήματος:

$$X_{11}^* = 5355.6, X_{12}^* = 800, X_{13}^* = 1044.4, X_{14}^* = 0$$

$$X_{21}^* = 0, X_{22}^* = 155.6, X_{23}^* = 0, X_{24}^* = 12.4$$

$$X_{31}^* = 3600, X_{32}^* = 0, X_{33}^* = 0, X_{34}^* = 0$$

$$X_{41}^* = 0, X_{42}^* = 120, X_{43}^* = 0, X_{44}^* = 0$$

και $Z^* = 88530$.

2.7 Στοχαστική ζήτηση

Στο πρόβλημα της σχεδίασης παραγωγής της Παραγράφου 2.6.2 υποθέσαμε ότι υπάρχουν άνω και κάτω όρια U_i και L_i για την παραγόμενη ποσότητα X_i σε κάποιο χρονικό ορίζοντα. Όταν η ζήτηση D_i είναι τυχαία, είναι ορθότερο να διατυπώνουμε τέτοιους περιορισμούς με πιθανότητες. Ζητούμε:

- Την τιμή U_i για την οποία $P(D_i < U_i) = a_i$, οπότε αν παράγουμε ποσότητα U_i ή λιγότερη τότε η πιθανότητα αδιάθετου προϊόντος (περισσεύματος) είναι *το πολύ* a_i .
- Την τιμή L_i για την οποία $P(D_i > L_i) = b_i$, οπότε αν παράγουμε L_i ή περισσότερα τότε η πιθανότητα έλλειψης θα είναι *το πολύ* b_i .

Έστω F_i η συνάρτηση κατανομής και f_i η πυκνότητα πιθανότητας της D_i . Τότε

$$F_i(y) = P(D_i \leq y) = \int_0^y f_i(x) dx.$$

Οι δύο πιθανότητες γράφονται:

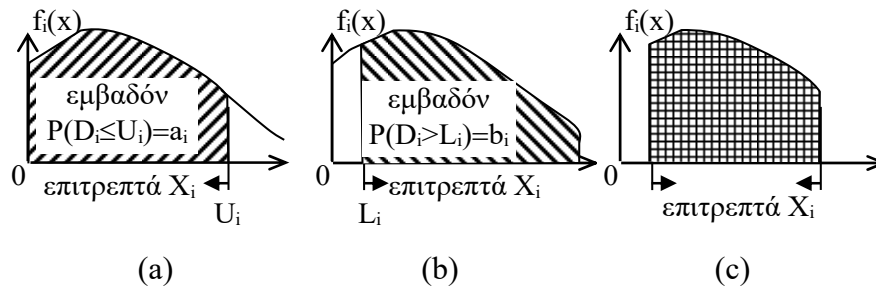
$$P(D_i < U_i) = a_i \Rightarrow F_i(U_i) - P(D_i = U_i) = a_i$$

$$P(D_i > L_i) = b_i \Rightarrow F_i(L_i) = 1 - b_i.$$

Αν η ζήτηση είναι διακριτή με πιθανότητες $P(D_i)$, τότε εν γένει $P(D_i = U_i) \neq 0$. Όταν είναι συνεχής, τότε $P(D_i = U_i) = 0$ και η πρώτη συνθήκη απλουστεύεται:

$$F_i(U_i) = a_i.$$

Αν τα a_i και b_i και η συνάρτηση κατανομής F_i είναι γνωστά, τότε μπορούμε να εύρουμε τα όρια U_i και L_i μέσα στα οποία πρέπει είναι η ποσότητα παραγωγής X_i ώστε να έχουμε αποδεκτά επίπεδα κινδύνων έλλειψης και περίσσειας. Σχηματικά έχουμε:



Θα πρέπει τα L_i και U_i να ικανοποιούν την σχέση $L_i < U_i$ ώστε το $[L_i, U_i]$ να αντιστοιχεί σε διάστημα τιμών. Επειδή η F είναι αύξουσα, πρέπει $F_i(L_i) < F_i(U_i)$ ή $1 - b_i < a_i$. Δηλαδή τα όρια κινδύνου περισσέυματος και κινδύνου έλλειψης που θέτουμε δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρά και μάλιστα πρέπει $a_i + b_i > 1$.

Παράδειγμα

Έστω $a = 0.9$ και η ζήτηση ενός προϊόντος προσεγγίζεται από κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 1000$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 100$ ή $N(\mu, \sigma^2)$. Τότε

$$P(D \leq U) = F(U) = \int_0^U f(x) dx = 0.9.$$

Όμως η κανονική κατανομή δεν έχει αλγεβρικό τύπο για την F . Υπάρχουν μόνο πίνακες της λεγόμενης *τυποποιημένης κανονικής κατανομής* $N(0, 1)$. Είναι γνωστό ότι η τυχαία μεταβλητή

$$Z \triangleq \frac{D - \mu}{\sigma}$$

έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1 και αν επί πλέον η D είναι $N(\mu, \sigma^2)$ τότε η Z είναι $N(0, 1)$. Προφανώς αν δύο ενδεχόμενα είναι ισοδύναμα, συμβαίνουν δηλαδή πάντοτε συγχρόνως, τότε έχουν ίδιες πιθανότητες. Συνεπώς

$$P(D \leq U) = P\left(\frac{D - \mu}{\sigma} \leq \frac{U - \mu}{\sigma}\right) = 0.9$$

και άρα αντί για το U μπορούμε να εύρουμε το σημείο

$$\frac{U - \mu}{\sigma}$$

της κατανομής που έχει προς τα αριστερά του μάζα πιθανότητας ίση με 0.9 ή, ισοδύναμα, έχει προς τα δεξιά του μάζα πιθανότητας ίση με 0.1. Ο πίνακας της $N(0, 1)$ του Παραρτήματος Β δίνει αντιστοιχίες σημείων με τέτοιες πιθανότητες. Διαβάζουμε λοιπόν από εκεί (βλ. και το Παράδειγμα 1 στο Παράρτημα Β)

$$P\left(Z > \frac{U - \mu}{\sigma}\right) = 0.1 = P(Z > 1.28) \Rightarrow \frac{U - \mu}{\sigma} = 1.28$$

$$\Rightarrow U = 1000 + 1.28(100) = 1128.$$

Παρατήρηση: Η κανονική κατανομή δέχεται αρνητικές τιμές αλλά η ζήτηση όχι. Για να είναι καλή η προσέγγιση της ζήτησης με $N(\mu, \sigma^2)$ πρέπει οι πιθανότητες αρνητικών τιμών να είναι σχεδόν 0 δηλαδή

$$P(D \leq 0) = P\left(\frac{D - \mu}{\sigma} \leq \frac{0 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq -\frac{\mu}{\sigma}\right) \approx 0.$$

Αυτό ισχύει όταν η μέση τιμή είναι μεγάλη σε σχέση με την διασπορά και μάλιστα $\mu > 3\sigma$. Πράγματι, για $\mu = 3\sigma$ έχουμε $P(D \leq 0) = P(Z \leq -3) = 0.0013$, όπως προκύπτει από τον πίνακα της Z στο Παράρτημα Β, ενώ για μεγαλύτερα $\mu > 3\sigma$ έχουμε ακόμη *μικρότερες πιθανότητες αρνητικών τιμών*.

2.8 Διανυσματική βελτιστοποίηση με περιορισμούς

(Constrained optimization)

Επιστρέφουμε στον έλεγχο αποθεμάτων όμως τώρα εξετάζουμε πολλά είδη προϊόντων με διαφορετικές ποσότητες παραγγελιών οι οποίες πρέπει να πληρούν ορισμένους περιορισμούς. Για παράδειγμα, θα πρέπει η παραγγελία όλων των προϊόντων να μην υπερβαίνει κάποιο συνολικό κόστος ή να χωρά σε ένα φορτηγό και όχι περισσότερο. Έχουμε τότε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς.

Έστω ότι ελέγχουμε τα αποθέματα n προϊόντων, $i = 1, 2, \dots, n$, εφαρμόζοντας κάποια πολιτική αναπλήρωσης. Για απλούστευση στην παρουσίαση, υποθέστε ότι η πολιτική καθορίζεται από μία παράμετρο ανά προϊόν που συμβολίζουμε x_i . Συμβολίζουμε

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

το διάνυσμα-στήλη ή συνδυασμό παραμέτρων x_i της πολιτικής αποθεμάτων που πρέπει να καθορίσουμε και

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

την συνάρτηση κόστους. Το πρόβλημα είναι η εύρεση του x που ελαχιστοποιεί το κόστος $f(x)$ υπό κάποιους περιορισμούς.

Στην Παράγραφο 2.3 εξετάσαμε προβλήματα χωρίς περιορισμούς, δηλαδή τα x είναι ελεύθερα σημεία στον n -διάστατο χώρο R^n (R είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών). Στην συνέχεια παραθέτουμε ορισμούς και θεωρήματα για την επίλυση προβλημάτων χωρίς περιορισμούς και προχωρούμε σε προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς.

Ορισμοί: 1) Η *Ευκλείδεια απόσταση* δύο σημείων $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, \dots, y_n)$ ορίζεται

$$|x - y| = |y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

2) Για ορισμένο αριθμό $\varepsilon > 0$ και σημείο y , η *γειτονιά ακτίνας ε* γύρω από το y είναι το σύνολο με τα σημεία x που απέχουν $|x - y| \leq \varepsilon$ από το y . Συχνά η γειτονιά αναφέρεται και ως σφαίρα.

Η γειτονιά ακτίνας ε γύρω από το ένα σημείο y στο επίπεδο αποτελείται από τα σημεία του δίσκου που ορίζει ο κύκλος με κέντρο y και ακτίνα ε . Η γειτονιά γύρω από σημείο y μίας ευθείας είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $y - \varepsilon$ και $y + \varepsilon$ επάνω στην ευθεία.

Ορισμός: Ένα σημείο $x^* \in R^n$ είναι *τοπικό ελάχιστο* της f αν υπάρχει γειτονιά σημείων γύρω από το x^* στην οποία η τιμή $f(x^*)$ είναι η ελάχιστη. Συμβολικά $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x: |x - x^*| < \varepsilon$.

Ορισμός: Το $x^* \in R^n$ λέγεται *απόλυτο ή ολικό ελάχιστο* της f αν $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in R^n$.

Υποθέτουμε στο εξής ότι η συνάρτηση f έχει *συνεχείς μερικές παραγώγους* πρώτης και δεύτερης τάξης και μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor.

Ορισμός: *Βαθμίδα ή κλίση* της συνάρτησης $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι το διάνυσμα με στοιχεία τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της f :

$$\nabla f(x) \triangleq \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Για την απλούστεση τύπων που θα ακολουθήσουν υποθέτουμε ότι η κλίση είναι διάνυσμα γραμμής, ενώ στην συνήθη βιβλιογραφία αναφέρεται ως στήλη.

Θεώρημα: Αν το $x^* \in \mathbb{R}^n$ είναι εσωτερικό σημείο (δηλαδή κανένα στοιχείο x_i^* δεν τείνει στο $\pm\infty$) και ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο) της f , τότε

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} = 0. \quad (2.15)$$

Απόδειξη: Βολεύει ο συμβολισμός με διανύσματα. Έστω ότι το διάνυσμα $x^* = [x_1^* \dots x_n^*]^T$ είναι τοπικό ελάχιστο, δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $f(x^*) \leq f(x)$ για κάθε $x = [x_1 \dots x_n]^T$ που είναι στην γειτονιά $|x - x^*| < \varepsilon$. Με ανάπτυγμα Taylor, η $f(x)$ στα σημεία αυτά γράφεται

$$f(x) = f(x^*) + \nabla f(x^*) (x - x^*) + o(|x - x^*|)$$

όπου

$$x - x^* = [(x_1 - x_1^*) \dots (x_n - x_n^*)]^T$$

και $\nabla f(x^*) (x - x^*)$ είναι γινόμενο γραμμής επί στήλης, δηλαδή βαθμωτό μέγεθος. Επίσης το $o(|x - x^*|)$ είναι κάποια συνάρτηση που ανήκει στην οικογένεια "μικρό ο" με ιδιότητα

$$\lim_{|x - x^*| \rightarrow 0} \frac{o(|x - x^*|)}{|x - x^*|} = 0.$$

Θυμηθείτε ότι επιλέξαμε το x στην γειτονιά του x^* που ικανοποιεί την $f(x) - f(x^*) \geq 0$ ή

$$\nabla f(x^*) (x - x^*) + o(|x - x^*|) \geq 0.$$

Διαιρώντας κάθε μέλος της ανισότητας με $|x - x^*|$ (που είναι θετικός αριθμός, άρα διατηρεί το $\geq$) και παίρνοντας όριο καθώς $x \rightarrow x^*$ ή $|x - x^*| \rightarrow 0$ προκύπτει η

$$\nabla f(x^*) \lim_{|x - x^*| \rightarrow 0} \frac{x - x^*}{|x - x^*|} \geq 0.$$

Τώρα αντί των x θεωρούμε τα σημεία $(2x^* - x)$, που είναι επίσης στην ίδια γειτονιά του x^* αφού $|(2x^* - x) - x^*| = |x^* - x| < \varepsilon$. Παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor της $f(2x^* - x)$ γύρω από το $f(x^*)$ και επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα καταλήγουμε στην

$$\nabla f(x^*) \lim_{|x - x^*| \rightarrow 0} \frac{x^* - x}{|x - x^*|} = -\nabla f(x^*) \lim_{|x - x^*| \rightarrow 0} \frac{x - x^*}{|x - x^*|} \geq 0$$

που είναι αντίθετη της προηγούμενης λόγω του ότι $x^* - x = -(x - x^*)$. Η μόνη περίπτωση ώστε να ισχύουν οι δύο συνθήκες συγχρόνως για $x \rightarrow x^*$ (αλλά, ωστόσο, $x \neq x^*$) είναι το διάνυσμα $\nabla f(x^*)$ να έχει όλα τα στοιχεία του 0, άρα να ισχύει η (2.15).

Αν το x^* είναι τοπικό μέγιστο, τότε οι δύο συνθήκες αλλάζουν πρόσημα και πάλι προκύπτει η (2.15). Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος.

Τα σημεία x^* για τα οποία $\nabla f(x^*) = 0$ λέγονται και *στάσιμα σημεία* της συνάρτησης f . Στα θεωρήματα που ακολουθούν παραλείπονται οι αποδείξεις.

Θεώρημα: Αν $\nabla f(x^*) = 0$ και η f είναι κυρτή (κοίλη) στο x^* τότε το x^* είναι τοπικό ελάχιστο (τοπικό μέγιστο). Αν επί πλέον η f είναι κυρτή (κοίλη) σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ τότε το x^* είναι ολικό ελάχιστο (ολικό μέγιστο).

Ορισμός: Ο πίνακας Hess της $f(x)$ στο σημείο $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι ο πίνακας $n \times n$ με στοιχεία τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της f :

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται θετικά ημιορισμένος αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι ≥ 0 και αρνητικά ημιορισμένος αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι ≤ 0 .

Θεώρημα: Ο πίνακας $H(x)$ της f είναι θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος στο σημείο x αν και μόνο αν η f είναι κυρτή (κοίλη) συνάρτηση στο σημείο αυτό.

Θεώρημα: Αν $\nabla f(x^*) = 0$ και ο $H(x^*)$ είναι θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος στο x^* , τότε το x^* είναι τοπικό ελάχιστο (τοπικό μέγιστο). Αν ο $H(x)$ είναι θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος για κάθε x , τότε το x^* είναι ολικό ελάχιστο (ολικό μέγιστο).

2.8.1 Περιορισμοί ισότητας

Τώρα εξετάζουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της $f(x)$ με τους περιορισμούς

$$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_m(x) = 0. \quad (2.16)$$

τους οποίους για συντομία περιγράφουμε

$$x \in \mathbf{D}$$

όπου το σύνολο $\mathbf{D}$ απαρτίζεται από όλα τα σημεία x που ικανοποιούν τις Εξ. (2.16).

Ορισμοί: Ένα σημείο x^* είναι *τοπικό ελάχιστο* της f υποκείμενης στους περιορισμούς (2.16) αν

(i) $x^* \in \mathbf{D}$ και

(ii) υπάρχει γειτονιά γύρω από το x^* τέτοια ώστε, για κάθε σημείο της, x , που ικανοποιεί τους (2.16), ισχύει ότι

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Αν η (ii) ισχύει για κάθε $x \in \mathbf{D}$, τότε το x^* είναι ολικό ελάχιστο της f επάνω στο σύνολο $\mathbf{D}$.

Αν ένα τοπικό ακρότατο x^* πρέπει να ικανοποιεί και περιορισμούς τότε μπορεί $\nabla f(x^*) \neq 0$. Ένας περιορισμός λέμε ότι δεν είναι δεσμευτικός όταν ικανοποιείται από την $\nabla f(x^*) = 0$ χωρίς να τον επιβάλουμε. Για παράδειγμα, στο Μοντέλο IV ο περιορισμός $Q \geq 0$ δεν είναι δεσμευτικός αφού η λύση $Q^* = (2AD/h)^{0.5}$ της εξίσωσης $\nabla K(Q^*) = 0$ προφανώς είναι ≥ 0 . Όμως στις εκπτώσεις ποσοτήτων είδαμε ότι κάποιες λύσεις Q_j^* δεν ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς $Q_j \geq N_j$ και επειδή οι συναρτήσεις κόστους ήταν κυρτές, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι τιμές $Q_j = N_j$ ήταν τα ολικά ελάχιστα.

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης με περιορισμούς ισότητας (2.16). Αφού εν γένει $\nabla f(x^*) \neq 0$, πώς μπορούμε να το λύσουμε; Ένας τρόπος είναι να λύσουμε όλες τις (2.16) ως προς μερικές μεταβλητές, να τις αντικαταστήσουμε στην f και να ελαχιστοποιήσουμε την f ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές. Θα δούμε λίγο μετά ένα παράδειγμα. Ένας άλλος τρόπος βασίζεται στο ακόλουθο:

Θεώρημα: Αν η f υποκείμενη στους m περιορισμούς (2.16) έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο x^* ($x^* \in \mathbf{D}$) και οι f και $g_1, \dots, g_j, \dots, g_m$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ που λέγονται *πολλαπλασιαστές Lagrange*, τέτοιοι ώστε τα $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ και $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ είναι λύσεις του ακόλουθου συστήματος $n + m$ εξισώσεων:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_j(x) = 0, \text{ για κάθε } j = 1, \dots, m.$$

Αν επί πλέον οι συναρτήσεις f και $g_1, \dots, g_j, \dots, g_m$ είναι κυρτές, τότε η λύση του συστήματος εξισώσεων προβλήματος είναι ολικό ελάχιστο της f υπό τους περιορισμούς (2.16).

Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι αν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την f ως προς το διάνυσμα x υπό περιορισμούς, ελαχιστοποιούμε την λεγόμενη *επαυξημένη συνάρτηση*

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \triangleq f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$$

ως προς τα διανύσματα x και λ χωρίς περιορισμούς εφαρμόζοντας την συνθήκη $\nabla L = 0$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n,$$

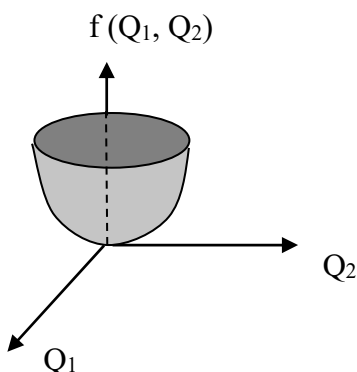
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 \Rightarrow g_j(x) = 0, \text{ για κάθε } j = 1, 2, \dots, m.$$

Παρατηρήστε ότι ο μηδενισμός των $\partial L / \partial \lambda_j$ είναι ισοδύναμος με τον περιορισμό $g_j(x)$.

Για μεγιστοποίηση της f υπό περιορισμούς, ελαχιστοποιούμε την $-f$ υπό τους ίδιους περιορισμούς. Η f πρέπει να είναι κοίλη συνάρτηση, ώστε η $-f$ να είναι κυρτή και να ικανοποιείται η συνθήκη ελαχίστου στο προηγούμενο θεώρημα.

Παράδειγμα

Θα ελαχιστοποιήσουμε την $f = Q_1^2 + Q_2^2$ υπό τον περιορισμό $Q_1 + Q_2 = 5$ με δύο τρόπους. Η f είναι κυρτή συνάρτηση των Q_1, Q_2 :



Αν οι Q_1 και Q_2 ήταν ανεξάρτητες τότε το ακρότατο θα ήταν τέτοιο ώστε $\nabla f = 0$, άρα

$$\frac{\partial f}{\partial Q_1} = \frac{\partial f}{\partial Q_2} = 0 \Rightarrow Q_1 = 0, Q_2 = 0.$$

Εν τούτοις έχουμε τον περιορισμό $Q_2 = 5 - Q_1$ και $f = Q_1^2 + (5 - Q_1)^2$. Προκύπτει συνάρτηση μίας μεταβλητής με συνθήκη ακροτάτου

$$\frac{df}{dQ_1} = 0 \Rightarrow 2Q_1 - 2(5 - Q_1) = 0$$

$$\Rightarrow Q_1 = 2.5 \text{ και } Q_2 = 5 - 2.5 = 2.5.$$

Τώρα λύνουμε το ίδιο πρόβλημα με την μέθοδο Lagrange. Η επαυξημένη συνάρτηση είναι

$$L = Q_1^2 + Q_2^2 + \lambda(Q_1 + Q_2 - 5).$$

Παρατηρήστε ότι όσα σημεία (Q_1, Q_2) ικανοποιούν τον περιορισμό $Q_1 + Q_2 = 5$

ικανοποιούν και την $L(Q_1, Q_2, \lambda) = f(Q_1, Q_2)$ για οποιοδήποτε λ . Οι συνθήκες ακροτάτου είναι $\nabla L = 0$ ή

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = \frac{\partial L}{\partial Q_2} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

και λύνονται ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} 2Q_1 + \lambda = 0 \\ 2Q_2 + \lambda = 0 \\ Q_1 + Q_2 - 5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1 = Q_2 = 2.5 \text{ και } \lambda = -5.$$

2.8.2 Περιορισμοί ανισότητας

Συχνά εκτός από τους περιορισμούς ισότητας $g_i(x) = 0$ πρέπει να τηρηθούν και ανισότητες $g_k(x) \leq 0$. Για παράδειγμα τα Q_j και b_j πρέπει να είναι ≥ 0 ή ότι ο αριθμός παραγγελιών ανά έτος να μην ξεπερνά ένα άνω όριο ή το ετήσιο κόστος προμήθειας να μην υπερβαίνει το διαθέσιμο κεφάλαιο, κοκ.

Αλλάζουμε, όπου χρειάζεται, τους περιορισμούς ανισότητας ώστε **όλοι να έχουν φορά** $g_k(x) \leq 0$. Ελέγχουμε αν οι $g_k(x)$ είναι κυρτές συναρτήσεις¹ και τότε μία άμεση διαδικασία επίλυσης προβλημάτων είναι η ακόλουθη:

- A.** Λύνουμε το πρόβλημα μόνο με τις ισότητες, αγνοώντας τις ανισότητες.
- B.** Αν υπάρχει λύση και συμβαίνει να ικανοποιεί και τις ανισότητες, τότε καταγράφεται ως **εφικτή λύση**.
- Γ.** Αν η λύση παραβιάζει **κάποιες** ανισότητες, τότε **από κάθε τέτοια**, έστω $g_k(x) \leq 0$, δημιουργούμε **ένα νέο πρόβλημα** όπου την **θεωρούμε ως ισότητα** $g_k(x) = 0$ (άρα αν παραβιάζονται πολλές, τότε δημιουργούμε πολλά νέα προβλήματα).
- Δ.** Επαναλαμβάνουμε τα A, B, Γ για κάθε νέο πρόβλημα. Στο τέλος επιλέγουμε την **καλύτερη εφικτή λύση**, εκείνη δηλαδή που βελτιστοποιεί την $f(x)$.

Τα βήματα Γ και Δ του αλγορίθμου μπορεί να οδηγήσουν σε δένδρα προβλημάτων A από τα οποία διαλέγουμε τελικά την καλύτερη λύση. Επίσης όταν δεν υπάρχει λύση στο βήμα B ακόμη και αγνοώντας τις ανισότητες, τότε δοκιμάζουμε κάποιο $x_i = 0$ και λύνουμε ένα ακόμη **νέο πρόβλημα**. Οι εφαρμογές στο μάθημα αυτό δεν οδηγούν σε

¹ Οι περιορισμοί $x_i \geq 0$ γράφονται $-x_i \leq 0$ και είναι **οριακά** κυρτοί γιατί η δεύτερη παράγωγος της $-x$ είναι 0 (για τον ίδιο λόγο είναι και οριακά κοίλοι).

δένδρα προβλημάτων αλλά μόνο σε ένα ή δύο το πολύ νέα προβλήματα.

Ακολουθούν δύο εφαρμογές της βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς σε προβλήματα με στοχαστική ζήτηση και με παραγωγή πολλών προϊόντων κατά παρτίδες .

2.9 Μοντέλο στοχαστικής ζήτησης με μία αναπλήρωση

(Single-period stochastic model)

Μια επιχείρηση διαθέτει έναν προϋπολογισμό B για την προμήθεια N ειδών. Ορίζουμε

X_i : το μέγεθος της προμήθειας προϊόντος i , $i = 1, \dots, N$

C_i : μοναδιαίο κόστος αγοράς

r_i : μοναδιαία τιμή πώλησης κατά την διάρκεια της εποχής πώλησης

r_i' : μοναδιαία τιμή πώλησης εκτός εποχής (π.χ., ληγμένο γάλα που αποσύρεται)

D_i : ζήτηση του i κατά την διάρκεια της εποχής πώλησης

Υποθέτουμε ότι συμφέρει να πωλούμε κατά τη διάρκεια της εποχής πώλησης:

$$r_i > r_i'.$$

Η ποσότητα του είδους i που πωλείται εντός εποχής είναι

$$\Phi_i = \min(X_i, D_i)$$

και αποσύρεται η υπόλοιπη ποσότητα, $X_i - \Phi_i$. Η συνάρτηση κέρδους είναι:

$$Z = \sum_{i=1}^N [r_i \Phi_i + r_i' (X_i - \Phi_i) - C_i X_i]$$

που έχει μέση τιμή

$$E(Z) = \sum_{i=1}^N [(r_i - r_i') E(\Phi_i) + (r_i' - C_i) X_i].$$

Όταν η ζήτηση παίρνει διακριτές τιμές $x = 0, 1, 2, \dots$ με πιθανότητες $p_i(x)$ και $F_i(x) = p_i(0) + p_i(1) + \dots + p_i(x)$, τότε

$$E(\Phi_i) = \sum_{x=0}^{X_i} x p_i(x) + X_i \sum_{x=X_i+1}^{\infty} p_i(x).$$

Αν η ζήτηση είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[0, \infty)$ με συνάρτηση κατανομής $F_i(x)$ και πυκνότητα $f_i(x) = dF_i(x)/dx$, τότε

$$\begin{aligned} E(\Phi_i) &= \int_0^{X_i} x f_i(x) dx + X_i \int_{X_i}^{\infty} f_i(x) dx = \int_0^{X_i} x dF_i(x) + X_i [1 - F_i(X_i)] \\ &= x F_i(x) \Big|_0^{X_i} - \int_0^{X_i} F_i(x) dx + X_i [1 - F_i(X_i)] = X_i - \int_0^{X_i} F_i(x) dx. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε την περίπτωση συνεχούς ζήτησης. Το πρόβλημα είναι η μεγιστοποίηση του

$E(Z)$ υποκείμενου στον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^N C_i X_i = B.$$

Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange μεγιστοποιούμε την επαυξημένη συνάρτηση

$$L(X_1, \dots, X_N, \lambda) = E(Z) + \lambda \left(\sum_{i=1}^N C_i X_i - B \right).$$

Εδώ έχουμε μόνον έναν περιορισμό, άρα έναν πολλαπλασιαστή λ . Με αντικατάσταση της έκφρασης $E(\Phi_i)$ που βρήκαμε πριν προκύπτει

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \left[(r_i - r'_i) X_i - (r_i - r'_i) \int_0^{X_i} F_i(x) dx + (r'_i - C_i) X_i \right] + \lambda \left(\sum_{i=1}^N C_i X_i - B \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[(r_i - C_i) X_i - (r_i - r'_i) \int_0^{X_i} F_i(x) dx \right] + \lambda \left(\sum_{i=1}^N C_i X_i - B \right). \end{aligned}$$

Αναγκαία συνθήκη για ακρότατο στο X_i είναι $\partial L / \partial X_i = 0$. Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού λέει ότι, για δύο συναρτήσεις F και G ,

$$\text{όταν } \frac{dG(t)}{dt} = F(t) \Leftrightarrow G(t) - G(0) = \int_0^t F(\tau) d\tau.$$

Επομένως

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F(\tau) d\tau = \frac{d[G(t) - G(0)]}{dt} = \frac{dG(t)}{dt} = F(t).$$

Με βάση το ανωτέρω, η αναγκαία συνθήκη για ακρότατο γίνεται διαδοχικά¹

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = r_i - C_i - (r_i - r'_i) F_i(X_i) + \lambda C_i = 0 \Rightarrow F_i(X_i) = \frac{r_i - (1 - \lambda) C_i}{r_i - r'_i}, \text{ για } i = 1, 2, \dots, N.$$

Όταν οι εξισώσεις επιδέχονται αναλυτικής λύσης, προκύπτουν εκφράσεις $X_i = X_i(\lambda)$ συναρτήσεως του λ . Με αντικατάσταση στον περιορισμό

¹ Στην ίδια έκφραση καταλήγουμε ως εξής: αντικαθιστούμε την $E(\Phi_i) = \int_0^{X_i} x f_i(x) dx + X_i \int_{X_i}^{\infty} f_i(x) dx$ στην

$$\text{αρχική } E(Z) \text{ και προκύπτει } L = \sum_{i=1}^N \left[(r_i - r'_i) \left(\int_0^{X_i} x f_i(x) dx + X_i \int_{X_i}^{\infty} f_i(x) dx \right) + (r'_i - C_i) X_i \right] + \lambda \left(\sum_{i=1}^N C_i X_i - B \right).$$

Για τις $\partial L / \partial X_i$, εφαρμόζουμε από τον τύπο του Leibniz, που για απλή παραγωγή γράφεται

$$\frac{d}{dy} \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} G(y, x) dx \right] = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial G(y, x)}{\partial y} dx + G[y, \beta(y)] \frac{d\beta(y)}{dy} - G[y, \alpha(y)] \frac{d\alpha(y)}{dy},$$

ορίζοντας κατάλληλα τις συναρτήσεις α , β και G , τη μεταβλητή $y = X_i$ και αφήνοντας την x ως έχει.

$$\sum_{i=1}^N C_i X_i(\lambda) = B$$

ευρίσκεται το λ από το οποίο υπολογίζονται τα $X_i(\lambda)$. Αν ο περιορισμός δεν επιλύεται αναλυτικά, τότε τον επιλύουμε αριθμητικά ή με δοκιμή και σφάλμα, δοκιμάζοντας διάφορα λ στις αναγκαίες συνθήκες μέχρις ότου ικανοποιήσουμε τον περιορισμό.

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η L είναι *κοίλη* συνάρτηση σε κάθε σημείο $(X_1, \dots, X_N)$ (**γιατί**). Άρα το τοπικό ακρότατο είναι και *ολικό μέγιστο* για το κέρδος.

Προφανώς χωρίς περιορισμούς, τα βέλτιστα X_i προκύπτουν από τις εξισώσεις

$$F_i(X_i) = \frac{r_i - C_i}{r_i - r_i'}$$

που λύνονται πιο εύκολα (πχ. με πίνακες κατανομών).

Αν στους περιορισμούς υπάρχει και **ανισότητα** τότε, σύμφωνα με τον αλγόριθμο της προηγούμενης παραγράφου, λύνουμε χωρίς τον περιορισμό ανισότητας. Αν η λύση τον παραβιάζει τότε **λύνουμε πάλι θεωρώντας τον περιορισμό αυτόν ως ισότητα**.

Παράδειγμα

Μία βιοτεχνία τροφοδοτεί κάθε πρωί ένα αυτόματο μηχάνημα πώλησης με δύο τύπους γάλακτος: πλήρες (1) και ελαφρύ (2). Ένα λίτρο πλήρες γάλα κοστίζει στην βιοτεχνία C_1 και η τιμή πώλησης στο μηχάνημα είναι r_1 . Οι αντίστοιχες τιμές για το ελαφρύ είναι C_2 και r_2 . Η ημερήσια ζήτηση για κάθε τύπο είναι τυχαία μεταβλητή με *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* $f_i(x) = \mu_i e^{-\mu_i x}$ για $x \geq 0$ όπου μ_i είναι θετικές παράμετροι. Ζητούνται οι ποσότητες X_i ημερήσιας τροφοδοσίας που μεγιστοποιούν το μέσο ημερήσιο κέρδος της βιοτεχνίας. Αν η ζήτηση υπερβεί την ποσότητα τροφοδοσίας τότε εξαντλείται το απόθεμα και δεν γίνεται άλλη τροφοδοσία ως το τέλος της ημέρας. Αν η ζήτηση υπολείπεται της ποσότητας τροφοδοσίας, τότε το περίσσευμα αποσύρεται χωρίς η βιοτεχνία να εισπράξει τίποτα. Το μηχάνημα χωρά V λίτρα. Η εταιρεία διαθέτει πάντα τόση ποσότητα συνολικά και θέλει να αποφασίσει την βέλτιστη αναλογία $X_1:X_2$.

Οι βέλτιστες ποσότητες ικανοποιούν τις

$$F_i(X_i) = \frac{r_i - (1-\lambda)C_i}{r_i - r_i'} \quad \text{και} \quad X_1 + X_2 = V.$$

όπου $r_i' = 0$ και

$$F_i(X_i) = \int_0^{X_i} \mu e^{-\mu x} dx = \int_0^{X_i} -d(e^{-\mu x}) = e^{-\mu x} \Big|_0^{X_i} = -e^{-\mu X_i} + e^{-0(\mu)} = 1 - e^{-\mu X_i}.$$

Οι λύσεις είναι

$$1 - e^{-\mu_i X_i} = \frac{r_i - (1 - \lambda)C_i}{r_i} = 1 - (1 - \lambda)\frac{C_i}{r_i} \Rightarrow X_i = \frac{\ln(r_i / C_i) - \ln(1 - \lambda)}{\mu_i}.$$

Τις αντικαθιστούμε στον περιορισμό χωρητικότητας και λύνουμε ως προς $-\ln(1 - \lambda)$:

$$-\ln(1 - \lambda) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[V - \frac{\ln(r_1 / C_1)}{\mu_1} - \frac{\ln(r_2 / C_2)}{\mu_2} \right].$$

Με αντικατάσταση στην έκφραση του X_i ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\ln(r_1 / C_1) - \ln(1 - \lambda)}{\mu_1} = \frac{\ln(r_1 / C_1) + \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[V - \frac{\ln(r_1 / C_1)}{\mu_1} - \frac{\ln(r_2 / C_2)}{\mu_2} \right]}{\mu_1} \\ &= \frac{\mu_2 V + \ln(r_1 / C_1) - \ln(r_2 / C_2)}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

Ανάλογη έκφραση έχει το X_2 . Για τις δύο αυτές εκφράσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία: $X_1 < 0 \Leftrightarrow X_2 > V$ (γιατί;). Δηλαδή αν ισχύει η αριστερή ανισότητα τότε ισχύει και η δεξιά και αν ισχύει η δεξιά τότε θα ισχύει η αριστερή. Λόγω συμμετρίας μπορούμε να εναλλάξουμε τα 1 και 2. Εν γένει

$$X_i < 0 \Leftrightarrow X_j > V \quad (i \neq j).$$

Αν συμβεί αυτό τότε τροφοδοτούμε μόνο γάλα τύπου j σε ποσότητα $X_j = V$ και καθόλου γάλα για το αρνητικό X_i (γιατί;).

2.10 Μοντέλα μεγέθους παρτίδων παραγωγής

(Lot sizing)

Έχουμε ένα σύστημα παραγωγής που παράγει N προϊόντα με $b = 0$. Το συνολικό μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου είναι

$$K = \sum_{i=1}^N K_i$$

και έχοντας εκφράσεις για τα K_i θα μπορούσαμε να εύρουμε τις ποσότητες εκείνες που ελαχιστοποιούν το K . Συχνά όμως λόγω περιορισμένης δυναμικότητας του συστήματος δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε το βέλτιστο σημείο επειδή τα διάφορα προϊόντα ανταγωνίζονται για την χρήση των εγκαταστάσεων. Όταν η ζήτηση είναι σταθερή, τότε συμφέρει να λειτουργούμε τις εγκαταστάσεις περιοδικά για όλα τα προϊόντα. Σε κάθε περίοδο ή κύκλο διάρκειας T προγραμματίζεται η παραγωγή όλων των προϊόντων και η διαδικασία επαναλαμβάνεται στον επόμενο κύκλο.

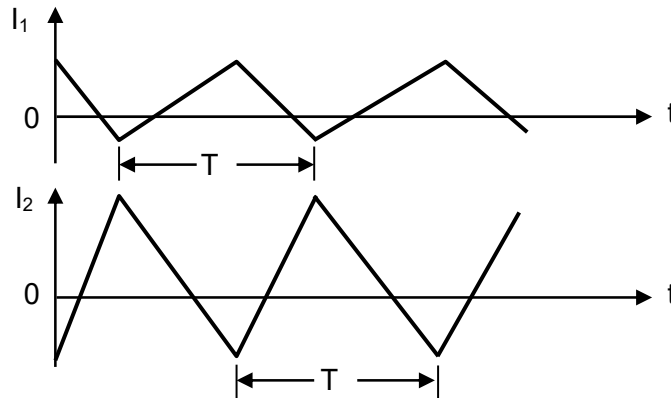
Μία ειδική κατηγορία περιοδικών προγραμμάτων παραγωγής είναι τα *κυκλικά*, όπου κάθε είδος προϊόντος παράγεται μία μόνον φορά σε κάθε κύκλο και πάντοτε με την ίδια σειρά. Έστω ένα σύστημα με 4 προϊόντα. Τα ακόλουθα προγράμματα είναι κυκλικά:

... (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4), ...

... (2, 4, 3, 1), (2, 4, 3, 1), ...

κ.ο.κ.

Το επόμενο σχήμα δείχνει τα αποθέματα για κυκλική παραγωγή δύο προϊόντων.



Κάθε κύκλος διάρκειας T ξεκινά με την παραγωγή μίας παρτίδας προϊόντος 1 και ακολουθεί η παραγωγή παρτίδας του 2. Έχουμε δηλαδή το πρόγραμμα (1, 2), (1, 2), Θα μπορούσε ωστόσο κάποιος να θεωρήσει ως έναρξη κύκλου την έναρξη της παραγωγής του 2 και να έχει το ισοδύναμο πρόγραμμα (2, 1), (2, 1),

Στα *μη κυκλικά* αλλά *περιοδικά* προγράμματα ένα προϊόν μπορεί να παράγεται περισσότερες φορές σε κάθε κύκλο και σε διαφορετικές παρτίδες κάθε φορά, αλλά πάντοτε με τον ίδιο τρόπο σε κάθε κύκλο. Παραδείγματα μη κυκλικών περιοδικών προγραμμάτων είναι

... (1, 2, 3, 1, 2, 4), (1, 2, 3, 1, 2, 4), ...

... (2, 4, 1, 2, 3, 1), (2, 4, 1, 2, 3, 1), ...

κ.ο.κ.

Όπως στην περίπτωση των δύο προϊόντων, κάθε περιοδικό πρόγραμμα παραγωγής μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικούς τρόπους:

... |←διάστημα T →|←διάστημα T →| ...

... (1, 2, 3, 1, 2, 4), (1, 2, 3, 1, 2, 4), ...

... (2, 3, 1, 2, 4, 1), (2, 3, 1, 2, 4, 1), ...

... (3, 1, 2, 4, 1, 2), (3, 1, 2, 4, 1, 2), ...

κ.ο.κ.

Στην συνέχεια εξετάζουμε κυκλικά προγράμματα παραγωγής. Δεν ενδιαφέρει η σειρά,

αφού κάθε T μονάδες χρόνου επαναλαμβάνεται η παραγωγή του ίδιου προϊόντος. Έστω T_i ο χρόνος που αφιερώνεται για την παραγωγή του i σε κάθε κύκλο διάρκειας T . Μπορεί, πριν ξεκινήσει η παραγωγή ενός προϊόντος,

- α) να *πρέπει* να γίνει προετοιμασία της εγκατάστασης παραγωγής για κάποιο χρόνο (καθαρισμός από προηγούμενο προϊόν, αλλαγή στις ρυθμίσεις της μηχανής),
- β) ή να *συμφέρει* να παρεμβάλλουμε έναν επί πλέον χρόνο αδράνειας στην παραγωγή
- γ) ή να γίνουν και το α) και το β).

Επομένως το T περιλαμβάνει πιθανόν και άλλους χρόνους πλην των T_i .

Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε το T με το ελάχιστο κόστος. Έστω ότι η ζήτηση του προϊόντος i έχει ρυθμό D_i . Λόγω περιοδικότητας, η παραγόμενη ποσότητα Q_i πρέπει να είναι ίση με την ζήτηση σε χρόνο T . Το μέγεθος παρτίδας Q_i και η διάρκεια παραγωγής T_i σε έναν κύκλο υπολογίζονται με τις εξισώσεις

$$Q_i = T_i P_i = T D_i \Rightarrow T_i = \rho_i T,$$

όπου

$$\rho_i = \frac{D_i}{P_i}$$

είναι το κλάσμα του χρόνου που οι εγκαταστάσεις απασχολούνται για την παραγωγή του i . Αν για κάποιο προϊόν ισχυε ότι $D_i = P_i$ τότε θα έπρεπε να το παράγουμε συνεχώς και αποκλειστικά για να μην υπάρχει έλλειψη. Τότε όμως δεν θα μπορούσαμε να παράγουμε άλλα προϊόντα και θα είχαν εκείνα έλλειψη και μάλιστα συνεχώς αυξανόμενη με την πάροδο του χρόνου. Υποθέτουμε ότι $P_i > D_i$ ή $\rho_i < 1$. Το $\rho_1 + \dots + \rho_N$ είναι η μέση απασχόληση ανά μονάδα χρόνου για όλα τα προϊόντα. Αυτή δεν πρέπει να υπερβαίνει το 100% του διαθέσιμου χρόνου. Άρα για να μην έχουμε έλλειψη σε κανένα προϊόν πρέπει

$$\sum_{i=1}^N \rho_i < 1.$$

Εξετάζουμε την περίπτωση $b_i = 0$ για κάθε προϊόν i . Εφαρμόζουμε το Μοντέλο II με μοναδιαίο κόστος αποθέματος h_i και σταθερό κόστος προετοιμασίας A_i κάθε φορά που ξεκινά η παραγωγή του i . Ο συνολικός ρυθμός κόστους είναι

$$K(T) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{A_i D_i}{Q_i} + C_i D_i + h_i \frac{Q_i}{2} (1 - \rho_i) \right].$$

Αντικαθιστώντας $Q_i = T D_i$ προκύπτουν

$$K(T) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{A_i}{T} + C_i D_i + h_i \frac{T D_i}{2} (1 - \rho_i) \right]$$

και

$$\frac{\partial K}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^N A_i}{\sum_{i=1}^N h_i D_i (1 - \rho_i)}}. \quad (2.17)$$

Έστω τώρα ότι πριν την παραγωγή κάθε παρτίδας απαιτείται προετοιμασία των εγκαταστάσεων η οποία για την παρτίδα των i παίρνει χρόνο S_i . Αν η παραγωγή διαρκεί T_i τότε πρέπει

$$\sum_{i=1}^N (S_i + T_i) \leq T.$$

Είδαμε ότι $T_i = \rho_i T$. Με αντικατάσταση, η ανισότητα γίνεται

$$\sum_{j=1}^N S_j \leq T \left(1 - \sum_{j=1}^N \rho_j \right)$$

και διαιρώντας κατά μέλη με $(1 - \sum \rho_i) > 0$:

$$T \geq \frac{\sum_{j=1}^N S_j}{1 - \sum_{j=1}^N \rho_j} \triangleq T_{\min} \quad (2.18)$$

Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα με περιορισμό ανισότητας. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της Παραγράφου 2.8.2, λύνουμε το πρόβλημα αγνοώντας την ανισότητα και βρίσκουμε λύση $T = T^*$. Αν η τιμή της είναι $< T_{\min}$ τότε θεωρούμε τον περιορισμό ως ισότητα, άρα θέτουμε $T = T_{\min}$. Πράγματι, εδώ δεν χρειάζεται βελτιστοποίηση αφού, όταν επιβάλουμε τον περιορισμό $T = T_{\min}$, το $\min K(T)$ γίνεται μονοσήμαντα ίσο με $K(T_{\min})$.

Επομένως, εν γένει υπολογίζουμε τα T^* και $T_{\min}$ και η βέλτιστη διάρκεια κύκλου είναι

$$T_{\text{opt}} = \max [T^*, T_{\min}].$$

Αν $T^* < T_{\min}$, τότε ένας κύκλος διάρκειας T^* δεν θα μπορούσε να καλύψει τη ζήτηση γιατί οι χρόνοι προετοιμασίας θα κάλυπταν μεγάλο μέρος του. Τότε έχουμε

$$T_{\text{opt}} = T_{\min}.$$

Αν $T^* > T_{\min}$, τότε

$$T_{\text{opt}} = T^*.$$

Εδώ, επί πλέον των χρόνων προετοιμασίας S_i , εισάγονται και χρόνοι αδράνειας, όπως αναφέρθηκε πριν. Ο συνολικός χρόνος αδράνειας T_0 πρέπει να ικανοποιεί την

$$T_0 + \sum_{i=1}^N (S_i + \rho_i T^*) = T^* \quad \text{ή}$$

$$T_0 = T^* \left(1 - \sum_{i=1}^N \rho_i \right) - \sum_{i=1}^N S_i = (T^* - T_{\min}) \left(1 - \sum_{i=1}^N \rho_i \right).$$

Όταν $T^* \leq T_{\min}$ τότε $T_0 = 0$. Επειδή το πρόγραμμα εκτελείται κυκλικά, δεν ενδιαφέρουν οι θέσεις των χρόνων αδράνειας αλλά μόνο το άθροισμά τους, T_0 .

Παράδειγμα

Τέσσερα προϊόντα παράγονται στις ίδιες εγκαταστάσεις. Ο ρυθμός κόστους αποθέματος είναι 20% ετησίως και $b = 0$. Δίνονται:

Προϊόν	Ετήσια ζήτηση	Ρυθμός παραγωγής (μονάδες/έτος)	Κόστος ετοιμασίας	Χρόνος ετοιμασίας (έτη)	Κόστος/μονάδα
A	3000	10000	50	0.001	10
B	2000	5000	70	0.002	15
C	5000	50000	120	0.005	5
D	1000	10000	78	0.003	20

Εύρετε την βέλτιστη πολιτική.

Καταστρώνουμε έναν ακόμη πίνακα με υπολογισμούς:

Προϊόν	$\rho_i = D_i/P_i$	$h_i = 0.2C_i$	$h_i D_i (1 - \rho_i)$
A	0.3	2	4200
B	0.4	3	3600
C	0.1	1	4500
D	0.1	4	3600

Έχουμε

$$\sum_{i=1}^4 \rho_i = \sum_{i=1}^4 \frac{D_i}{P_i} = 0.9 < 1.$$

Άρα η εγκατάσταση πρέπει να εργάζεται το 90% του χρόνου. Το υπόλοιπο 10% είναι διαθέσιμο για προετοιμασία, συντήρηση, ακόμη και αδράνεια αν αυτό συμφέρει. Τώρα

$$T_{\min} = \frac{\sum_{j=1}^4 S_j}{1 - 0.9} = \frac{0.011}{0.1} = 0.11 \text{ έτη}.$$

Από τον τύπο (2.18) με αντικατάσταση τιμών από τους πίνακες, ευρίσκουμε

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^N A_i}{\sum_{i=1}^N h_i D_i (1 - \rho_i)}} = \sqrt{\frac{636}{15900}} = 0.2 \text{ έτη}.$$

Άρα

$$T_{\text{opt}} = \max(0.11, 0.2) = 0.2.$$

Τέλος από τις $Q_j = TD_j$ ευρίσκουμε

$$Q_1^* = 600, Q_2^* = 400, Q_3^* = 1000, Q_4^* = 200 \text{ ανά κύκλο παραγωγής}$$

και από τον τύπο του κόστους $K(0.2) = 108180$ ανά έτος. Σε κάθε κύκλο παραγωγής (με διάρκεια 0.2 έτη ή 2.4 μήνες) εισάγεται χρόνος αδράνειας

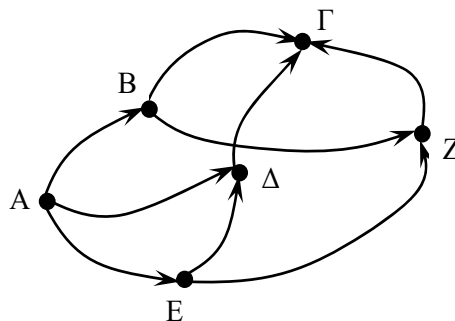
$$T_0 = (0.20 - 0.11)(1 - 0.9) = 0.009 \text{ έτη (περίπου 3 ημέρες ρεπό)}.$$

2.11 Μία εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού στην παραγωγή κατά παρτίδες

2.11.1 Εισαγωγή στον δυναμικό προγραμματισμό

Ο *δυναμικός προγραμματισμός* (dynamic programming) είναι μία μέθοδος βελτιστοποίησης που στηρίζεται στην *Αρχή του Βελτίστου* (optimality principle) του Richard Bellman:

Αν η διαδρομή $AB\Gamma$ είναι η συντομότερη για την μετάβαση από το A στο Γ , τότε η $B\Gamma$ είναι η συντομότερη για την μετάβαση από το B στο Γ .



Απόδειξη: Έστω ότι $AB\Gamma$ είναι η συντομότερη διαδρομή όλων όσες συνδέουν το A με το Γ και έστω ότι η συντομότερη διαδρομή από το B στο Γ δεν είναι η $B\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Αν υπήρχε συντομότερη διαδρομή από το B στο Γ , έστω η $BZ\Gamma < B\Gamma$, τότε προσθέτοντας AB σε κάθε μέλος θα είχαμε $AB + BZ\Gamma < AB + B\Gamma$ ή $ABZ\Gamma < AB\Gamma$. Δηλαδή η $ABZ\Gamma$ θα ήταν συντομότερη της $AB\Gamma$, πράγμα άτοπο.

Όπως θα ιδούμε αργότερα, εφαρμόζοντας την Αρχή του Βελτίστου μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε σταδιακά από το τέλος προς την αρχή αποφεύγοντας την λεπτομερή καταμέτρηση όλων των εναλλακτικών διαδρομών από την αφετηρία στον προορισμό.

Γενικότερα θεωρούμε ένα σύστημα του οποίου την λειτουργία μπορούμε σε κάποιο

βαθμό να ελέγξουμε (πχ. δρομολόγιο αυτοκινήτου σε μία πόλη, διαχείριση παραγγελιών σε αποθήκη, πρόσληψη προσωπικού σε επιχείρηση). Το σύστημα ξεκινά από μία γνωστή αρχική κατάσταση x_1 (π.χ., το σημείο Α στο σχήμα). Βρισκόμαστε τότε στην χρονική στιγμή $n = 1$ ή, όπως συνηθίζεται να λέμε στον δυναμικό προγραμματισμό, είμαστε στην πρώτη βαθμίδα απόφασης. Εκεί λαμβάνουμε την πρώτη απόφαση d_1 η οποία έχει ως αποτέλεσμα το σύστημα στην επόμενη βαθμίδα $n = 2$ να μεταβεί όπως λέμε σε μία νέα κατάσταση x_2 (π.χ., το σημείο Β στο σχήμα). Εκεί λαμβάνουμε νέα απόφαση d_2 κ.ο.κ. Αναζητούμε τις *βέλτιστες αποφάσεις* $d_1, d_2, \dots$ ώστε να βελτιστοποιείται κάποιο μέτρο συνολικής απόδοσης του συστήματος για N βαθμίδες λειτουργίας ή χρονικές στιγμές, $n = 1, 2, \dots, N$.

Η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται από εξισώσεις ή λογικές σχέσεις που συνδέουν τις προηγούμενες καταστάσεις και αποφάσεις με τις επόμενες καταστάσεις καθώς επίσης και με το μέτρο απόδοσης. Αυτές οι εξισώσεις αποτελούν το μοντέλο του συστήματος. Στο εξής ως μέτρο απόδοσης θα θεωρήσουμε το συνολικό κόστος λειτουργίας. Αν την στιγμή n το σύστημα είναι στην κατάσταση x και λάβουμε μία απόφαση d , τότε

- (i) από την x μεταβαίνουμε σε νέα κατάσταση $f_n(x,d)$ την στιγμή $n + 1$ και
- (ii) το σύστημα επιβαρύνεται με κόστος $K_n(x,d)$ που μπορεί να είναι εν γένει συνάρτηση των n, x και d .

Οι συναρτήσεις f_n και K_n πρέπει να είναι γνωστές.

Θέλουμε να επιλέξουμε τις *βέλτιστες αποφάσεις* $d_1, d_2, \dots, d_N$, δηλαδή εκείνες που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος $K_1 + \dots + K_n + K_{n+1} + \dots + K_N$ από την βαθμίδα 1 στην N . Συμβολίζουμε $C_n(x) = \min(K_n + K_{n+1} + \dots + K_N)$ το *ελάχιστο* κόστος από την βαθμίδα n ως την N , δοθέντος ότι στην βαθμίδα n είμαστε στην κατάσταση x και από εκεί και μετά *πρόκειται να λάβουμε τις βέλτιστες αποφάσεις*. Πώς θα λύναμε το πρόβλημα αν, για οποιαδήποτε κατάσταση x και οποιαδήποτε απόφαση d (βέλτιστη ή όχι βέλτιστη) στην βαθμίδα n , υπήρχε τρόπος να γνωρίζουμε τις *μελλοντικές βέλτιστες αποφάσεις* $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots, d_N$; Και πώς μπορούμε να εύρουμε τις μελλοντικές βέλτιστες αποφάσεις για όλα τα πιθανά x και d ;

Η ιδέα είναι να θεωρήσουμε μηδενικό το κόστος λειτουργίας από το στάδιο $N + 1$ και μετά (που έτσι κι αλλιώς δεν μας ενδιαφέρει) και να λύσουμε προβλήματα ξεκινώντας από το τέλος $n = N$ ως την αρχή $n = 1$. Σε κάθε στάδιο και για κάθε πιθανή κατάσταση x λύνουμε την λεγόμενη *εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού*:

$$C_n(x) = \min_d [K_n(x, d) + C_{n+1}(f_n(x, d))], n = N, N-1, \dots, 1, \quad (2.19)$$

όπου $C_{N+1} = 0$. Έστω x_1 η γνωστή αρχική κατάσταση. Λύνουμε την Εξ. (2.19) από το τελευταίο στάδιο στο αρχικό σύμφωνα με τον ακόλουθο:

Αλγόριθμος Δυναμικού Προγραμματισμού

Για κάθε βαθμίδα $n = N, N-1, \dots, 1$:

Προσδιορίζουμε όλες τις πιθανές καταστάσεις x στην βαθμίδα n , εκτός αν $n = 1$ οπότε εξετάζουμε μόνον την κατάσταση $x = x_1$ και τελειώνουμε.

Για κάθε κατάσταση x στην βαθμίδα n :

- ευρίσκουμε την βέλτιστη απόφαση, λύνοντας την Εξ. (2.19) και χρησιμοποιώντας τα C_{n+1} της προηγούμενης επανάληψης
- αποθηκεύουμε την ελάχιστη τιμή του κόστους $C_n(x)$ και την αντίστοιχη βέλτιστη απόφαση $d_n(x)$ για κάθε κατάσταση x .

2.11.2 Πρόγραμμα για την ελαχιστοποίηση της προετοιμασίας

Για το πρόβλημα παραγωγής πολλών προϊόντων κατά παρτίδες δεν χρειάστηκε να γνωρίζουμε την σειρά παραγωγής των προϊόντων αλλά μόνο τους χρόνους προετοιμασίας. Έστω ότι πρέπει να παράγουμε τα N προϊόντα κυκλικά αλλά έχουμε ευελιξία ως προς την επιλογή της σειράς παραγωγής των παρτίδων. Για παράδειγμα ένα κυκλικό πρόγραμμα είναι

$$\dots 1, 2, \dots, N-1, N, 1, 2, \dots, N-1, N, 1, 2, \dots$$

Λόγω περιοδικότητας αρκεί να εξετάσουμε έναν πλήρη κύκλο ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα προϊόντα. Είδαμε ότι η διάρκεια ενός κύκλου είναι $T_0 + \sum (S_j + T_j)$, όπου S_j είναι ο απαραίτητος χρόνος προετοιμασίας πριν ξεκινήσει η παρτίδα j και T_j η διάρκεια παραγωγής της παρτίδας σε έναν κύκλο. T_0 είναι ο χρόνος αδράνειας που ενδεχομένως συμφέρει να προσθέσουμε.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο χρόνος προετοιμασίας των εγκαταστάσεων εξαρτάται από την σειρά παραγωγής των παρτίδων. Έστω d_{ki} ο χρόνος προετοιμασίας από την παρτίδα προϊόντων k ή εργασία k , όπως θα λέμε για συντομία, στην εργασία i . Αν, για παράδειγμα, αμέσως πριν την παρτίδα προϊόντων i παράγονται προϊόντα k τότε έχουμε $S_i = d_{ki}$. Επειδή ο χρόνος S_i δεν χρησιμοποιείται για παραγωγή, είναι χρόνος αδράνειας. Όταν η λύση του προβλήματος είναι $T_0 = 0$, αυτό σημαίνει ότι κάθε χρόνος αδράνειας είναι επιζήμιος και συμφέρει να τον μειώσουμε.

Αφού κάθε S_i εξαρτάται από την εργασία που προηγείται της i , το πρόβλημα τώρα είναι να εύρουμε την *σειρά εκτέλεσης* των N εργασιών η οποία ελαχιστοποιεί το $\sum S_i$ σε έναν κύκλο. Αυτό είναι το λεγόμενο *πρόβλημα του περιπλανώμενου πωλητή* (traveling salesman problem), ένα από τα προβλήματα με πολύ μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις. Ο πωλητής πρέπει να επισκεφθεί N πόλεις μόνο μια φορά και να επιστρέψει στο αρχικό σημείο έχοντας διανύσει την ελάχιστη απόσταση (εναλλακτικά: έχοντας δαπανήσει τον ελάχιστο χρόνο ή με το ελάχιστο συνολικό κόστος μετακίνησης).

Ο αλγόριθμος των Little, Murty, Sweeney και Karel ([1]) που λέγεται αλγόριθμος διακλάδωσης και ορίου (branch-and-bound), δίνει μια αποτελεσματική λύση στο πρόβλημα. Εδώ θα εξετάσουμε την λύση με δυναμικό προγραμματισμό που οφείλεται στον Bellman.

Ένας κύκλος με N εργασίες είναι πλήρης: αρχίζει με το *ξεκίνημα της παραγωγής παρτίδας κάποιου προϊόντος* περιλαμβάνει όλα άλλα τα προϊόντα και τελειώνει με το τέλος εκείνης της προετοιμασίας με την οποία θα ξεκινήσει η *επόμενη παρτίδα του ίδιου προϊόντος*. Οποιαδήποτε εργασία μπορεί να θεωρηθεί ως πρώτη εργασία του κύκλου διότι το άθροισμα $\sum S_i$ είναι ίδιο. Συνεπώς αρκεί να εύρουμε την σειρά που ελαχιστοποιεί τους χρόνους προετοιμασίας ενός κύκλου με αρχή και τέλος την εργασία 1:

$$1 \rightarrow \{\text{υπόλοιπες εργασίες } 2, 3, \dots, N \text{ με βέλτιστη σειρά}\} \rightarrow 1.$$

Το σύνολο των υπόλοιπων εργασιών $\{2, 3, \dots, N\}$ έχει $N - 1$ στοιχεία. Ας εξετάσουμε κάποιο υποσύνολο S των υπόλοιπων εργασιών. Έστω ότι το S έχει n εργασίες. Ορίζουμε $C_n(i, S)$ τον *ελάχιστο* συνολικό χρόνο προετοιμασιών από την εργασία 1 μέχρι και την i με ενδιάμεσες τις n εργασίες του συνόλου S . Από την Εξ. (2.16) έχουμε

$$C_n(i, S) = \min_{k \in S} [C_{n-1}(k, S - \{k\}) + d_{ki}] \quad (2.20)$$

όπου k είναι μία από τις εναλλακτικές εργασίες του S που μπορεί να γίνουν πρότελευταίες, αμέσως πριν την i , και $S - \{k\}$ είναι το σύνολο S χωρίς την k .

(i) Ο αλγόριθμος ξεκινά με $n = 0$ και $S = \emptyset$, δοκιμάζοντας όλους τους προορισμούς i χωρίς ενδιάμεσες εργασίες: $C_0(i, \emptyset) = d_{1i}$ για κάθε $i = 2, 3, \dots, N$.

(ii) Ακολουθούν στάδια $n = 1, 2, \dots, N - 2$: σε κάθε n εφαρμόζεται η Εξ. (2.19) για όλα τα πιθανά S και όλα τα $i \neq 1$.

(iii) Στο τελευταίο στάδιο $N - 1$, έχουμε μόνο $i = 1$ και μόνο το σύνολο $S = \{2, 3, \dots, N\}$:

$$C_{N-1}(1, S) = \min_{k \in S} [C_{N-2}(k, S - \{k\}) + d_{k1}]$$

Παράδειγμα

Πέντε εργασίες εκτελούνται κυκλικά. Οι χρόνοι προετοιμασίας είναι

$k \rightarrow i$	1	2	3	4	5
1	0	3	1	5	4
2	1	0	5	4	3
3	5	4	0	2	1
4	3	1	3	0	3
5	5	2	4	1	0

Προφανώς

$$C_0(2, \emptyset) = d_{12} = 3$$

$$C_0(3, \emptyset) = 1$$

$$C_0(4, \emptyset) = 5$$

$$C_0(5, \emptyset) = 4$$

και

$$C_1(2, \{3\}) = C_0(3, \emptyset) + d_{32} = 1 + 4 = 5$$

$$C_1(2, \{4\}) = 5 + 1 = 6$$

$$C_1(2, \{5\}) = 4 + 2 = 6$$

$$C_1(3, \{2\}) = 3 + 5 = 8$$

$$C_1(3, \{4\}) = 5 + 3 = 8$$

$$C_1(3, \{5\}) = 4 + 4 = 8$$

$$C_1(4, \{2\}) = 3 + 4 = 7$$

$$C_1(4, \{3\}) = 1 + 2 = 3$$

$$C_1(4, \{5\}) = 4 + 1 = 5$$

$$C_1(5, \{2\}) = 3 + 3 = 6$$

$$C_1(5, \{3\}) = 1 + 1 = 2$$

$$C_1(5, \{4\}) = 5 + 3 = 8$$

Για τις επόμενες βαθμίδες εφαρμόζουμε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού:

$$C_2(2, \{3,4\}) = \min [C_1(3, \{4\}) + d_{32}, C_1(4, \{3\}) + d_{42}] = \min [8 + 4, 3 + 1] = 4$$

$$C_2(2, \{3,5\}) = \min [8 + 4, 2 + 2] = 4$$

$$C_2(2, \{4,5\}) = \min [5 + 1, 8 + 2] = 6$$

$$C_2(3, \{2,4\}) = \min [6 + 5, 7 + 3] = 10$$

$$C_2(3, \{2,5\}) = \min [6 + 5, 6 + 4] = 10$$

$$C_2(3, \{4,5\}) = \min [5 + 3, 8 + 4] = 8$$

$$C_2(4, \{2,3\}) = \min [5 + 4, 8 + 2] = 9$$

$$C_2(4, \{2,5\}) = \min [6 + 4, 6 + 1] = 7$$

$$C_2(4, \{3,5\}) = \min [8 + 2, 2 + 1] = 3$$

$$C_2(5, \{2,3\}) = \min [5 + 3, 8 + 1] = 8$$

$$C_2(5, \{2,4\}) = \min [6 + 3, 7 + 3] = 9$$

$$C_2(5, \{3,4\}) = \min [8 + 1, 3 + 3] = 6$$

$$C_3(2, \{3,4,5\}) = \min [C_2(3, \{4,5\}) + d_{32}, C_2(4, \{3,5\}) + d_{42}, C_2(5, \{3,4\}) + d_{52}] \\ = \min [8 + 4, 3 + 1, 6 + 2] = 4$$

$$C_3(3, \{2,4,5\}) = \min [6 + 5, 7 + 3, 9 + 4] = 10$$

$$C_3(4, \{2,3,5\}) = \min [4 + 4, 10 + 2, 8 + 1] = 8$$

$$C_3(5, \{2,3,4\}) = \min [4 + 3, 10 + 1, 9 + 3] = 7.$$

Το κόστος της τελευταίας βαθμίδας (συνολικό κόστος) είναι:

$$C_4(1, \{2,3,4,5\}) = \min_{j=2,\dots,5} [C_3(j, \{2,3,4,5\} - \{j\}) + d_{j1}] = \min[4+1, 10+5, 8+3, 7+5] = 5$$

που συμβαίνει για $4 + 1 = C_3(2, \{3,4,5\}) + d_{21}$ άρα μετά την 2 ακολουθεί η 1 ($2 \rightarrow 1$). Συνεχίζοντας τον συλλογισμό, το ελάχιστο 4 που αντιστοιχεί στο $C_3(2, \{3,4,5\})$, προέρχεται από το $3 + 1 = C_2(4, \{3,5\}) + d_{42}$, οπότε έχουμε την αλληλουχία $4 \rightarrow 2$. Όμοια $C_2(4, \{3,5\}) = 2 + 1 = C_1(5, \{3\}) + d_{54}$ (άρα $5 \rightarrow 4$) και τέλος $C_1(5, \{3\}) = C_0(3, \emptyset) + d_{35}$ που αντιστοιχεί στην διαδοχή $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$. Άρα η βέλτιστη ακολουθία είναι $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ και ο συνολικός χρόνος προετοιμασιών είναι 5.

2.12 Προβλήματα

1. Κάποιο προϊόν παράγεται σε δόσεις των 20000 μονάδων. Η μηχανή που το παράγει έχει ρυθμό παραγωγής 400000 μονάδων/έτος και το προϊόν προστίθεται στο απόθεμα συνεχώς καθώς η μηχανή παράγει. Η ζήτηση είναι 160000 μονάδες/έτος. Η παραγωγή δεν αρχίζει πριν οι ανικανοποίητες παραγγελίες φθάσουν τις 4000. Το κόστος προετοιμασίας των εγκαταστάσεων είναι 400, το κόστος ανά μονάδα είναι 20, το κόστος αποθέματος είναι 20% ετησίως, και το κόστος ανικανοποίητων παραγγελιών είναι 5 ανά μονάδα, ανά έτος. Εύρετε:

- Μέγιστο απόθεμα.
- Ετήσιο κόστος αποθέματος.
- Ετήσιο κόστος ανικανοποίητων παραγγελιών.
- Ετήσιο κόστος προετοιμασίας.
- Ποσοστό χρόνου που το σύστημα ευρίσκεται σε αρνητικό απόθεμα.

2. Ένα εμπορικό κατάστημα αγοράζει κάποιο είδος για μεταπώληση με τα εξής δεδομένα:

Ετήσιος ρυθμός ζήτησης: 100000 μονάδες.

Σταθερό κόστος παραγγελίας : 40.

Μοναδιαίο κόστος: 10.

Κόστος αποθέματος/έτος: 20%.

Ετήσιο κόστος ανικανοποίητων παραγγελιών: 2/μονάδα.

Όλη η παραγγελία έρχεται με μία εκφόρτωση χωρίς καθυστέρηση, δηλ. $P = \infty$. Εύρετε:

- Το βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας.
- Αν ο χρόνος άφιξης παραγγελίας είναι 1 μήνας ποιο είναι το σημείο παραγγελίας;

γ. Το μέσο και μέγιστο απόθεμα.

δ. Το μέσο και μέγιστο μέγεθος ανικανοποίητων παραγγελιών.;

3. Να αποδείξετε την βασική ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων που είδαμε στην Παράγραφο

2.3.1. Για την (i) ξεκινήστε από τον ορισμό της κυρτότητας και επιλέξτε κατάλληλα α , β και κατάλληλο ενδιαμέσο σημείο $\theta\alpha + (1 - \theta)\beta$. Η απόδειξη της (ii) είναι όμοια.

4. Αποδείξτε ότι οι ρίζες στον τύπο (2.8) είναι θετικές.

5. Στην τάξη έχουμε μεταχειρισθεί την ζήτηση σαν συνεχή μεταβλητή, ενώ στην πράξη είναι διακεκριμένη μεταβλητή. Για $D \gg$ αυτή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αλλά για μικρό D δεν μπορούμε να παίρνουμε παραγώγους αλλά διαφορές $\Delta K(Q) = K(Q + 1) - K(Q)$. Για να είναι το Q^* ελάχιστο πρέπει οποιαδήποτε μεταβολή του προς τα κάτω ή προς τα επάνω να αυξάνει το κόστος. Δηλαδή $K(Q^* - 1) \geq K(Q^*)$ και $K(Q^* + 1) \geq K(Q^*)$. Δείξτε ότι αν $b = 0$, $P \rightarrow \infty$, τότε το Q^* είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος από όλους εκείνους που ικανοποιούν

$$Q(Q - 1) \leq \frac{2AD}{h}.$$

6. Εμπορικό κατάστημα προμηθεύεται και μεταπωλεί προϊόντα $j=1, \dots, n$. Η ζήτηση είναι σταθερή D_j μονάδες/έτος το κόστος αγοράς C_j , το κόστος αποθέματος/έτος h_j , το σταθερό κόστος παραγγελίας $A_j=A$ ίδιο για όλα τα j , οι ρυθμοί εκφόρτωσης άπειροι το και δεν επιτρέπονται ελλείψεις.. Υπάρχει ένα άνω όριο N στον αριθμό παραγγελιών ανά έτος. Εύρετε εκφράσεις κλειστής μορφής για τους πολλαπλασιαστές Lagrange και τα βέλτιστα μεγέθη παραγγελίας. Ποια είναι η ερμηνεία των πολλαπλασιαστών; Υπάρχει λύση κλειστής μορφής αν $A_j > 0$;

7. Ο ρυθμός ζήτησης για κάποιο είδος για τον επόμενο χρόνο είναι $200 + 1600t$, $0 \leq t \leq 1$. Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι 200 ανά παραγγελία, το κάθε είδος κοστίζει 10/μονάδα, και ο ρυθμός κόστους αποθέματος είναι 20% ετησίως. Το αρχικό απόθεμα είναι 100 μονάδες. Αν $b = 0$ ποια είναι η βέλτιστη πολιτική για τον επόμενο χρόνο;

8. Κάποια πρώτη ύλη καταναλώνεται με ρυθμό 180000 μονάδες/έτος. Η τιμή ανά μονάδα

φαίνεται στον πίνακα, το σταθερό κόστος είναι 60/παραγγελία και $i = 20\%$. Δεν επιτρέπεται να συμβεί έλλειψη. Ο ρυθμός αναπλήρωσης είναι άπειρος.

Ποσότητα	Τιμή
$0 < Q < 20000$	1.7
$20000 \leq Q < 40000$	1.6
$40000 \leq Q < \infty$	1.5

Ποια είναι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας; Κάνετε το διάγραμμα κόστους ως προς την ποσότητα παραγγελίας.

9. Να αποδείξετε τα τρία "γιατί;" της Παραγράφου 2.9.

3 ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Μπορούμε να εκτιμήσουμε την μελλοντική ζήτηση χρησιμοποιώντας μία συλλογή τιμών από παλαιότερες καταγραφές ή *χρονοσειρά* (time series), όπως λέγεται, και εφαρμόζοντας κάποια μέθοδο *πρόβλεψης* (forecasting).

Χρονοσειρά είναι μία συλλογή ή σύνολο τιμών $\{x_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ κάποιας στοχαστικής διαδικασίας X_t τις χρονικές στιγμές $t = 1, 2, \dots, n$. Για να μην υπάρχει σύγχυση, συμβολίζουμε με κεφαλαία, π.χ., X_t , τις στοχαστικές διαδικασίες (ας πούμε ότι X_t συμβολίζει το όνομα της διαδικασίας και t τον χρόνο που την εξετάζουμε) και με μικρά γράμματα όπως x, x_t , κ.ο.κ., συμβολίζουμε κάποια τιμή της την στιγμή t . Λέμε "κάποια τιμή της" διότι, αν μιλάμε για μελλοντικούς χρόνους, η X_t είναι άγνωστη και μπορεί να λάβει διάφορες τιμές x_t .

Έστω ότι έχουμε την χρονοσειρά $\{x_t, t = 1, 2, \dots, n\}$ της ζήτησης X_t . Συμβολίζουμε:

$E(X_t)$, $\text{Var}(X_t)$, $\text{Cov}(X_t, X_{t+k})$: μέση τιμή, διασπορά, αυτοσυμμεταβλητότητα της X_t

$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$: μέσος όρος της χρονοσειράς

$\hat{X}_{n+k}$: εκτίμηση-πρόβλεψη της ζήτησης σε μελλοντικό χρόνο $n + k$, $k=1, 2, \dots$

Εξαίρεση στον συμβολισμό με κεφαλαία αποτελεί η διαδικασία λευκού θορύβου η οποία συμβολίζεται ευρέως με το μικρό γράμμα a_t . Γράφουμε $E(a_t)$, $\text{Var}(a_t)$, $\text{Cov}(a_t, a_{t+k}) = 0$.

3.1 Γραμμική παλινδρόμηση

(Linear regression)

Έστω ότι κάποια ποσότητα X_t μεταβάλλεται σχεδόν γραμμικά στο χρόνο. Υποθέτουμε ότι έχουμε στην διάθεσή μας μία σειρά μετρήσεων $X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n$ που έγιναν τους χρόνους $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Θα θέλαμε την εκτίμηση της X_t ,

$$\hat{X}_t = \alpha t + \beta \text{ για } t > t_n.$$

για εκείνα τα α και β που ελαχιστοποιούν το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon^2(t_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha t_i - \beta)^2.$$

Με άλλα λόγια, προσποιούμαστε ότι τα x_i δεν είναι γνωστά, τα εκτιμούμε με το μοντέλο $\hat{X}_{t_i} = \alpha t_i + \beta$ και κατόπιν υπολογίζουμε τις αποκλίσεις τους από τα x_i , θεωρώντας τις αποκλίσεις ως σφάλματα εκτίμησης $\varepsilon(t_i)$. Αναγκαίες συνθήκες ακροτάτου:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \alpha} = 0 & \Rightarrow \begin{cases} -2 \sum_i t_i (x_i - \alpha t_i - \beta) = 0 \\ -2 \sum_i (x_i - \alpha t_i - \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \sum_i t_i^2 + \beta \sum_i t_i = \sum_i t_i x_i \\ \alpha \sum_i t_i + n\beta = \sum_i x_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Από το σύστημα υπολογίζουμε τα α και β . Για να είναι το (α, β) ολικό ελάχιστο *αρκεί* (χωρίς να είναι απαραίτητο) η ε^2 να είναι κυρτή σε κάθε σημείο (α, β) . Θα εξετάσουμε την κυρτότητα σε ένα γενικότερο μοντέλο αμέσως μετά το παράδειγμα.

Παράδειγμα

Η ζήτηση ενός προϊόντος δίνεται από:

Ημέρα t_i	1	2	3	4	5
Τιμές ζήτησης, x_i	10	12	15	18	20

Αν η ζήτηση είναι γραμμική, ποια είναι η εκτίμησή της;

Εδώ

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 75, \quad \sum_{i=1}^5 t_i x_i = 251, \quad \sum_{i=1}^5 t_i = 15, \quad \sum_{i=1}^5 t_i^2 = 55$$

και με αντικατάσταση

$$\left. \begin{aligned} 55\alpha + 15\beta &= 251 \\ 15\alpha + 5\beta &= 75 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = 2.6, \quad \beta = 7.2, \quad \text{και } \hat{X}_t = 2.6t + 7.2.$$

Εξετάζουμε τώρα το γενικότερο γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης

$$\hat{X}_t = \alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_m f_m(t), \quad (3.1)$$

όπου α_j είναι άγνωστες παράμετροι και $f_j(t)$ είναι γνωστές συναρτήσεις του χρόνου για $j = 1, \dots, m$. Πάλι έχουμε στην διάθεσή μας παρατηρήσεις $X_{t_i} = x_i$ για n χρονικές στιγμές $t_i, i = 1, \dots, n$. Θέτοντας

$$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad f(t) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix}$$

προκύπτουν

$$\hat{X}_t = \alpha^T f(t) = f^T(t) \alpha$$

και

$$\varepsilon(t) = X_t - \hat{X}_t = X_t - f^T(t)\alpha.$$

Έστω ότι ελαχιστοποιούμε το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων με βάρη

$$\sum_{i=1}^n q_i \varepsilon^2(t_i),$$

όπου τα $q_i > 0$ είναι κάποια βάρη, ή ισοδύναμα ελαχιστοποιούμε το

$$\varepsilon^T Q \varepsilon$$

όπου

$$\varepsilon \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon(t_1) \\ \varepsilon(t_2) \\ \vdots \\ \varepsilon(t_n) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε

$$A \triangleq \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \cdots & f_1(t_n) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & \cdots & f_2(t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(t_1) & f_m(t_2) & \cdots & f_m(t_n) \end{bmatrix} = [f(t_1) \mid f(t_2) \mid \cdots \mid f(t_n)]$$

και

$$X \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Προφανώς

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(t_1) \\ \varepsilon(t_2) \\ \vdots \\ \varepsilon(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - f^T(t_1)\alpha \\ x_2 - f^T(t_2)\alpha \\ \vdots \\ x_n - f^T(t_n)\alpha \end{bmatrix} = X - A^T \alpha$$

και

$$\begin{aligned} \varepsilon^T Q \varepsilon &= (X - A^T \alpha)^T Q (X - A^T \alpha) = (X^T - \alpha^T A) Q (X - A^T \alpha) \\ &= X^T Q X - \alpha^T A Q X - X^T Q A^T \alpha + \alpha^T A Q A^T \alpha \end{aligned}$$

(βλ. Παράρτημα Α για γινόμενα με ανάστροφους πίνακες και διανύσματα). Ο όρος $X^T Q A^T \alpha$ είναι βαθμωτό μέγεθος (όχι διάνυσμα) και μπορεί να θεωρηθεί ως συμμετρικός πίνακας 1×1 , άρα είναι ίσος με τον ανάστροφό του. Επομένως $X^T Q A^T \alpha = \alpha^T A Q X$. Άρα

$$\varepsilon^T Q \varepsilon = X^T Q X - 2X^T Q A^T \alpha + \alpha^T A Q A^T \alpha.$$

Αναγκαία συνθήκη ώστε το διάνυσμα α να είναι ακρότατο για το $\varepsilon^T Q \varepsilon$ είναι

$$\frac{\partial \varepsilon^T Q \varepsilon}{\partial \alpha} = \frac{\partial X^T Q X}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial X^T Q A^T \alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \alpha^T A Q A^T \alpha}{\partial \alpha} = 0.$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος είναι 0 διότι δεν εξαρτάται από το α . Από την Εξ. (Α.5) στο Παράρτημα Α έχουμε ότι

$$\frac{\partial X^T Q A^T \alpha}{\partial \alpha} = X^T Q A^T$$

και, αφού ο πίνακας $A Q A^T$ είναι συμμετρικός, εφαρμόζοντας την (Α.8) ευρίσκουμε

$$\frac{\partial \alpha^T A Q A^T \alpha}{\partial \alpha} = 2 \alpha^T A Q A^T.$$

Αντικαθιστώντας στην συνθήκη ακροτάτου

$$\frac{\partial \varepsilon^T Q \varepsilon}{\partial \alpha} = -2 X^T Q A^T + 2 \alpha^T A Q A^T = 0$$

προκύπτει τελικά

$$\alpha^T = X^T Q A^T (A Q A^T)^{-1}$$

και αναστρέφοντας (ιδιότητα αναστροφής: $(B\Gamma)^T = \Gamma^T B^T$):

$$\begin{aligned} \alpha &= [(A Q A^T)^{-1}]^T A Q^T X \\ &= (A Q A^T)^{-1} A Q^T X \end{aligned} \quad (3.2)$$

επειδή οι πίνακες Q και $(A Q A^T)^{-1}$ είναι συμμετρικοί.

Παίρνοντας την δεύτερη παράγωγο του $\varepsilon^T Q \varepsilon$ ως προς α προκύπτει ο πίνακας Hess

$$\frac{\partial^2 \varepsilon^T Q \varepsilon}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \varepsilon^T Q \varepsilon}{\partial \alpha} \right) = 2 A Q A^T$$

ιδιότητες του οποίου έχουμε αναφέρει στα αποθεματικά συστήματα. Ο πίνακας Q είναι διαγώνιος με θετικά στοιχεία $q_i > 0$. Συνεπώς αυτός και η τετραγωνική μορφή $A Q A^T$ εκτός από συμμετρικοί είναι και θετικά ημιορισμένοι. Επομένως η $\varepsilon^T Q \varepsilon$ είναι κυρτή συνάρτηση και έχει ολικό ελάχιστο στο ακρότατο α της Εξ. (3.2).

3.2 Κινούμενος μέσος όρος

(Moving average)

Εδώ έχουμε μια σειρά n δεδομένων $X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_n} = x_n$ και υποθέτουμε ότι η διαδικασία X_t έχει σταθερή αλλά άγνωστη μέση τιμή $E(X_t)$ και δεν εξαρτάται από άλλους παράγοντες. Χρησιμοποιούμε ως εκτιμητήρια και της $E(X_t)$ και της X_t μία σταθερά $\hat{X}_t = \alpha$. Το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων εκτίμησης είναι

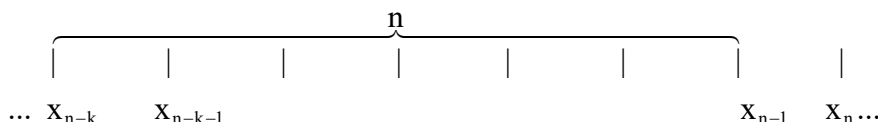
$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{X}_{t_i})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2,$$

και ελαχιστοποιείται για α τέτοιο ώστε

$$\frac{d(\varepsilon^2)}{d\alpha} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι θετική, $d^2(\varepsilon^2)/d\alpha^2 = -2 \sum (-1) = 2n$, άρα πρόκειται για ολικό ελάχιστο. Η τιμή του α είναι ο μέσος όρος των παρατηρήσεων και χρησιμοποιείται ως εκτίμηση της $X_{t_{n+1}}$: $\hat{X}_{t_{n+1}} = \alpha$.

Έστω ότι θέλουμε μία εκτίμηση βασισμένη στα πιο πρόσφατα δεδομένα. Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιούμε ένα παράθυρο εύρους k που μετακινείται στα δεδομένα:



Έχουμε τότε έναν κινούμενο μέσον όρο **τάξης k** :

$$\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n-k+i} = \hat{X}_{t_n}$$

Όταν η νέα μέτρηση x_n είναι διαθέσιμη, τότε

$$\alpha = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n+1-k+i} = \hat{X}_{t_{n+1}}.$$

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε δεδομένα για διαδοχικούς χρόνους $t_i = i$ και χρησιμοποιούμε παράθυρο $n = 4$. Αν $x_1 = 10$, $x_2 = 8$, $x_3 = 6$, $x_4 = 7$ τότε,

$$\hat{X}_5 = \alpha = \frac{10+8+6+7}{4} = \frac{31}{4} = 7.75.$$

Αν δοθεί ότι $x_5 = 8$ τότε ο κινούμενος μέσος όρος γίνεται

$$\hat{X}_6 = \alpha = \frac{8+6+7+8}{4} = \frac{29}{4} = 7.25.$$

3.3 Εκθετική εξομάλυνση

(Exponential smoothing)

Υποθέτουμε ότι ανά τακτά χρονικά διαστήματα $t = 1, 2, \dots, n$ λαμβάνουμε διαδοχικές μετρήσεις x_t μίας στοχαστικής διαδικασίας X_t και, όπως πριν, η X_t έχει σταθερή ή πιθανόν

αργά μεταβαλλόμενη μέση τιμή και δεν εξαρτάται από άλλους παράγοντες. Χρησιμοποιούμε πάλι μία σταθερά α ως εκτιμήτρια και της $E(X_t)$ και των X_t στο μέλλον. Για να δώσουμε μεγαλύτερη έμφαση σε πρόσφατες μετρήσεις, αντί να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα τετραγώνων $\sum (x_t - \alpha)^2$, ελαχιστοποιούμε το

$$\varepsilon^2 = \sum_{t=1}^n \beta^{n-t} (x_t - \alpha)^2, \text{ όπου } 0 < \beta < 1.$$

Με άλλα λόγια επισυνάπτουμε βάρη $q_t = \beta^{n-t}$ στο κάθε σφάλμα κατά την σειρά

t:	1	2	...	n-1	n
βάρος q_t	β^{n-1}	β^{n-2}	...	β^1	$\beta^0 = 1$

που σημαίνει ότι τα πλέον πρόσφατα σφάλματα έχουν μεγάλο βάρος, ενώ τα παλαιά εξασθενούν. Για ακρότατο α , πρέπει

$$\frac{d(\varepsilon^2)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{t=1}^n \beta^{n-t} (x_t - \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \sum_{t=1}^n \beta^{n-t} = \sum_{t=1}^n \beta^{n-t} x_t$$

και επειδή

$$\sum_{t=1}^n \beta^{n-t} = \beta^{n-1} + \dots + \beta + 1 = \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta}$$

έχουμε τελικά ακρότατο για

$$\alpha = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^n} \sum_{t=1}^n \beta^{n-t} x_t \triangleq Y_n \quad (3.3)$$

όπου την α την γράφουμε Y_n **διότι βασίζεται** στις πρώτες n μετρήσεις. Τώρα

$$d^2(\varepsilon^2)/d\alpha^2 > 0$$

για κάθε α που σημαίνει ότι η ε^2 είναι κυρτή και το ακρότατο Y_n είναι ολικό ελάχιστο του ε^2 . Αν αργότερα λάβουμε νέα μετρηση, x_{n+1} θα εύρουμε νέο Y_{n+1} .

Σημαντική παρατήρηση: Όπως αναφέρθηκε στην αρχή, η $Y_n = \alpha$ είναι εκτιμήτρια

- της μέσης τιμής $E(X_t)$ για οποιοδήποτε t ,
- της τιμής της στοχαστικής διαδικασίας την επόμενη χρονική στιγμή, X_{n+1}
- και των μελλοντικών X_{n+k} για $k \geq 1 \dots$

όταν είναι γνωστές μόνο οι n μετρήσεις $x_1, \dots, x_n$. Τη στιγμή n εκτιμούμε την επόμενη τιμή από την Y_n και όταν έλθει η μέτρηση x_{n+1} υπολογίζουμε το **σφάλμα πρόβλεψης**

$$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - Y_n$$

Τώρα εν γένει

$$\begin{aligned}
 Y_n &= \frac{1-\beta}{1-\beta^n} \sum_{t=1}^{n-1} \beta^{n-t} x_t + \frac{1-\beta}{1-\beta^n} x_n \\
 &= \frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta^n} \frac{1-\beta}{1-\beta^{n-1}} \beta \sum_{t=1}^{n-1} \beta^{n-1-t} x_t + \frac{1-\beta}{1-\beta^n} x_n \\
 &= \frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta^n} \beta Y_{n-1} + \frac{1-\beta}{1-\beta^n} x_n.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Για $n \rightarrow \infty$, $\beta^n \rightarrow 0$ και άρα

$$Y_n = \beta Y_{n-1} + (1-\beta)x_n. \tag{3.5}$$

Αυτή είναι μία εξίσωση διαφοράς (λόγω των ορισμάτων n και $n-1$ της συνάρτησης Y).

Αρχική συνθήκη της εξίσωσης είναι

- είτε η $Y_0 = 0$ και $n = 1, 2, \dots$
- είτε η $Y_0 =$ μέσος όρος παρατηρήσεων **πριν την x_1** και $n = 1, 2, \dots$
- είτε η $Y_1 = x_1$ και $n = 2, 3, \dots$

Το β επιλέγεται συνήθως, αλλά όχι πάντα, μεταξύ 0.7 και 0.99.

Συγκρίνοντας την Εξ. (3.3) με τις (3.4) και (3.5) προκύπτει ότι οι τελευταίες έχουν μικρότερο υπολογιστικό κόστος αφού η πρόβλεψη την στιγμή n προκύπτει από την μέτρηση x_n και την τελευταία πρόβλεψη Y_{n-1} και αποφεύγεται ο υπολογισμός του αθροίσματος (3.3).

Όπως είπαμε, όταν έχουμε μετρήσεις ως την x_n , τότε η Y_n είναι εκτιμήτρια και της μέσης τιμής $E(X_i)$ και των $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$. Εν γένει η Y_n δεν είναι ακέραιος αριθμός, ακόμη και όταν τα δεδομένα x_i είναι εξ ορισμού ακέραια (πχ. πωλήσεις αυτοκινήτων). Αν η X_i λαμβάνει ακέραιες τιμές τότε η καλύτερη εκτιμήτρια των $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ είναι ένας από τους δύο πλησιέστερους ακεραίους στην Y_n και τον επιλέγουμε με βάση κάποιο κριτήριο ελαχιστοποίησης του σφάλματος.

Παράδειγμα

Ένα προϊόν πωλείται σε ακέραιες ποσότητες και έχει την ακόλουθη ιστορία:

Εβδομάδα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ζήτηση	15	18	10	12	20	17	22	16	14	20

Έστω ότι $\beta = 0.9$. Ποια είναι η μελλοντική ζήτηση;

Έστω ότι για *αρχική εκτίμηση* χρησιμοποιούμε τον απλό μέσον όρο των 10 πρώτων

παρατηρήσεων $Y_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 16.4$ και έτσι $\hat{X}_t = 16$ ή 17 για $t = 11, 12, \dots$ είναι οι

υποψήφιες αρχικές εκτιμήσεις της ζήτησης ως πλησιέστεροι ακέραιοι. Σύμφωνα με τον πίνακα, η $\hat{X}_t = 17$ έχει μικρότερο σφάλμα με βάρη (80.2 έναντι 83.8). Η $\hat{X}_t = 16$ έχει μικρότερο σφάλμα χωρίς βάρη (130 έναντι 132). Από τα δύο κριτήρια (χωρίς βάρη ή με βάρη) επιλέγεται ένα και η αντίστοιχη βέλτιστη εκτιμήτρια.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
x_t	15	18	10	12	20	17	22	16	14	20	ϵ^2
$0.9^{10-t}(x_t-16)^2$	0.39	1.72	17.22	8.50	9.45	0.66	26.24	0.00	3.60	16.00	83.8
$0.9^{10-t}(x_t-17)^2$	1.55	0.43	23.44	13.29	5.31	0.00	18.23	0.81	8.10	9.00	80.2
$(x_t-16)^2$	1	4	36	16	16	1	36	0	4	16	130
$(x_t-17)^2$	4	1	49	25	9	0	25	1	9	9	132

Για την συνέχεια κρατάμε την $Y_{10} = 16.4$. Έστω ότι την 11η εβδομάδα η ζήτηση είναι 23 και από τότε και μετά υιοθετούμε το μοντέλο εκθετικής εξομάλυνσης $Y_n = 0.9Y_{n-1} + 0.1x_n$. Τότε

$$Y_{11} = 0.9(16.4) + 0.1(23) = 17.06,$$

που είναι η νέα εκτίμηση της $E(X_t)$, και με στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο ακέραιο:

$$\hat{X}_t = 17 \text{ ή } 18, \text{ για } t = 12, 13, \dots$$

Κάνετε πράξεις και εύρετε ποια από τις δύο τιμές ελαχιστοποιεί το ϵ^2 **χωρίς βάρη**. Πρέπει να υπολογίσετε τα $(x_t - 17)^2$ και $(x_t - 18)^2$ για $t = 1, \dots, 11$. (Αν παίρνατε βάρη, θα έπρεπε να βάζατε και δυνάμεις 0.9^{11-t}).

3.4 Εκτίμηση της κατανομής πιθανότητας

Θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία X_t που είναι αμετάβλητη, δηλαδή οι πιθανότητες $P(X_t = x)$ ή (αν η X_t είναι συνεχής και οι σημειακές πιθανότητες δεν ορίζονται) η συνάρτηση κατανομής της δεν εξαρτώνται από τον χρόνο ή μεταβάλλονται αρκετά αργά. Υποθέτουμε ότι οι τιμές της X_t ευρίσκονται σε ένα διάστημα $(\alpha, \beta]$ πάντα ή με πιθανότητα 1, και επίσης $P(X_t \leq \alpha) = 0$. Το $(\alpha, \beta]$ το διαιρούμε σε υποδιαστήματα με ενδιάμεσες τιμές y_i :

$$\alpha = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = \beta.$$

Το πώς επιλέγουμε τα y_i είναι πρόβλημα της Στατιστικής και δεν θα μας απασχολήσει.

Αρχικά αναζητούμε εκτιμήτριες για τις πιθανότητες διαστημάτων

$$P_i \triangleq P(y_{i-1} < X_t \leq y_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Το πρόβλημα αυτό είναι ίδιο με το πρόβλημα εκτίμησης κάποιας μέσης τιμής. Ξεκινάμε

από την $P(y_{i-1} < X_t \leq y_i)$ και ορίζουμε μία άλλη στοχαστική διαδικασία:

$$I_{t,i} = \begin{cases} 1, & \text{αν } y_{i-1} < X_t \leq y_i \\ 0, & \text{αν } X_t > y_i \\ 0, & \text{αν } X_t \leq y_{i-1}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Η μέση τιμή της $I_{t,i}$ είναι

$$E(I_{t,i}) = 1P(y_{i-1} < X_t \leq y_i) + 0P(X_t > y_i) + 0P(X_t \leq y_{i-1}) = P_i. \quad (3.7)$$

Συνεπώς, η P_i είναι πιθανότητα *αλλά και* μέση τιμή. Για να την εκτιμήσουμε θα χρησιμοποιήσουμε την εκτιμήτρια εκθετικής εξομάλυνσης της $I_{t,i}$. Ας δούμε πώς.

Επειδή θέλουμε τις εκτιμήσεις $\hat{P}_i$ για διάφορα i , θα τις θεωρήσουμε ως στοιχεία διανύσματος. Ορίζουμε το διάνυσμα

$$P \triangleq [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_m]^T$$

και το

$$I_t \triangleq [I_{t,1} \ I_{t,2} \ \dots \ I_{t,m}]^T.$$

Εφαρμόζοντας την $E(I_{t,i}) = P_i$ σε κάθε στοιχείο, προκύπτει η ίδια εξίσωση για τα διανύσματα:

$$E(I_t) = P. \quad (3.8)$$

Συμβολίζουμε $\hat{P}_t = [\hat{P}_{t,1} \ \hat{P}_{t,2} \ \dots \ \hat{P}_{t,m}]^T$ την εκτίμηση της $E(I_t)$ αφού λάβουμε πληροφορία για το X_t . Στην προηγούμενη παράγραφο εκτιμήσαμε την $E(X_n)$ με την $Y_n = \beta Y_{n-1} + (1 - \beta)X_n$. Τώρα που έχουμε την $E(I_t)$ και την $\hat{P}_t$, γράφουμε κατ' αντιστοιχία

$$\hat{P}_t = \beta \hat{P}_{t-1} + (1 - \beta)I_t. \quad (3.9)$$

Προφανώς πρέπει

$$\hat{P}_{t,1} + \hat{P}_{t,2} + \dots + \hat{P}_{t,m} = 1, \ \forall t.$$

Την στιγμή t που μαθαίνουμε την νέα τιμή X_t υπολογίζουμε τα $I_{t,i}$ από την (3.6) για κάθε i και σχηματίζουμε το διάνυσμα

$$I_t \triangleq [I_{t,1} \ I_{t,2} \ \dots \ I_{t,m}]^T$$

Για παράδειγμα η παρατήρηση $y_{k-1} < X_t \leq y_k$, αντιστοιχεί στην παρατήρηση-διάνυσμα

$$I_t = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

όπου στην θέση k υπάρχει το 1 και στις υπόλοιπες το 0. Από αυτήν και την $\hat{P}_{t-1}$ υπολογίζεται η νέα εκτίμηση $\hat{P}_t$, σύμφωνα με την εξίσωση εκθετικής εξομάλυνσης (3.9).

Την στιγμή $t = 0$, η αρχική κατανομή πιθανοτήτων $\hat{P}_{0,i}$ μπορεί να είναι (αναλόγως της φύσης της X_t):

i) ομοιόμορφη: $\hat{P}_{0,i} = 1/m$ όπου m ο αριθμός υποδιαστημάτων στο $(y_0, y_m]$

ii) ή ανάλογη του μήκους του διαστήματος $(y_{i-1}, y_i]$: $\hat{P}_{0,i} = (y_i - y_{i-1})/(y_m - y_0)$.

Σε κάθε περίπτωση το άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος $\hat{P}_0$ πρέπει να είναι 1.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε εύρει τις εκτιμήσεις $\hat{P}_{t,i}$ για $i = 1, 2, \dots, m$ και ζητούμε την εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$. Αν $x = y_i$ τότε

$$F(y_i) = P(y_0 < X_t \leq y_1) + P(y_1 < X_t \leq y_2) + \dots + P(y_{i-1} < X_t \leq y_i)$$

οπότε οι αντίστοιχες εκτιμήσεις είναι

$$\hat{F}(y_i) = \hat{P}_{t,1} + \hat{P}_{t,2} + \dots + \hat{P}_{t,i}, i = 1, \dots, m,$$

και $\hat{F}(y_0) = 0$. Αν $y_{i-1} < x < y_i$ τότε με γραμμική παρεμβολή προκύπτει η

$$\hat{F}(x) = \hat{F}(y_{i-1}) + \frac{(x - y_{i-1})[\hat{F}(y_i) - \hat{F}(y_{i-1})]}{y_i - y_{i-1}}. \quad (\text{γιατί;}) \quad (3.10\alpha)$$

Έστω τώρα ότι θέλουμε την εκτίμηση ενός σημείου ξ τέτοιου, ώστε:

$$F(\xi) = P \text{ για δεδομένο } P.$$

Ευρίσκουμε δύο εκτιμήσεις $\hat{F}(y_{i-1})$ και $\hat{F}(y_i)$ έτσι ώστε $\hat{F}(y_{i-1}) < P \leq \hat{F}(y_i)$, απ' όπου με γραμμική παρεμβολή προκύπτει ότι

$$\hat{\xi} = y_{i-1} + \frac{[P - \hat{F}(y_{i-1})](y_i - y_{i-1})}{\hat{F}(y_i) - \hat{F}(y_{i-1})}. \quad (\text{γιατί;}) \quad (3.10\beta)$$

Στο επόμενο παραδειγμα παρουσιάζεται μία εφαρμογή όπου η ζήτηση λαμβάνει διακριτές τιμές και θέλει περισσότερη προσοχή από εκείνη που ορίζεται σε συνεχές διάστημα τιμών.

Παράδειγμα

Ένα προϊόν παράγεται και πωλείται σε ακέραιες ποσότητες. Η ζήτηση κυμαίνεται μεταξύ 0 και 50, και έχει την ακόλουθη εκτίμηση κατανομής την χρονική περίοδο $t - 1$:

i	διάστημα i	$\hat{P}_{t-1,i}$
1	[0, 10]	0.6
2	(10, 20]	0.15
3	(20, 30]	0.15
4	(30, 40]	0.05
5	(40, 50]	0.05

Έστω ότι την περίοδο t η ζήτηση είναι 34. Ποια είναι η νέα εκτίμηση της κατανομής για $\beta = 0.9$; Ποια ποσότητα πρέπει να διαθέσουμε ώστε να καλυφθεί όλη η ζήτηση (ή μην παρατηρηθεί έλλειψη) με πιθανότητα 90% ή μεγαλύτερη; Το ίδιο ερώτημα για πιθανότητα 4%.

Αφού $30 < X_t \leq 40$ έχουμε $I_{t,4} = 1$ και τα υπόλοιπα $I_{t,i} = 0$. Άρα $I_t = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ και

$$\hat{P}_t = 0.9 \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.15 \\ 0.15 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 0.135 \\ 0.135 \\ 0.145 \\ 0.045 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}(0 \leq X_t \leq 10) \\ \hat{P}(10 < X_t \leq 20) \\ \hat{P}(20 < X_t \leq 30) \\ \hat{P}(30 < X_t \leq 40) \\ \hat{P}(40 < X_t \leq 50) \end{bmatrix}.$$

Η συνάρτηση κατανομής στα σημεία y_i λαμβάνει τις εξής τιμές:

$$\hat{F}(10) = 0.54, \hat{F}(20) = 0.54 + 0.135 = 0.675, \hat{F}(30) = 0.675 + 0.135 = 0.81,$$

$$\hat{F}(40) = 0.81 + 0.145 = 0.955, \hat{F}(50) = 1.$$

Τώρα ζητούμε την τιμή ξ για την οποία $F(\xi) = P(X_{t+1} \leq \xi) = 0.9$. Αφού

$$\hat{F}(30) < 0.9 < \hat{F}(40)$$

η εκτίμηση είναι

$$\hat{\xi} = 30 + \frac{(0.9 - 0.81)(40 - 30)}{0.955 - 0.81} = 36.2.$$

Επειδή παράγουμε ακέραιες ποσότητες, η $F(36)$ αντιστοιχεί σε μικρότερη πιθανότητα από 0.9 ενώ η $F(37)$ σε μεγαλύτερη. Επειδή η συνάρτηση κατανομής είναι αύξουσα, επιλέγουμε 37 για να καλύψουμε την ζήτηση με πιθανότητα "μεγαλύτερη" από 0.9, όπως ζητείται.

Για το τελευταίο ερώτημα, παρατηρούμε ότι το $F(\xi) = 0.04 < 0.54$ αντιστοιχεί στο πρώτο διάστημα τιμών. Αν στον τύπο (3.10β) θέταμε $y_0 = 0$, $y_1 = 10$, $\hat{F}(0) = 0$, $\hat{F}(10) = 0.54$ τότε

$$\hat{\xi} = 0 + \frac{(0.04 - 0)(10 - 0)}{0.54 - 0} = 0.74$$

που υποδεικνύει ότι θα έπρεπε να διαθέσουμε τουλάχιστον μία μονάδα. Όμως η εκτίμηση $\hat{F}(0) = 0$ είναι εσφαλμένη, αφού η πιθανότητα μηδενικής ζήτησης *δεν είναι* 0. Επίσης θέσαμε $y_0 = 0$ αλλά το πρώτο διάστημα *δεν είναι ανοικτό* από αριστερά όπως είναι τα άλλα. Το διάστημα αυτό, μαζί με το 0, έχει συνολικά 11 τιμές και όχι 10. Αντί για το κλειστό διάστημα $[0, 10]$ θεωρούμε το ημιανοικτό $(-1, 10]$ και τότε η $\hat{F}(-1) = 0$ είναι σωστή εκτιμήτρια και $y_0 = -1$ είναι το σωστό κάτω όριο γιατί απέχει 11 από το άνω όριο του διαστήματος, όσες είναι και οι ακέραιες τιμές στα $(-1, 10]$ και $[0, 10]$. Ο τύπος (3.10β) τώρα δίνει

$$\hat{\xi} = -1 + \frac{(0.04 - 0)[10 - (-1)]}{0.54 - 0} = -0.185,$$

που σημαίνει ότι $\hat{F}(-0.185) = 0.04$. Αφού η $\hat{F}$ είναι αύξουσα συνάρτηση, αν διαθέσουμε

0, δηλαδή περισσότερο, τρόπος του λέγειν, από -0.185 , τότε η πιθανότητα να μην παρατηρηθεί έλλειψη είναι μεγαλύτερη του 4%. Πράγματι, θέτοντας $x=0$ στην (3.10α) και διάστημα $(y_{i-1}, y_i] = (-1, 10]$ προκύπτει

$$\hat{F}(0) = \hat{F}(-1) + \frac{[0 - (-1)]0.54}{11} = 0.049$$

που υπερβαίνει την ζητούμενη πιθανότητα κάλυψης 0.04. Άρα το σωστό κάτω όριο είναι 0.

3.5 Μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων

3.5.1 Εκτίμηση με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Αρχίζουμε με μερικές γενικότητες από την θεωρία εκτιμήσεων. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε μία τυχαία μεταβλητή Y με μία συνάρτηση $\hat{Y} = g(X)$ μίας άλλης τυχαίας μεταβλητής X που έχει γνωστή κατανομή, έτσι ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$E\{[Y - g(X)]^2\}$$

να είναι ελάχιστο. Για παράδειγμα, X = τιμή προϊόντος, Y = ζήτηση προϊόντος και g μία συνάρτηση που συνδέει τιμή με ζήτηση.

Αρχικά θεωρούμε την εκτιμήτρια $\hat{Y} = \alpha$ σταθερή. Για παράδειγμα, όταν η ζήτηση είναι ανεξάρτητη στοχαστική διαδικασία, ήτοι ανεξάρτητη από προηγούμενες τιμές και ανεξάρτητη από άλλους παράγοντες. Τέτοια διαδικασία περιγράφεται συνήθως ως άθροισμα σταθερού αριθμού με κάποιον λευκό θόρυβο: $Y = \alpha + \text{σφάλμα (λευκός θόρυβος)}$. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την

$$E[(Y - \alpha)^2] = E(Y^2 - 2\alpha Y + \alpha^2) = E(Y^2) - 2\alpha E(Y) + \alpha^2.$$

Ευρίσκουμε το ακρότατο παραγωγίζοντας ως προς α :

$$-2E(Y) + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = E(Y)$$

που κατά κάποιο τρόπο αντιστοιχεί στο μέσο όρο που είδαμε ήδη. Η δεύτερη παράγωγος είναι 2, θετική, που σημαίνει ότι η εκτιμήτρια $E(Y)$ της Y ελαχιστοποιεί το σφάλμα ή

$$E[[Y - E(Y)]^2] \leq E[(Y - \alpha)^2] \text{ για κάθε } \alpha.$$

Αν η Y είναι απολύτως συνεχής τυχαία μεταβλητή και έχει πυκνότητα $f(y)$ τότε

$$E[(Y - \alpha)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \alpha)^2 f(y) dy. \quad (3.11)$$

Παραγωγίζοντας το ολοκλήρωμα ως προς α (βλ. τύπο Leibniz στην υποσημείωση της Ενότητας 2.9) και εξισώνοντας με 0 προκύπτει η ίδια συνθήκη ακροτάτου: $\alpha = E(Y)$.

Συνεχίζουμε με μια εν γένει συνάρτηση $g(X)$. Συμβολίζουμε $f(x, y)$ την κοινή πυκνότητα πιθανότητας των X και Y (αν οι X και Y δεν είναι απολύτως συνεχείς, τότε η πυκνότητα υπάρχει ως γενικευμένη συνάρτηση). Γράφουμε

$$E\{[Y - g(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [y - g(x)]^2 f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} [y - g(x)]^2 f(y|x) dy \right) dx.$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο της υπό συνθήκη πυκνότητας πιθανότητας $f(y|x) f(x) = f(x, y)$. Αφού η X έχει γνωστή κατανομή, το $f(x)$ είναι δεδομένο για κάθε x . Ελαχιστοποιούμε το μεσαίο ολοκλήρωμα ως προς $g(x)$

$$\min_{\substack{g(x) \\ x=\text{σταθ.}}} \int_{-\infty}^{\infty} [y - g(x)]^2 f(y|x) dy$$

το οποίο υπολογίζεται για δεδομένο x (άρα $x=\text{σταθ.}$ στον τύπο). Αφού το x είναι δεδομένο στο μεσαίο ολοκλήρωμα, το ίδιο είναι το $g(x)$. Αν θέσουμε $g(x) = \alpha$ καταλήγουμε σε όμοιο πρόβλημα με εκείνο που είδαμε πριν, με λύση $\alpha = E(Y)$, μόνο που αντί για το $f(y)$ που είχαμε στην Εξ. (3.11) εδώ έχουμε $f(y|x)$. Για τον λόγο αυτό, το ελάχιστο επιτυγχάνεται από την υπό συνθήκη μέση τιμή $\alpha = E(Y|X=x)$. Γράφουμε

$$\hat{Y} = E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy \quad (3.12)$$

που είναι η γενική λύση του προβλήματος εκτίμησης με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

Σημειώστε ότι η $E(Y|X=x)$ θα υπολογιστεί ολοκληρώνοντας για όλες τις τιμές y της Y και είναι μία συνάρτηση μόνον του x , όχι των y ή Y . Ο υπολογισμός της $f(y|x)$ γίνεται με τη βοήθεια της επόμενης εκτιμήτριας.

3.5.2 Εκτίμηση Bayes

(Bayes estimation)

Έχουμε n παρατηρήσεις $x_1, \dots, x_n$ και θέλουμε να εκτιμήσουμε κάποια παράμετρο σχετική μ' αυτές τις μετρήσεις, την οποία συμβολίζουμε θ . Για παράδειγμα γνωρίζουμε τις τιμές της ζήτησης $X_t = x_t$ για τους μήνες $t = 1, \dots, n$ και ζητούμε την πρόβλεψη για την $\theta = X_{n+1}$, ή την εκτίμηση για την μέση τιμή $\theta = E(X_{n+1})$. Είδαμε ότι η εκτιμήτρια των ελαχίστων τετραγώνων είναι η υπό συνθήκη μέση τιμή:

$$\hat{\theta} = E(\theta | x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta | x_1, \dots, x_n) d\theta. \quad (3.13)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρειαζόμαστε την υπό συνθήκη πυκνότητα

$$f(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f_1(x_1, \dots, x_n | \theta) f_2(\theta)}{f_3(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f_1(x_1, \dots, x_n | \theta) f_2(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_4(x_1, \dots, x_n, \theta) d\theta}$$

$$= \frac{f_1(x_1, \dots, x_n | \theta) f_2(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, \dots, x_n | \theta) f_2(\theta) d\theta} \quad (3.14)$$

όπου f_1, f_2, f_3, f_4 είναι πυκνότητες πιθανότητας. Η έκφραση (3.14) είναι ο *τύπος του Bayes* για πυκνότητες πιθανότητας.

Η f_2 είναι η αρχική (a priori ή prior) κατανομή της θ , την οποία θα χρησιμοποιούσαμε ως εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων για την $\hat{\theta} = E(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f_2(\theta) d\theta$, αν δεν γνωρίζαμε τις τιμές $x_1, \dots, x_n$. Όταν διαθέτουμε περισσότερη πληροφορία, ο τύπος Bayes δίνει την δυνατότητα να την εκμεταλλευθούμε.

3.5.3 Εφαρμογή στην εκτίμηση της μέσης ζήτησης

Έστω ότι η μηνιαία ζήτηση X_i ενός προϊόντος

- είναι ανεξάρτητη από μήνα σε μήνα
- έχει μέση τιμή μ που δεν είναι γνωστή με ακρίβεια
- έχει γνωστή διασπορά $\sigma^2 \triangleq E[(X_i - \mu)^2]$
- και η X_i ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

Η περίπτωση άγνωστης σ^2 είναι πιο ρεαλιστική αλλά ακόμη πιο δύσκολη. Δοθείσης της μέσης τιμής μ , η πυκνότητα πιθανότητας της X_i γράφεται

$$f(x | \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ζητούμε μία εκτιμήτρια του μ που βασίζεται σε δύο πληροφορίες:

- 1) Η άγνωστη τιμή του μ ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ με a priori πυκνότητα

$$f_2(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

όπου μ_0 και σ_0^2 είναι γνωστά. Ας σημειωθεί ότι το μ , ως μέση τιμή, μπορεί να είναι σταθερό (ούτε μεταβαλλόμενο ούτε τυχαίο) αλλά η γνώση μας δεν είναι ακριβής και το θεωρούμε ως τυχαία μεταβλητή. Αν δεν είχαμε άλλη πληροφορία, τότε η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων του μ θα ήταν η μ_0 .

- 2) Έστω τώρα ότι, εκτός από την αρχική πληροφορία, έχουμε και δεδομένα της ζήτησης για n μήνες: $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Θα εκτιμήσουμε το μ συνδυάζοντας τα δύο αυτά είδη πληροφορίας. Επειδή η X_i είναι ανεξάρτητη στοχαστική διαδικασία έχουμε ότι

$$f_1(x_1, \dots, x_n | \mu) = f(x_1 | \mu) \dots f(x_n | \mu)$$

και επειδή η X_i έχει κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$,

$$f_1(x_1, \dots, x_n | \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}.$$

Αντικαθιστούμε στην Εξ. (3.14):

$$f(\mu | x_1, \dots, x_n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} d\mu}$$

Μετά από αρκετή άλγεβρα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή¹ και τελικά

$$f(\mu | x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} e^{-\frac{(\mu-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}} \quad (3.15)$$

όπου έχουμε ορίσει

$$\hat{\mu} \triangleq \bar{x} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2 / n} + \mu_0 \frac{\sigma^2 / n}{\sigma_0^2 + \sigma^2 / n} \quad (3.16)$$

$$\hat{\sigma}^2 \triangleq \frac{\sigma_0^2 \sigma^2 / n}{\sigma_0^2 + \sigma^2 / n} \quad (3.17)$$

$$\text{και } \bar{x} \triangleq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \text{ ο μέσος όρος των παρατηρήσεων.}$$

Βλέπουμε ότι η (3.15) είναι πυκνότητα κανονικής κατανομής. Συνεπώς, χωρίς να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στον παρονομαστή, μπορούμε να γράψουμε

$$E(\mu | x_1, \dots, x_n) = \hat{\mu} \text{ και } \text{Var}(\mu | x_1, \dots, x_n) = \hat{\sigma}^2$$

και άρα η (3.16) είναι η εκτιμήτρια της μέσης τιμής μ με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Παρατηρήστε ότι, αν και διαθέτουμε τα $x_1, \dots, x_n$, η εκτίμηση Bayes βασίζεται μόνο στον μέσο τους $\bar{x}$ και το πλήθος τους n . Αυτή η σημαντική ιδιότητα

¹Προσθέτουμε τους εκθέτες του e . Αναπτύσσουμε τα αθροίσματα και συγκεντρώνουμε όρους με κοινούς παράγοντες μ^2 και μ . Με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις, τους κάνουμε τέλειο τετράγωνο $-A(\mu + B)^2 + \Gamma$, για κάποια A, B, Γ . Κατόπιν υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας την ιδιότητα της κανονικής

κατανομής $N(0, s^2)$: $\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2s^2} dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2s^2} dx = s\sqrt{2\pi}$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $s > 0$.

οφείλεται στην υπόθεση της κανονικής κατανομής.

Παράδειγμα

Κάποιο προϊόν έχει ζήτηση με κατανομή $N(\mu, 2500)$. Από πείρα ξέρουμε ότι $\mu \sim N(\mu_0 = 200, \sigma_0^2 = 25)$. Έχουμε 25 δεδομένα με μέσον όρο $\bar{x}$. Η εκτίμηση είναι:

$$\hat{\mu} = \bar{x} \frac{25}{25 + 2500/25} + 200 \frac{2500/25}{25 + 2500/25} = \frac{1}{5} \bar{x} + \frac{4}{5} 200.$$

Βλέπουμε ότι η εκτίμηση Bayes δίνει τετραπλάσιο βάρος στο μ_0 απ' όσο στο $\bar{x}$. Μετά από $n = 100$ δεδομένα, θα βάλουμε ακριβώς ίσα βάρη και στα δύο, επειδή τότε το $\bar{x}$ θα βασίζεται σε περισσότερες μετρήσεις.

3.6 Μοντέλα Box-Jenkins

(Box-Jenkins models)

3.6.1 Υποθέσεις και περιγραφή των μοντέλων

Ως τώρα υποθέσαμε ότι έχουμε μία σειρά ανεξάρτητων παρατηρήσεων κάποιας στοχαστικής διαδικασίας από τις οποίες κάνουμε την εκτίμηση της μέσης τιμής μ της διαδικασίας. Όταν οι παρατηρήσεις είναι εξαρτημένες από άλλες διαδικασίες ή από προηγούμενες τιμές της ίδιας διαδικασίας, τότε μπορούμε να αναπτύξουμε γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης, παρόμοια με εκείνα που είδαμε στην Παράγραφο 3.1. Πρόκειται για τα μοντέλα:

MA: κινούμενου μέσου όρου (moving average),

AR: αυτοπαλινδρομικά (autoregressive),

ARMA: αυτοπαλινδρομικά κινούμενου μέσου (autoregressive moving average)

ARIMA: ολοκληρωμένα αυτοπαλινδρομικά κινούμενου μέσου (autoregressive integrated moving average),

Έστω ότι έχουμε μία χρονοσειρά n τιμών $x_1, x_2, \dots, x_n$ της στοχαστικής διαδικασίας X_t σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Υποθέτουμε ότι η X_t είναι *αμετάβλητη κατά την ευρεία έννοια*, άρα η $E(X_t) = \mu$, αυτοσυμμεταβλητότητες $C_{XX}(k) = E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)]$ και οι αυτοσυσχετίσεις $R_{XX}(k) = E(X_t X_{t-k})$ δεν εξαρτώνται από το t . Όμως η X_t κάθε στιγμή t συσχετίζεται με κάποιον τρόπο με τις τιμές της διαδικασίας σε προηγούμενους χρόνους. Εξετάζουμε στην συνέχεια δύο ειδών συσχετίσεις και κάποιους συνδυασμούς τους.

Έστω ότι η X_t είναι γραμμικός συνδυασμός μίας σταθεράς μ με ανεξάρτητες τυχαίες

μεταβλητές a_t :

$$X_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Τα θ_k είναι παράμετροι του μοντέλου¹. Υποθέτουμε ότι

- η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{a_t, t = 1, 2, \dots\}$ είναι ανεξάρτητη, κανονική (Gauss), με μέση τιμή $E(a_t) = 0$ και διασπορά $\text{Var}(a_t) = \sigma_a^2$, άρα λευκή κανονική ακολουθία
- και τα X_t είναι ανεξάρτητα από μελλοντικά $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots$

Ορίζουμε $Y_t \triangleq X_t - \mu$, οπότε

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.18)$$

Το a_t λέγεται και *υπόλοιπο* (residual) του μοντέλου γιατί είναι η ποσότητα που μας λείπει την στιγμή t για να προβλέψουμε ακριβώς την X_t , αν γνωρίζαμε την μ , τις παραμέτρους θ_k του μοντέλου και τις προηγούμενες τιμές $a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$.

Στην συνέχεια ορίζουμε τον *τελεστή αντίστροφης μετατόπισης* B (backward shift operator) για κάθε στοχαστική διαδικασία Z_t :

$$BZ_t \triangleq Z_{t-1}, B^j Z_t = Z_{t-j}, B^{-1} Z_t \triangleq Z_{t+1}.$$

Ο B δεν είναι αριθμός ούτε συνάρτηση αλλά γραμμικός τελεστής, κάτι αντίστοιχο του τελεστή παραγώγισης d/dt . Η (3.18) γράφεται:

$$Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \Theta_q(B) a_t \quad (3.19)$$

Η Y_t που ικανοποιεί την Εξ. (3.19) λέγεται διαδικασία *κινούμενου μέσου όρου* τάξης q ή $MA(q)$. Οι διαδικασίες $MA(1)$ και $MA(2)$ είναι

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1},$$

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}.$$

Το μοντέλο, εν γένει, έχει $q + 3$ αγνώστους: $\mu, \sigma_a^2, q, \theta_1, \dots, \theta_q$.

Τώρα εξετάζουμε τα λεγόμενα μοντέλα AR . Η διαδικασία

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t \quad (3.20)$$

λέγεται *αυτοπαλινδρομική διαδικασία* $AR(p)$, επειδή η Y_t εξαρτάται από παλαιότερες τιμές της στους χρόνους $t-1, t-2$, κ.λπ. Χρησιμοποιώντας τον τελεστή B ευρίσκουμε:

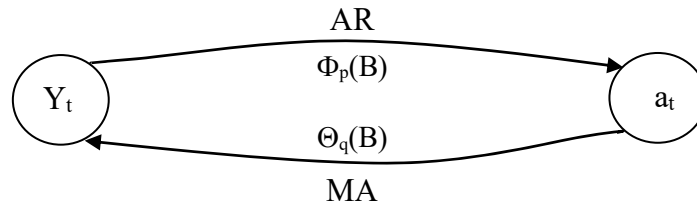
$$Y_t = \phi_1 B Y_t + \phi_2 B^2 Y_t + \dots + \phi_p B^p Y_t + a_t = (\phi_1 B + \phi_2 B^2 + \dots + \phi_p B^p) Y_t + a_t$$

$$\text{ή } \Phi_p(B) Y_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Y_t = a_t. \quad (3.21)$$

Το μοντέλο έχει $p + 3$ αγνώστους, $\mu, \sigma_a^2, p, \phi_1, \dots, \phi_p$, που θα εκτιμηθούν από τα

¹ Τα $-$ συνηθίζονται στα βιβλία της πρόβλεψης αλλά δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα αφού τα a_{t-k} μπορεί να έχουν θετικές ή αρνητικές τιμές.

δεδομένα.



Από το σχήμα φαίνεται μια δυαδική συμπεριφορά ανάμεσα στα μοντέλα AR και MA. Είναι ενδιαφέρον να ιδούμε αυτή την δυαδικότητα αναλυτικά. Έστω η διαδικασία MA(1)

$$Y_t = a_t - \theta_1 B a_t = (1 - \theta_1 B) a_t \Rightarrow a_t = (1 - \theta_1 B)^{-1} Y_t$$

Η άλγεβρα τελεστών B και η άλγεβρα πολυωνύμων έχουν όμοιες ιδιότητες: Γνωρίζουμε ότι αν $|x| < 1$ τότε $1 + x + x^2 + \dots = 1/(1 - x) = (1 - x)^{-1}$. Αν $|\theta_1| < 1$, τότε

$$a_t = (1 - \theta_1 B)^{-1} Y_t = (1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \dots) Y_t$$

που είναι διαδικασία AR(∞).

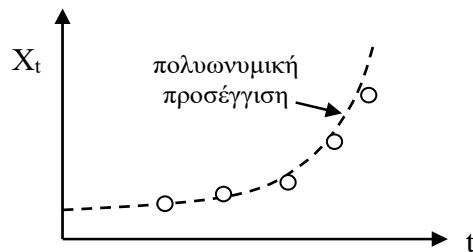
Τα δύο μοντέλα AR και MA μπορούν ακόμη να συνδυασθούν και έτσι έχουμε την διαδικασία ARMA(p, q):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t$$

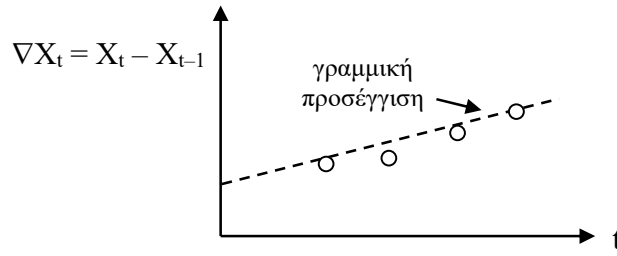
$$\Rightarrow \Phi_p(B) Y_t = \Theta_q(B) a_t \quad (3.22)$$

όπου από τα δεδομένα $x_1, x_2, \dots, x_n$ πρέπει να προσδιορίσουμε $p + q + 4$ αγνώστους: $\mu, \sigma_a^2, p, q, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$.

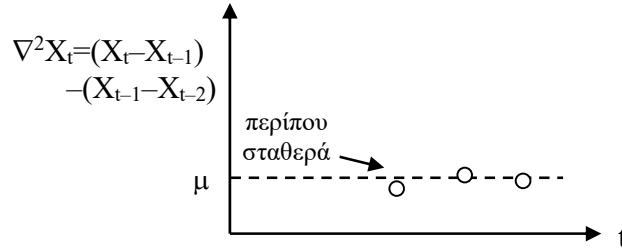
Ένα ακόμη γενικότερο μοντέλο είναι ο *αυτοπαλινδρομικός ολοκληρωμένος κινούμενος μέσος όρος* (Autoregressive Integrated Moving Average - ARIMA). Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται όταν μία στοχαστική διαδικασία δεν είναι χρονικά αμετάβλητη. Για παράδειγμα μπορεί να έχει αύξουσα, φθίνουσα, ακόμη και περιοδική μέση τιμή μ . Έστω ότι έχουμε τα δεδομένα:



Η X_t δεν είναι αμετάβλητη κατά την ευρεία έννοια. Αν πάρουμε την πρώτη διαφορά $X_t - X_{t-1}$ τότε έχουμε



η οποία επίσης δεν είναι αμετάβλητη. Η δεύτερη διαφορά $(X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})$ είναι:



Μετά από δύο διαφορές προέκυψε μία διαδικασία αμετάβλητη. Οι διαφορές συμβολίζονται

$$\nabla X_t \triangleq X_t - X_{t-1}$$

και

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla X_t) = (\nabla X_t) - (\nabla X_{t-1}) \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}. \end{aligned}$$

Το ∇ είναι τελεστής (αντίστοιχος με την κλίση συναρτήσεων συνεχούς χρόνου) και

$$\nabla \triangleq 1 - B \text{ και } \nabla^d = (1 - B)^d.$$

Επιδιώκουμε, με κατάλληλες διαφορίσεις, η αρχική διαδικασία X_t να γίνει χρονικά αμετάβλητη $\nabla^d X_t$. Ευρίσκουμε μίαν εκτίμηση της μέσης τιμής $\mu = E(\nabla^d X_t)$ και την αφαιρούμε, οπότε προκύπτει η

$$Y_t \triangleq \nabla^d X_t - \mu$$

που έχει $E(Y_t) = 0$. Τώρα μπορούμε να δοκιμάσουμε ένα μοντέλο ARMA για την Y_t . Το συνολικό μοντέλο της X_t είναι το ολοκληρωμένο ARIMA(p, d, q):

$$\Phi_p(B)(\nabla^d X_t - \mu) = \Theta_q(B)a_t \quad \text{ή} \quad \Phi_p(B)Y_t = \Theta_q(B)a_t. \quad (3.23)$$

Το ARIMA(p, d, q) περιλαμβάνει όλα τα προηγούμενα: με $d = 0$, για παράδειγμα, γίνεται ARMA(p, q).

Όταν η X_t έχει περιοδικότητα s μονάδες χρόνου όπως η ζήτηση εποχικών αγαθών (αναψυκτικά, καλοκαιρινά ρούχα, κ.λπ.) παίρνουμε απλές διαφορές

$$X_t - X_{t-s} = (1 - B^s)X_t.$$

Δύο περιοδικότητες s και r μπορούν να συνδυασθούν με τον μετασχηματισμό $(1 - B^s)(1 - B^r)X_t$.

Παράδειγμα

Η ωριαία κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας είναι όμοια τις ίδιες ώρες διαφορετικών ημερών και τις ίδιες ημέρες διαφορετικών εβδομάδων. Μπορούμε τότε να δοκιμάσουμε τρεις εναλλακτικούς μετασχηματισμούς

$$Y_t = (1 - B^{24}) \quad \text{ή} \quad Y_t = (1 - B^{168})X_t \quad \text{ή} \quad Y_t = (1 - B^{24})(1 - B^{168})X_t$$

όπου $24 \times 7 = 168$ για εβδομαδιαία περιοδικότητα. Ο συνδυασμός των δύο μετασχηματισμών αναλύεται σε επί μέρους συνιστώσες ως εξής:

$$Y_t = (1 - B^{24})(1 - B^{168})X_t = (1 - B^{24} - B^{168} + B^{168+24})X_t = X_t - X_{t-24} - X_{t-168} + X_{t-192}.$$

Στο εξής υποθέτουμε ότι η X_t έχει μετασχηματισθεί στην Y_t που έχει $E(Y_t) = 0$ και είναι αμετάβλητη κατά την ευρεία έννοια. Δηλαδή οι αυτοσυμμεταβλητότητες της Y_t

$$\gamma_k \triangleq E(Y_t Y_{t-k})$$

δεν μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου t .

Η πλέον απλή περίπτωση είναι εκείνη που η Y_t είναι λευκός θόρυβος, δηλαδή $\gamma_k \approx 0$ για $k \neq 0$, διότι τότε πλέον δεν επιδέχεται περαιτέρω μοντελοποίησης. Πράγματι, έστω ότι n είναι ο πρόσφατος χρόνος και οι τιμές $y_n, y_{n-1}, \dots$ έχουν ευρεθεί από μετασχηματισμούς των $x_n, x_{n-1}, \dots$ και είναι γνωστές. Η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων για την στιγμή $n+1$ είναι $\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1} | Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots)$. Αν η Y_t είναι λευκός θόρυβος, είναι ανεξάρτητη, άρα $\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1} | Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots) = E(Y_{n+1})$ και επειδή έχει μέση τιμή 0 καταλήγουμε στην εκτίμηση:

$$\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1}) = 0 \text{ για κάθε λευκό θόρυβο } Y_t \text{ με μέση τιμή } 0.$$

Έχοντας την εκτίμηση $\hat{Y}_{n+1}$ υπολογίζουμε την $\hat{X}_{n+1}$ με αντίστροφες πράξεις από εκείνες που οδήγησαν στην Y_t . Ας το δούμε αυτό με το ακόλουθο:

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε δεδομένα $x_1, \dots, x_n$ και το μοντέλο $(1 - B^{24})(1 - B^{168})X_t = a_t$. Αντικαθιστώντας $Y_t = a_t$ στην τελευταία εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος και λύνοντας ως προς X_t , ευρίσκουμε

$$X_t = a_t + X_{t-24} + X_{t-168} - X_{t-192}$$

Η εκτίμηση για $t = n+1$ είναι:

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{a}_{n+1} + \hat{X}_{n+1-24} + \hat{X}_{n+1-168} - \hat{X}_{n+1-192} = 0 + x_{n-23} + x_{n-167} - x_{n-191}.$$

Για την εκτίμηση του μοντέλου που περιγράφει την Y_t χρησιμοποιούνται συνήθως οι αυτοσυμμεταβλητότητες γ_k και οι *συντελεστές αυτοσυσχέτισης*

$$\rho_k \triangleq \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \text{ με } \rho_0 = 1.$$

Αν ξεκινήσουμε από τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ και τις μετασχηματίσουμε με διαφορίσεις, τότε προκύπτουν οι τιμές y_t της Y_t . Οι ακόλουθοι τύποι δίνουν τις δειγματικές εκτιμήσεις:

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t, \quad \hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}) \quad \text{και} \quad \hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}. \quad (3.24)$$

Η διασπορά του δειγματικού μέσου $\bar{y}$ είναι περίπου $\hat{\gamma}_0 / n$. Για $n \gg k$ και συνήθεις χρονοσειρές, τα $\hat{\rho}_k$ έχουν περίπου κανονική κατανομή γύρω από τα ρ_k με διασπορά $1/n$ ή τυπική απόκλιση $1/n^{0.5}$. Συνιστάται $k \leq n/4$, ώστε το $n - k$ να είναι αρκετά μεγάλο και τα αθροίσματα των γ_k να έχουν αρκετούς όρους.

Συμβολίζουμε $c_k \triangleq E(a_t a_{t-k})$ τις άγνωστες αυτοσυμμεταβλητότητες των a_t (c_0 είναι η διασπορά των a_t που την έχουμε επίσης συμβολίσει σ_a^2) και $r_k = c_k / c_0$ τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης. Το βασικό κριτήριο για την καταλληλότητα του μοντέλου είναι $r_k = 0$ για $k \neq 0$ ώστε τα υπόλοιπα, a_t , να είναι λευκές ακολουθίες. Επειδή τα a_t και r_k είναι άγνωστα, κάνουμε έλεγχο υποθέσεων χρησιμοποιώντας τις δειγματικές αυτοσυσχετίσεις. Οι εκτιμήτριες $\hat{r}_k$ προκύπτουν από τύπους ανάλογους των (3.24). Με βάση την στατιστική, "δεν απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση ότι $r_k = 0$ " για $k \neq 0$ αν

$$|\hat{r}_k| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$$

(αν δεν θυμάστε την ορολογία του στατιστικού ελέγχου υποθέσεων, τότε ερμηνεύστε το προηγούμενο ως "δεχόμαστε ότι $r_k = 0$ "). Το 2 είναι προσέγγιση του 1.96 το οποίο είναι η τιμή εκείνη της κανονικής κατανομής (Παράρτημα Β) για την οποία

$$P(\hat{r}_k > 1.96 \mid r_k = 0) = 0.025$$

και λόγω συμμετρίας

$$P(\hat{r}_k < -1.96 \mid r_k = 0) = 0.025.$$

Οι υπό συνθήκη πιθανότητες ερμηνεύονται ως εξής: τα ενδεχόμενα ώστε η $\hat{r}_k$ να μετρηθεί πολύ μεγάλη (> 1.96) ή πολύ μικρή (< -1.96) έχουν μικρές πιθανότητες όταν (δοθέντος ότι) ισχύει η μηδενική υπόθεση $r_k = 0$. Τελικά

$$P(-1.96 \leq \hat{r}_k < 1.96 \mid r_k = 0) = 0.95.$$

Αν ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης έχει κατ' απόλυτη τιμή μέγεθος $> 1.96/n^{0.5}$, τότε *απορρίπτεται* η υπόθεση ότι ο πραγματικός συντελεστής συσχέτισης είναι 0, για

επίπεδο σημαντικότητας 0.05. Συνεπώς η διαδικασία *δεν είναι ασυσχέτιστη* άρα δεν είναι λευκός θόρυβος.

Παράδειγμα

Έστω τα δεδομένα, με $\bar{x} = 51$.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	47	64	23	71	38	64	55	41	59	48
$x_t - \bar{x}$	-4	13	-28	20	-13	13	4	-10	8	-3

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^{10} (x_t - \bar{x})^2 = \frac{(-4)^2 + 13^2 + \dots + (-3)^2}{10} = 189.6,$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^9 (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x}) = \frac{-4 \cdot 13 + 13(-28) + \dots + 8(-3)}{10} = -149.7,$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{-149.7}{189.6} = -0.79.$$

Έχουμε $2/10^{0.5} = 2/3.16 = 0.63$, άρα τα x_t δεν είναι λευκά και πρέπει να μοντελοποιηθούν.

Αν ένα μοντέλο της X_t έχει όρους AR, τότε χρειάζεται προηγούμενες μετρήσεις x_{t-1} , $x_{t-2}, \dots$. Αν έχει όρους MA, πρέπει να εκτιμηθούν τα προηγούμενα υπόλοιπα a_{t-1} , $a_{t-2}, \dots$. Αυτά δεν είναι μετρήσιμα και τα εκτιμούμε από τα *σφάλματα* $\hat{a}_{t-1}$, $\hat{a}_{t-2}, \dots$ *προηγούμενων* προβλέψεων όπως θα δούμε. Η μοντελοποίηση ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Συλλογή δεδομένων, μετασχηματισμοί των x_t σε y_t , και υπολογισμοί δειγματικών εκτιμήσεων (μέση τιμή, αυτοσυμμεταβλητότητες γ_k , αυτοσυσχετίσεις ρ_k).
2. Επιλογή μορφής (AR, MA, ARMA, ή ARIMA) του μοντέλου:

$$X_t = \text{συνάρτηση}(\text{παλαιότερων } X_{t-1}, X_{t-2}, \dots \text{ και } a_{t-1}, a_{t-2}, \dots) + a_t$$

3. Εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου: διαφορές (d, s, r), τάξεις (p, q), συντελεστές AR (θ_k) και MA (ϕ_k), διασπορά υπολοίπων σ_a^2 .
4. Πρόβλεψη για την επόμενη τιμή $\hat{X}_{n+1}$:
 - Εκτίμηση αρχικών και παλαιότερων υπολοίπων: $\hat{a}_0, \hat{a}_{-1}, \hat{a}_{-2}, \dots$ (συνήθως όλα 0)
 - Επαναληπτικοί υπολογισμοί για $t=1, 2, \dots, n$:

$$\text{πρόβλεψη } \hat{X}_t = \text{μοντέλο-συνάρτηση των } x_{t-1}, x_{t-2}, \dots \text{ και } \hat{a}_{t-1}, \hat{a}_{t-2}, \dots$$

$$\text{σφάλμα πρόβλεψης } x_t - \hat{X}_t = \hat{a}_t, \text{ που είναι η εκτίμηση του υπολοίπου } a_t.$$
 - Τα $\hat{a}_t$ χρησιμοποιούνται στις επόμενες προβλέψεις $\hat{X}_{t+1}, \dots, \hat{X}_n$ και στην $\hat{X}_{n+1}$ αν το μοντέλο έχει όρους MA. Αν είναι μόνο AR, τότε δεν χρειάζονται.
5. Επαλήθευση ότι τα σφάλματα $\hat{a}_t$ είναι λευκός θόρυβος: πρέπει οι αυτοσυσχετίσεις

τους να είναι μικρές ($\hat{r}_k \leq 2/n^{0.5}$). Αν δεν είναι, τότε δοκιμάζουμε άλλο μοντέλο και επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο από το βήμα 3.

Στην συνέχεια περιγράφουμε δύο μεθόδους εκτίμησης παραμέτρων για μοντέλα AR.

3.6.2 Εκτίμηση παραμέτρων αυτοπαλινδρομικού μοντέλου

Έχουμε μετασχηματίσει την X_t σε μία αμετάβλητη διαδικασία Y_t με $E(Y_t) = 0$ και δεδομένα $y_1, \dots, y_n$. Έστω ότι η Y_t περιγράφεται από ένα μοντέλο AR(p):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t.$$

Στην Παράγραφο 3.1 είδαμε ένα όμοιο μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης

$$\hat{Y}_t = \phi_1 f_1(t) + \dots + \phi_p f_p(t)$$

όπου $f_k(t) = y_{t-k}$. Η Εξ. (3.2) εκεί μας δίνει το διάνυσμα παραμέτρων $\alpha = [\phi_1 \dots \phi_p]^T$ το οποίο ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Η επόμενη μέθοδος οδηγεί στην εκτίμηση και των συντελεστών ϕ_k και της τάξης p του μοντέλου. Ξεκινάμε με τον υπολογισμό των αυτοσυσχετίσεων ρ_k της Y_t . Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t$ με Y_{t-k} για $k = 1, \dots, p$, υποθέτοντας αρχικά ότι το p είναι γνωστό:

$$Y_t Y_{t-k} = \phi_1 Y_{t-1} Y_{t-k} + \dots + \phi_{k-1} Y_{t-(k-1)} Y_{t-k} + \phi_k Y_{t-k} Y_{t-k} + \phi_{k+1} Y_{t-(k+1)} Y_{t-k} + \dots + \phi_p Y_{t-p} Y_{t-k} + a_t Y_{t-k}$$

Παίρνουμε προσδοκητές τιμές (είναι ίδιες με τα γ_k επειδή $E(Y_t)=0$) και έχουμε

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_{k-1} \gamma_1 + \phi_k \gamma_0 + \phi_{k+1} \gamma_{-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + E(a_t Y_{t-k}) \\ &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_{k-1} \gamma_1 + \phi_k \gamma_0 + \phi_{k+1} \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \end{aligned}$$

επειδή

- $E(Y_{t-k+m} Y_{t-k}) = \gamma_{-m} = E(Y_{t-k-m} Y_{t-k}) = \gamma_m$, αφού μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τους όρους στα γινόμενα $Y_{t-k+m} Y_{t-k}$ και τα αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από το $t-k$ (η διαδικασία Y_t είναι αμετάβλητη),
- και $E(a_t Y_{t-k}) = 0$, επειδή η Y_{t-k} και τα μελλοντικά a_t είναι ανεξάρτητες διαδικασίες άρα και ασυσχέτιστες, δηλαδή $E(a_t Y_{t-k}) = E(a_t) E(Y_{t-k}) = 0$ αφού και οι δύο έχουν μέση τιμή 0.

Μπορούμε να γράψουμε για συντομία

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{|k-1|} + \phi_2 \gamma_{|k-2|} + \dots + \phi_p \gamma_{|k-p|}.$$

Διαιρούμε δια γ_0 και προκύπτει ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{|k-1|} + \phi_2 \rho_{|k-2|} + \dots + \phi_p \rho_{|k-p|}. \quad (3.25)$$

Αντικαθιστώντας $k = 1, 2, \dots, p$ στην ανωτέρω και $\rho_0 = 1$, καταλήγουμε στις λεγόμενες εξισώσεις Yule-Walker

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{p1} \\ \phi_{p2} \\ \vdots \\ \phi_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

όπου αντί για ϕ_k γράψαμε ϕ_{pk} για να τονίσουμε ότι *βασίζονται στην υπόθεση ότι η διαδικασία έχει τάξη p*. Η λύση του γραμμικού συστήματος ευρίσκεται με τον αντίστροφο πίνακα:

$$\begin{bmatrix} \phi_{p1} \\ \phi_{p2} \\ \vdots \\ \phi_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

ή άλλη μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Παρατήρηση: Ο συντελεστής ϕ_{pk} του όρου Y_{t-k} για το μοντέλο $AR(p)$ διαφέρει από τον *αντίστοιχο* συντελεστή ϕ_{pk} ενός μοντέλου $AR(p')$ διαφορετικής τάξης.

Εκτιμούμε τα ρ_k με τις δειγματικές τους τιμές από τα δεδομένα y_t , $t = 1, \dots, n$. Ακολουθώντας δοκιμάζουμε *πιθανές τάξεις* $p = 1, 2, \dots$ λύνοντας κάθε φορά την Εξ. (3.26). Σταματάμε όταν από κάποιο p και μετά *οι τελευταίοι συντελεστές* $\hat{\phi}_{p+1p+1}, \hat{\phi}_{p+2p+2}, \dots$ είναι $< 2 / \sqrt{n}$. Το μοντέλο $AR(p)$ θεωρείται ως το πλέον κατάλληλο αφού οι συντελεστές ανώτερων τάξεων είναι ≈ 0 .

Η καταλληλότητα του γενικού μοντέλου AR ελέγχεται, όπως είπαμε, από την αυτοσυσχέτιση των υπολοίπων a_t , $t = 1, 2, \dots, n$, τα οποία πρέπει να είναι λευκοί θόρυβοι. Αυτά τα εκτιμούμε από τα σφάλματα πρόβλεψης $\hat{a}_t \triangleq y_t - \hat{Y}_t$.

Από το μοντέλο υπολογίζουμε την πρόβλεψη $\hat{Y}_{n+1}$ και με αντίστροφο μετασχηματισμό $Y_t \rightarrow X_t$ ευρίσκουμε $\hat{X}_{n+1}$. Όλη η διαδικασία φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα

Έχουμε $n = 300$ δεδομένα του Πίνακα 3.1. Παρατηρούμε ότι η διαδικασία δεν είναι αμετάβλητη, αφού ο μέσος όρος της αυξάνει συνεχώς.

Πίνακας 3.1. Η χρονοσειρά x_t ($n = 300$)

	$t=2$	...							...	$t=10$
$t=1$	592	1208	1864	2508	3160	3792	4419	5023	5626	6250
$t=11$	6903	7564	8223	8900	9569	10226	10823	11304	11785	12252
$t=21$	12724	13339	13940	14514	15102	15648	16212	16725	17217	17839
...	18463	19094	19718	20342	20966	21563	22167	22802	23431	24044
	24562	25131	25676	26205	26718	27215	27767	28389	28974	29502
	30022	30542	31044	31556	32092	32636	33196	33772	34347	34915
	35502	36078	36643	37219	37804	38381	38974	39513	40044	40634
	41237	41853	42430	42977	43529	44081	44657	45277	45917	46517
	47100	47692	48241	48802	49399	49992	50601	51214	51855	52499
	53127	53763	54387	54979	55591	56219	56843	57491	58127	58767
	59264	59777	60298	60779	61348	61942	62521	63041	63576	64082
	64550	65074	65594	66168	66664	67204	67711	68272	68837	69414
	70012	70617	71211	71701	72214	72740	73283	73889	74509	75115
	75743	76351	76971	77585	78169	78745	79309	79918	80563	81184
	81761	82318	82855	83384	83921	84476	85028	85647	86275	86889
	87493	88097	88737	89361	90017	90668	91313	91938	92575	93156
	93669	94182	94695	95201	95679	96183	96783	97397	97989	98603
	99223	99839	100478	101095	101724	102333	102902	103516	104157	104784
	105411	106026	106626	107214	107806	108418	109048	109688	110321	110961
	111586	112211	112828	113437	114038	114663	115288	115904	116519	117121
	117688	118280	118916	119548	120130	120647	121210	121773	122350	122947
	123540	124102	124705	125255	125769	126325	126893	127501	128133	128769
	129402	129994	130491	130996	131565	132142	132719	133280	133863	134435
	134997	135587	136187	136812	137424	138024	138648	139272	139909	140534
	141171	141768	142329	142878	143423	144000	144585	145168	145738	146294
	146832	147364	147920	148520	149128	149744	150342	150902	151407	151895
	152396	152885	153390	153939	154520	155129	155742	156374	157006	157648
	158295	158951	159655	160339	161039	161723	162410	163050	163698	164366
...	165031	165680	166321	166934	167559	168193	168882	169580	170277	170954
$t=291$	171602	172220	172852	173500	174136	174764	175364	175956	176560	177197

Παίρνουμε την πρώτη διαφορά ∇x_t και υπολογίζουμε τις τιμές του Πίνακα 3.2.

Παρατηρήστε ότι λείπει η πρώτη τιμή $x_1 - x_0$ διότι δεν υπάρχει x_0 .

Πίνακας 3.2. Η χρονοσειρά ∇x_t ($n = 299$)

$t=2$	—	616	656	644	652	632	627	604	603	624
$t=11$	653	661	659	677	669	657	597	481	481	467
$t=21$	472	615	601	574	588	546	564	513	492	622
...	624	631	624	624	624	597	604	635	629	613
	518	569	545	529	513	497	552	622	585	528
	520	520	502	512	536	544	560	576	575	568
	587	576	565	576	585	577	593	539	531	590
	603	616	577	547	552	552	576	620	640	600
	583	592	549	561	597	593	609	613	641	644
	628	636	624	592	612	628	624	648	636	640
	497	513	521	481	569	594	579	520	535	506
	468	524	520	574	496	540	507	561	565	577
	598	605	594	490	513	526	543	606	620	606
	628	608	620	614	584	576	564	609	645	621
	577	557	537	529	537	555	552	619	628	614
	604	604	640	624	656	651	645	625	637	581
	513	513	513	506	478	504	600	614	592	614
	620	616	639	617	629	609	569	614	641	627

	627	615	600	588	592	612	630	640	633	640
	625	625	617	609	601	625	625	616	615	602
	567	592	636	632	582	517	563	563	577	597
	593	562	603	550	514	556	568	608	632	636
	633	592	497	505	569	577	577	561	583	572
	562	590	600	625	612	600	624	624	637	625
	637	597	561	549	545	577	585	583	570	556
	538	532	556	600	608	616	598	560	505	488
	501	489	505	549	581	609	613	632	632	642
	647	656	704	684	700	684	687	640	648	668
...	665	649	641	613	625	634	689	698	697	677
$t=291$	648	618	632	648	636	628	600	592	604	637

Ο μέσος όρος της νέας χρονοσειράς είναι 590.65. Σχηματίζουμε από αυτήν την χρονοσειρά Y_t με τιμές

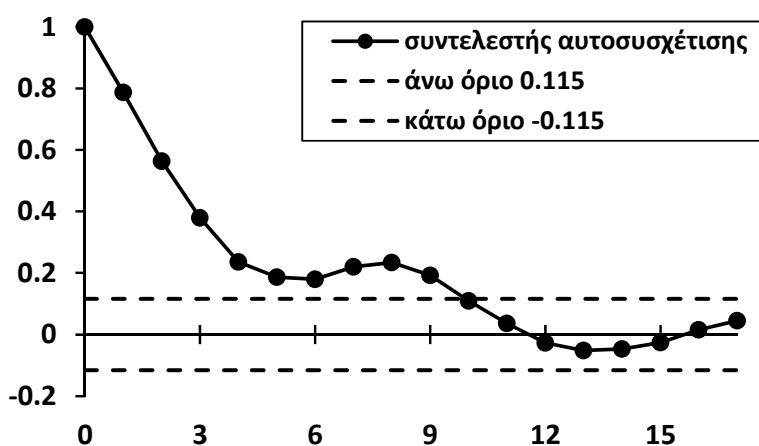
$$y_t = \nabla x_t - 590.65 = x_t - x_{t-1} - 590.65 \quad (3.27)$$

Πίνακας 3.3. Η χρονοσειρά $y_t = \nabla x_t - 590.65$ ($n = 299$)

$t=2$	—	25.35	65.35	53.35	61.35	41.35	36.35	13.35	12.35	33.35
$t=11$	62.35	70.35	68.35	86.35	78.35	66.35	6.35	-109.65	-109.65	-123.65
$t=21$	-118.65	24.35	10.35	-16.65	-2.65	-44.65	-26.65	-77.65	-98.65	31.35
...	33.35	40.35	33.35	33.35	33.35	6.35	13.35	44.35	38.35	22.35
	-72.65	-21.65	-45.65	-61.65	-77.65	-93.65	-38.65	31.35	-5.65	-62.65
	-70.65	-70.65	-88.65	-78.65	-54.65	-46.65	-30.65	-14.65	-15.65	-22.65
	-3.65	-14.65	-25.65	-14.65	-5.65	-13.65	2.35	-51.65	-59.65	-0.65
	12.35	25.35	-13.65	-43.65	-38.65	-38.65	-14.65	29.35	49.35	9.35
	-7.65	1.35	-41.65	-29.65	6.35	2.35	18.35	22.35	50.35	53.35
	37.35	45.35	33.35	1.35	21.35	37.35	33.35	57.35	45.35	49.35
	-93.65	-77.65	-69.65	-109.65	-21.65	3.35	-11.65	-70.65	-55.65	-84.65
	-122.65	-66.65	-70.65	-16.65	-94.65	-50.65	-83.65	-29.65	-25.65	-13.65
	7.35	14.35	3.35	-100.65	-77.65	-64.65	-47.65	15.35	29.35	15.35
	37.35	17.35	29.35	23.35	-6.65	-14.65	-26.65	18.35	54.35	30.35
	-13.65	-33.65	-53.65	-61.65	-53.65	-35.65	-38.65	28.35	37.35	23.35
	13.35	13.35	49.35	33.35	65.35	60.35	54.35	34.35	46.35	-9.65
	-77.65	-77.65	-77.65	-84.65	-112.65	-86.65	9.35	23.35	1.35	23.35
	29.35	25.35	48.35	26.35	38.35	18.35	-21.65	23.35	50.35	36.35
	36.35	24.35	9.35	-2.65	1.35	21.35	39.35	49.35	42.35	49.35
	34.35	34.35	26.35	18.35	10.35	34.35	34.35	25.35	24.35	11.35
	-23.65	1.35	45.35	41.35	-8.65	-73.65	-27.65	-27.65	-13.65	6.35
	2.35	-28.65	12.35	-40.65	-76.65	-34.65	-22.65	17.35	41.35	45.35
	42.35	1.35	-93.65	-85.65	-21.65	-13.65	-13.65	-29.65	-7.65	-18.65
	-28.65	-0.65	9.35	34.35	21.35	9.35	33.35	33.35	46.35	34.35
	46.35	6.35	-29.65	-41.65	-45.65	-13.65	-5.65	-7.65	-20.65	-34.65
	-52.65	-58.65	-34.65	9.35	17.35	25.35	7.35	-30.65	-85.65	-102.65
	-89.65	-101.65	-85.65	-41.65	-9.65	18.35	22.35	41.35	41.35	51.35
	56.35	65.35	113.35	93.35	109.35	93.35	96.35	49.35	57.35	77.35
...	74.35	58.35	50.35	22.35	34.35	43.35	98.35	107.35	106.35	86.35
$t=291$	57.35	27.35	41.35	57.35	45.35	37.35	9.35	1.35	13.35	46.35

Εκτιμούμε την αυτοσυμμεταβλητότητα και τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας Y_t από τα y_t . Τα αποτελέσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα και σχήμα.

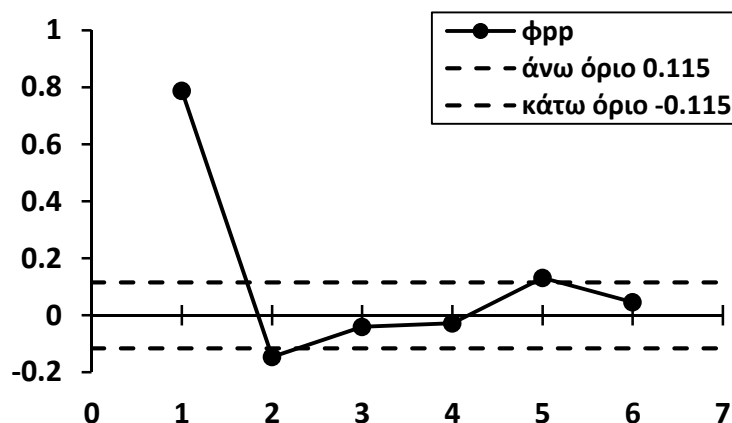
k	$\hat{\gamma}_k$	$\hat{\rho}_k$
0	2466.2	1
1	1941.9	0.787
2	1390.3	0.564
3	935.0	0.379
4	583.2	0.236
5	460.8	0.187
6	444.2	0.180
7	542.9	0.220
8	576.7	0.234
9	475.8	0.193
10	270.9	0.110
11	88.1	0.036
12	-66.5	-0.027
13	-128.6	-0.052
14	-115.8	-0.047
15	-65.4	-0.027
16	37.7	0.015
17	112.4	0.046



Η ζώνη μηδενικών συντελεστών συσχέτισης είναι $\pm 2/299^{0.5} = \pm 0.115$. Βλέπουμε ότι οι τιμές ρ_k είναι στατιστικά σημαντικές για $k = 1, 2, \dots, 10$. Άρα τα y_t δεν αντιστοιχούν σε λευκή ακολουθία.

Δοκιμάζουμε για την Y_t μοντέλα AR τάξεων $p = 1, 2, \dots$ και λύνουμε τις εξισώσεις Yule-Walker. Οι συντελεστές ϕ_{pp} φαίνονται στην συνέχεια και στο σχήμα.

$$\phi_{11} = \rho_1 = 0.787, \phi_{22} = -0.145, \phi_{33} = -0.04, \phi_{44} = -0.03, \phi_{55} = 0.13, \phi_{66} = 0.05, \dots$$



Παρατηρούμε ότι, για τάξεις μοντέλων $p \geq 3$, οι συντελεστές ϕ_{pp} δεν είναι στατιστικά σημαντικοί. Εξαίρεση αποτελεί ο ϕ_{55} αλλά είναι πολύ κοντά στην ζώνη μη σημαντικότητας ± 0.115 . Έχουμε επομένως ισχυρή ένδειξη ότι το μοντέλο AR(2) είναι κατάλληλο για την Y_t ή ισοδύναμα το ARIMA(2,1,0) για την X_t . Οι συντελεστές του AR(2) είναι (από την λύση των εξισώσεων Yule-Walker για $p = 2$):

$$\phi_{21} = 0.901 \text{ και } \phi_{22} = -0.145.$$

Αν εφαρμόσουμε γραμμική παλινδρόμηση $y_t = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ όπου $f_1(t) = y_{t-1}$ και

$f_2(t) = y_{t-2}$, και την Εξ. (2.2) προκύπτουν οι συντελεστές $\alpha_1 = 0.906$ και $\alpha_2 = -0.149$ που είναι σχεδόν ίσοι με των εξισώσεων Yule-Walker. Η Εξ. (2.2) ελαχιστοποιεί το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων ενώ οι εξισώσεις Yule-Walker προκύπτουν από εξισώσεις με αυτοσυμμεταβλητότητες ή με συντελεστές αυτοσυσχέτισης.

Προχωρούμε με την πρόβλεψη της Y_{301}

$$\hat{Y}_{301} = 0.901 y_{300} - 0.145 y_{299} = 0.901(46.35) - 0.145(13.35) = 39.83.$$

Λύνουμε την Εξ. (3.27) ως προς x_t ,

$$x_t = y_t + x_{t-1} + 590.65.$$

Αντικαθιστούμε $t = 301$, βάζοντας εκτιμήτριες όπου δεν έχουμε δεδομένα και ευρίσκουμε τελικά:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{301} &= \hat{Y}_{301} + x_{300} + 590.65 = 39.83 + 177197 + 590.65 = 177827.48 \\ &\approx 177827.\end{aligned}$$

Οι προβλέψεις για $t = 302, 303, \dots$, προκύπτουν με ανάλογο τρόπο.

Τέλος ελέγχουμε αν τα υπόλοιπα a_t είναι λευκός θόρυβος. Εφαρμόζουμε το μοντέλο AR(2) και κάνουμε 297 προβλέψεις $\hat{Y}_t$ για $t = 4, 5, \dots, 300$, προσποιούμενοι ότι οι y_t δεν είναι γνωστές¹. Ευρίσκουμε τις εκτιμήσεις των υπολοίπων

$$\hat{a}_t = y_t - \hat{Y}_t = y_t - (0.901y_{t-1} - 0.145y_{t-2}) \quad t = 4, 5, \dots, 300.$$

Οι δειγματικοί συντελεστές συσχέτισης προκύπτουν μετά από αρκετές πράξεις:

$$\hat{r}_1 = -2.3 \cdot 10^{-9}, \hat{r}_2 = 8.3 \cdot 10^{-8}, \hat{r}_3 = 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ κοκ.}$$

Όλοι είναι ≈ 0 . Θα αρκούσε, σε απόλυτη τιμή, να είναι μικρότεροι του $2/(297)^{0.5} = 0.116$. Άρα το μοντέλο είναι καλό.

3.6.3 Εκτίμηση παραμέτρων άλλων μοντέλων

Έστω ότι η Y_t είναι αμετάβλητη με $E(Y_t) = 0$. Για το μοντέλο MA(1)

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την ανωτέρω με τις

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, Y_{t-1} = a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2}.$$

Προκύπτουν δύο εξισώσεις και παίρνουμε μέσες τιμές κατά μέλη. Αφού η a_t είναι λευκή με (άγνωστη) διασπορά σ_a^2 οι εξισώσεις γράφονται

$$\gamma_0 = E(Y_t Y_t) = E(a_t^2 + \theta_1^2 a_{t-1}^2 - 2\theta_1 a_t a_{t-1}) = \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 - 2(0) = \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = E(Y_t Y_{t-1}) = \dots = -\theta_1 \sigma_a^2.$$

¹ Ξεκινάμε από $t=4$ γιατί δεν έχουμε τις y_{-1} , y_0 και y_1 που θα χρειαζόνταν για να εφαρμόζαμε το μοντέλο AR(2) όταν $t = 1$ ή 2 ή 3 .

και λύνοντας,

$$\sigma_a^2 = \gamma_0 + \gamma_1, \quad \theta_1 = -\gamma_1/(\gamma_0 + \gamma_1).$$

Παράδειγμα

Η ημερήσια ζήτηση βενζίνης Z_t σε ένα βενζινάδικο έχει σταθερή και άγνωστη μέση τιμή μ και περιγράφεται από το μοντέλο MA(1): $Z_t - \mu = a_t + b a_{t-1}$. Από παλαιότερα δεδομένα γνωρίζουμε ότι $\rho_1 = 0.4$. Ζητούνται οι τιμές της παραμέτρου b που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη. Δεν απαιτείται γνώση της μ .

Ορίζουμε $Y_t \triangleq Z_t - \mu$. Οι Y_t και Z_t έχουν ίδιες αυτοσυμμεταβλητότητες και συντελεστές συσχέτισης. Βρήκαμε πριν ($b = -\theta_1$) ότι

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 (1+b^2) \quad \text{και} \quad \gamma_1 = b\sigma_a^2$$

Διαιρώντας κατά μέλη ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} \gamma_1/\gamma_0 = \rho_1 = 0.4 &= \frac{b}{1+b^2} \Rightarrow 0.4b^2 - b + 0.4 = 0 \\ \Rightarrow \text{δύο ρίζες: } b &= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(0.4)0.4}}{2(0.4)} = \frac{1 \pm \sqrt{0.36}}{0.8} = \begin{cases} \frac{1+0.6}{0.8} = 2 \\ \frac{1-0.6}{0.8} = 0.5. \end{cases} \end{aligned}$$

Αν γνωρίζαμε τα γ_1 και γ_0 τότε θα ευρίσκαμε ακριβώς το b .

Εν γένει, αν η Y_t περιγράφεται από ένα μοντέλο MA(q) όλες οι αυτοσυμμεταβλητότητες και συντελεστές αυτοσυσχέτισης της Y_t τάξεων $k \geq q+1$ είναι 0 (γιατί;). Άρα αν $\rho_k < 2/n^{0.5}$ για $k = q+1, q+2, \dots$, τότε η υπόθεση ότι η Y_t είναι MA(q) είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο 5% (ή ισχύει με πιθανότητα 95%).

Συνεχίζουμε με το γενικό μοντέλο ARMA(p, q):

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t$$

Αν πολλαπλασιάσουμε με Y_{t-k} για $k = q+1, q+2, \dots, q+p$ (δηλαδή $k > q$) και πάρουμε μέσες τιμές, προκύπτει

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} = \phi_1 \gamma_{|k-1|} + \dots + \phi_p \gamma_{|k-p|}, \quad k > q,$$

όπου

- εμφανίζουμε απόλυτες τιμές $|k-1|, \dots, |k-p|$ αντί για ώστε να έχουμε πάντα θετικούς όρους (αλλά δεν θα πείραζε αν τους αφήναμε ως είχαν και κάποιοι ήταν αρνητικοί, αρκεί να θυμόμαστε ότι $\gamma_m = \gamma_{-m}$)
- οι όροι $E(a_t Y_{t-k}) \dots E(a_{t-q} Y_{t-k})$ είναι 0 αφού το $t-k$ αντιστοιχεί σε προηγούμενο

χρόνο από τους $t, t-1, \dots, t-q$ (πήραμε $k > q$) και έχουμε υποθέσει ότι τα υπόλοιπα είναι ανεξάρτητα από προηγούμενες τιμές της διαδικασίας. Τελικά, οι συντελεστές AR εκτιμώνται από εξισώσεις Yule-Walker.

Η εύρεση των συντελεστών MA ή γενικότερα ARMA γίνεται με μη γραμμικές εξισώσεις. Μία προσέγγιση βασίζεται στις αντιστοιχίες μεταξύ AR και ARMA. Από ένα μοντέλο ARMA(p, q)

$$\Phi_p(B)Y_t = \Theta_q(B)a_t$$

προκύπτει το ισοδύναμο

$$\Psi(B)Y_t = \frac{\Phi_p(B)}{\Theta_q(B)}Y_t = a_t.$$

Η ρητή συνάρτηση $\Psi(B)$ δεν είναι, εν γένει, πολυώνυμο. Άρα το $\Psi(B)Y_t = a_t$ δεν είναι μοντέλο AR. Μία απλοϊκή προσέγγιση προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor

$$\Psi(B) \approx \psi_0 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots + \psi_v B^v$$

όπου

$$\psi_k \triangleq \left. \frac{d^k \Psi(B)}{dB^k} \right|_{B=0}, \quad \psi_0 \triangleq \Psi(0)$$

και v είναι η τάξη του προσεγγιστικού μοντέλου. Αφού οι πρώτοι συντελεστές των πολυωνύμων Φ_p και Θ_q είναι 1, ισχύει ότι $\psi_0 = \Psi(0) = 1$ (γιατί;), άρα το προσεγγιστικό μοντέλο είναι όντως AR και γράφεται

$$Y_t + \psi_1 Y_{t-1} + \dots + \psi_v Y_{t-v} \approx a_t \Rightarrow Y_t \approx -\psi_1 Y_{t-1} - \dots - \psi_v Y_{t-v} + a_t.$$

Για να είναι καλή η προσέγγιση πρέπει η τάξη v να είναι αρκετά μεγάλη. Μπορούμε να εκτιμήσουμε τους συντελεστές ψ_k του μοντέλου από τις εξισώσεις Yule-Walker (προσοχή γιατί έχουμε $\phi_k = -\psi_k$ στις Εξ. (3.25) και (3.26)). Επίσης προσδιορίζουμε την τάξη του μοντέλου με το κριτήριο $|\phi_{kk}| \leq 2/n^{0.5}$ από κάποιο $k = v + 1$ και μετά.

Τέλος, αν χρειάζεται να υπολογίσουμε εκτιμήσεις των υπολοίπων a_t όταν έχουμε δεδομένα $y_t, y_{t-1}, \dots$, ή εκτιμήσεις των $Y_t, Y_{t-1}, \dots$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη έκφραση:

$$\hat{a}_t = y_t + \psi_1 y_{t-1} + \dots + \psi_v y_{t-v}.$$

3.7 Προβλήματα

1. Μία διαδικασία έχει την μορφή $x(t) = 10ae^{-0.356t}$. Έχουμε τις εξής μετρήσεις:

t	0	1	2	3
x(t)	167.9	95.5	88.8	55.3

Εύρετε την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων του a .

2. Αποδείξτε τις σχέσεις (3.10α, β).

3. Να αποδείξετε τις Εξ. (3.15), (3.16). (3.17). *Υπόδειξη:* οδηγίες για την απόδειξη της (3.15) υπάρχουν στην υποσημείωση της σελ. 77.

4. Να αποδείξετε ότι, αν η Y_t περιγράφεται από ένα μοντέλο $MA(q)$ τότε $\gamma_k = 0$ για κάθε $k \geq q+1$.

4 ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

4.1 Εισαγωγή

Εδώ θ' ασχοληθούμε με τον *προγραμματισμό εργασιών* (scheduling). Ως *εργασία* (job) νοείται κάποια λειτουργία που θα εκτελέσει μια μηχανή ενός συστήματος παραγωγής προκειμένου να ολοκληρώσει ένα στάδιο της παραγωγής κάποιου προϊόντος. Το βασικό πρόβλημα στον προγραμματισμό είναι πότε (με ποια σειρά) και πού (σε ποιες μηχανές) θα γίνουν οι εργασίες που αντιστοιχούν σε πολλά προϊόντα.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τον λεγόμενο *έλεγχο ακολουθίας* (sequence control) όπου αποφασίζεται η σειρά εκτέλεσης εργασιών από μία μηχανή. Το δεύτερο πρόβλημα είναι ο *έλεγχος δρομολόγησης* (routing control) όπου κάθε εργασία ανατίθεται σε μία μηχανή από ένα σύνολο εναλλακτικών μηχανών που μπορούν να την ολοκληρώσουν.

Η δυσκολία των προβλημάτων προγραμματισμού εξαρτάται από την πολυπλοκότητα του συστήματος παραγωγής.

Κατάστημα εργασιών (job shop) είναι ένα σύστημα παραγωγής που παράγει διαφορετικά προϊόντα. Έχει μηχανές που επιτελούν ένα ή περισσότερα είδη εργασιών. Κάθε είδος προϊόντος έχει εν γένει ξεχωριστή δρομολόγηση μέσα στο κατάστημα. Στον προγραμματισμό παραγωγής τέτοια συστήματα συμβολίζονται J_m , όπου m ο αριθμός μηχανών.

Το *κατάστημα ροής* (flow shop) είναι συνώνυμο της γραμμής παραγωγής. Εδώ τα διαφορετικά προϊόντα επισκέπτονται τις μηχανές με την ίδια σειρά. Συμβολίζεται F_m .

Ένα σύστημα παραγωγής με m παράλληλες μηχανές συμβολίζεται P_m .

Χρόνος ροής (flow time) F_i (ή χρόνος υστέρησης, lead time) της εργασίας i σε ένα σύστημα είναι ο συνολικός χρόνος που η εργασία δαπανά από την στιγμή που είναι στην είσοδο του συστήματος διαθέσιμη για να ξεκινήσει την πρώτη κατεργασία μέχρι τη στιγμή που τελειώνει την τελευταία κατεργασία στο σύστημα και είναι έτοιμη να φύγει από το σύστημα. Ως σύστημα νοείται ένα κατάστημα εργασιών ή ακόμη και μία μηχανή.

Ο χρόνος ροής μίας εργασίας σε μία μηχανή περιλαμβάνει

- τον χρόνο αναμονής μπροστά από τη μηχανή (σε ουρά αναμονής ή σε αποθήκη) μέχρι να έλθει η σειρά της
- και την διάρκεια κατεργασίας.

Ο χρόνος ροής σε σύστημα με πολλές μηχανές περιλαμβάνει όλους τους χρόνους

αναμονής και όλους τους χρόνους κατεργασιών.

Χρόνος περάτωσης (completion time ή makespan) C_i είναι η στιγμή που η εργασία i έχει ολοκληρωθεί και εξέρχεται από το σύστημα.

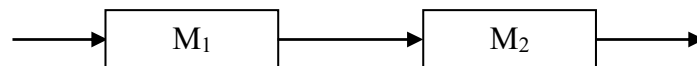
Παράδειγμα

Φθάνετε στην τράπεζα στις 9. Περιμένετε στην ουρά μισή ώρα μέχρι να έλθει η σειρά σας και τέλος εξυπηρετείστε στο γκισέ για 10 λεπτά. Ο χρόνος ροής στην τράπεζα είναι $F = 40$ λεπτά. Ο χρόνος περάτωσης είναι $C = 9.40$ πμ.

Σαν οπτικό βοήθημα στον προγραμματισμό, συχνά χρησιμοποιούμε τα διαγράμματα Gantt.

Παράδειγμα

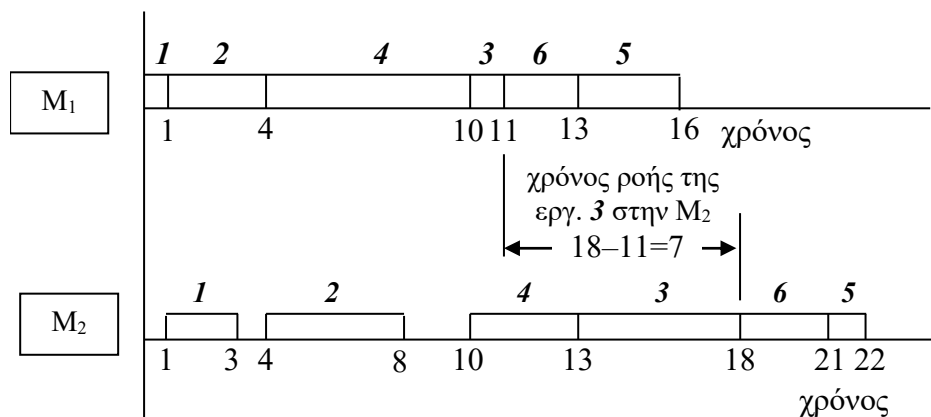
Έστω ότι έχουμε ένα κατάστημα ροής με δύο μηχανές M_1 και M_2 :



Οι χρόνοι ή διάρκειες επεξεργασίας (processing times) p_{ij} στις μηχανές M_j έχουν ως εξής:

Εργασία i	1	2	3	4	5	6
$M_1: p_{i1}$	1	3	1	6	3	2
$M_2: p_{i2}$	2	4	5	3	1	3

Έστω ότι η ακολουθία εργασιών είναι (1, 2, 4, 3, 6, 5). Το διάγραμμα Gantt είναι το ακόλουθο:



Οι μέσοι χρόνοι ροής για κάθε μηχανή είναι

-στην M_1 : $\bar{F}_1 = (1+4+10+11+13+16)/6 = 55/6 = 9.16$,

-στην M_2 (μαζί με αναμονή):

$$\bar{F}_2 = [(3-1)+(8-4)+(13-10)+(18-11)+(21-13)+(22-16)]/6 = 5,$$

-και στο σύστημα: $\bar{F} = (3+8+13+18+21+22)/6 = 14.16$.

Ο χρόνος περάτωσης της εργασίας 4 από το σύστημα είναι $C_4 = 13$. Ο χρόνος περάτωσης της τελευταίας είναι $C_5 = 22$. Συμβολίζεται $C_{\max}$ γιατί είναι ο μεγαλύτερος.

Το άθροισμα των χρόνων ροής σε επί μέρους τμήματα ενός συστήματος ισούται με τον συνολικό χρόνο ροής στο σύστημα. Στο προηγούμενο παράδειγμα, για την εργασία 3 έχουμε ότι $11(M_1) + 7(M_2) = 18$ (σύστημα). Προφανώς το ίδιο ισχύει και για τους μέσους χρόνους: $9.16 + 5 = 14.16$.

Συμβολισμοί προβλημάτων

Τα προβλήματα του προγραμματισμού παραγωγής συμβολίζονται εν συντομία

$$\alpha|\beta|Z$$

όπου

α : περιγράφει το σύστημα παραγωγής: π.χ., 1 για μία μηχανή, Fm, Pm, Jm και άλλες παραλλαγές

β : περιγράφει τις εργασίες (ή παραγγελίες): κενό αν όλες οι εργασίες είναι διαθέσιμες τη στιγμή 0, r_i αν έρχονται σε χρόνους ≥ 0 , prmp (preemption) αν επιτρέπονται διακοπές εργασιών, s_{ik} αν έχουμε χρόνους προετοιμασίας, κλπ.

Z : είναι η συνάρτηση κόστους που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε.

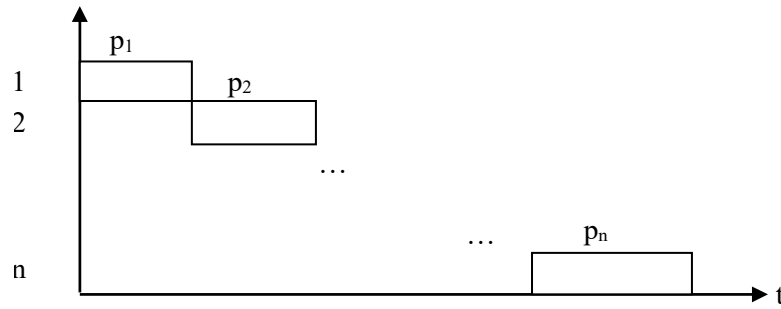
Αρχίζουμε με προβλήματα μίας μηχανής.

4.2 Τα προβλήματα $1||\sum F_i$, $1||\sum w_i F_i$ και $1|r_i, \text{prmp}||\sum F_i$

Πρόβλημα $1||\sum F_i$

Μία μηχανή πρόκειται να εκτελέσει n εργασίες, $i = 1, \dots, n$. Η διάρκεια εκτέλεσης της i είναι γνωστή και ίση με p_i .

Έστω ότι οι εργασίες θα εκτελεστούν με την σειρά $(1, 2, \dots, n)$.



Ο χρόνος ροής για την εργασία i είναι

$$F_i = \sum_{k=1}^i p_k = F_{i-1} + p_i$$

αφού η i εκτελείται μετά την $i - 1$. Ο μέσος χρόνος ροής είναι

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^i p_k \right) = \frac{1}{n} \left\{ \begin{array}{l} p_1 + \\ + p_1 + p_2 + \\ + \dots + \\ + p_1 + p_2 + \dots + p_n \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{n} [np_1 + (n-1)p_2 + \dots + 2p_{n-1} + p_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i+1)p_i. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πρόγραμμα εκείνο που ελαχιστοποιεί το $\bar{F}$ ή το $\sum F_i$, αφού το $1/n$ δεν επηρεάζει την ελαχιστοποίηση. Το πρόβλημα αυτό συμβολίζεται $1||\sum F_i$ όπου το 1 μας λέει ότι το σύστημα έχει μία μόνο μηχανή.

Θεώρημα ([5]): Έχουμε δύο ακολουθίες $a_i \geq 0$ και $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, και μπορούμε να τις διατάξουμε κατά βούληση. Αφού τις διατάξουμε, παίρνουμε το *εσωτερικό γινόμενο*: $a_1b_1 + \dots + a_nb_n$. Αυτό γίνεται ελάχιστο όταν μία ακολουθία (οποιαδήποτε εκ των δύο) διαταχθεί κατά φθίνουσα τάξη και η άλλη κατ' αύξουσα.

Απόδειξη: (Πρόβλημα στο τέλος του κεφαλαίου).

Η Εξ. (4.1) είναι εσωτερικό γινόμενο και η $(n - i + 1)$ φθίνουσα ακολουθία. Άρα το πρόγραμμα $(1, 2, \dots, n)$ είναι βέλτιστο όταν η p_i είναι αύξουσα:

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$$

Ο κανόνας αυτός λέγεται *κανόνας συντομότερης διάρκειας* ή SPT (shortest processing time) γιατί δίνει προτεραιότητα στις εργασίες με τις μικρότερες διάρκειες.

Στο ανωτέρω πρόβλημα όλες οι εργασίες είναι διαθέσιμες από την αρχή. Συνεπώς οι χρόνοι ροής F_i και *περάτωσης* C_i κάθε εργασίας i είναι ίσοι, όπως και οι μέσες τους τιμές:

$$C_i = F_i, \quad \bar{C} = \bar{F}, \quad \sum F_i = \sum C_i.$$

Γι' αυτό αρκετά βιβλία συμβολίζουν το ίδιο πρόβλημα ως $1||\sum C_i$.

Έστω ότι οι n εργασίες είναι διαθέσιμες από την αρχή αλλά θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των χρόνων ροής με βάρη που ορίζεται

$$F_w \triangleq \sum_{i=1}^n w_i F_i,$$

για κάποια $w_i > 0$. Το πρόβλημα αυτό συμβολίζεται $1||\sum w_i F_i$. Το F_w γίνεται ελάχιστο με την ακολουθία $(1, 2, \dots, n)$ αν

$$\frac{p_1}{w_1} \leq \frac{p_2}{w_2} \leq \dots \leq \frac{p_n}{w_n} \quad (\text{γιατί}). \quad (4.2)$$

Ο κανόνας λέγεται WSPT (weighted shortest processing time). Όταν τα w_i είναι ίσα, τότε ο WSPT είναι ισοδύναμος με τον SPT.

Παράδειγμα

Εργασία	p_i	w_i	p_i/w_i
1	2	1	2
2	4	2	2
3	3	5	0.6
4	1	4	0.25
5	6	2	3

Χωρίς βάρη, η βέλτιστη ακολουθία είναι η $S_{SPT} = (4, 1, 3, 2, 5)$ και με βάρη $S_{WSPT} = (4, 3, 1, 2, 5)$.

Πρόβλημα $1|r_i, prmp||\sum F_i$

Όταν οι εργασίες δεν είναι διαθέσιμες από την αρχή αλλά έχουν χρόνους άφιξης $r_i \geq 0$, τότε η μηχανή μπορεί να ξεκινήσει την i *όχι νωρίτερα* από τη στιγμή r_i . Έχουμε τότε

$$C_i = F_i + r_i \quad \text{και} \quad F_i = C_i - r_i$$

όπου r_i είναι ο χρόνος άφιξης. Επίσης $F_i \geq p_i$ με ισότητα $F_i = p_i$ μόνον όταν η i ξεκινά τη στιγμή r_i και δεν τη διακόπτουμε μέχρι να τελειώσει. Έστω ότι

- (i) **επιτρέπεται** η μηχανή να διακόψει μία εργασία υπέρ άλλης που μόλις έφθασε και
- (ii) όταν η μηχανή αναλάβει πάλι την εργασία που είχε διακόψει **συνεχίζει από το σημείο της διακοπής** και χρειάζεται χρόνο ίσο με τον **υπόλοιπο χρόνο** (remaining processing time) που έμενε όταν έγινε διακοπή.

Η βέλτιστη πολιτική είναι πάλι τύπου SPT και γράφεται SRPT (shortest remaining processing time). Η μηχανή διαμορφώνει το πρόγραμμα παραγωγής της δυναμικά, **όταν**

τελειώνει μία εργασία **ή όταν** έρχεται μία νέα. Στους χρόνους αυτούς η μηχανή ξεκινά ή συνεχίζει την εργασία εκείνη με τη μικρότερη **υπολειπόμενη διάρκεια εκτέλεσης**.

Ενας τρόπος γραφικής αναπαράστασης και επίλυσης του προβλήματος περιγράφεται παρακάτω με ένα

Παράδειγμα

Τέσσερις εργασίες έχουν χρόνους άφιξης και διάρκειες που φαίνονται στον πίνακα

i	r _i	p _i
1	1	2
2	6	3
3	0	5
4	8	1

A. Καταstrώνουμε έναν πίνακα με γραμμές όσες είναι οι εργασίες $i = 1, \dots, n$ (και μία γραμμή επικεφαλίδα). Στην πραγματικότητα συνεχίζουμε τον παραπάνω πίνακα προσθέτοντας στήλες προς τα δεξιά. Οι στήλες του πίνακα με δείκτη $t = 0, 1, \dots$ αντιστοιχούν στα διαστήματα $[t, t+1)$. Για παράδειγμα η στήλη 0 είναι το διάστημα από 0 ως λίγο πριν το 1. Κάθε κελί αντιστοιχεί σε μία εργασία i και ένα διάστημα $[t, t+1)$. Ο πίνακας που ακολουθεί αντιστοιχεί σε $n = 4$ και $t = 0, \dots, 12$.

i	r _i	p _i	t:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	1	2															
2	6	3															
3	0	5															
4	8	1															

B. Χρωματίζουμε τα κελιά που αντιστοιχούν στους χρόνους αφίξεων. Στον παρακάτω πίνακα το χρώμα είναι γαλάζιο (φαίνεται γκρι με ασπρόμαυρη εκτύπωση). Μπορούμε αντί για χρώμα να σημειώσουμε ένα σύμβολο π.χ. A για "άφιξη".

i	r _i	p _i	t:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	1	2															
2	6	3															
3	0	5															
4	8	1															

Γ. Σαρώνουμε τον χρόνο t , για $t = 0, 1, \dots$. Για κάθε t συμπληρώνουμε **την αντίστοιχη στήλη t** με τα ακόλουθα σημάδια στα κελιά (i, t) :

- Αν η εργασία i δεν έχει έλθει ή αν η i έχει τελειώσει, το κελί (i, t) είναι κενό.
- Αλλιώς αν είναι παρούσα, σημειώνουμε στο κελί τον υπόλοιπο χρόνο της. Όταν η εργασία φθάνει, ο χρόνος αυτός είναι p_i . Αν είναι στη μηχανή για μία μονάδα χρόνου, τότε στο επόμενο κελί $(i, t+1)$ **μειώνουμε τον χρόνο κατά 1**. Αν είναι σε αναμονή, τότε ο υπόλοιπος χρόνος μένει ίδιος και στο επόμενο κελί.

iii) Αφού συμπληρώσουμε όλη τη στήλη t , επιλέγουμε με SRPT ποια εργασία θα εκτελεσθεί στο τρέχον κελί (δηλαδή στο διάστημα $[t, t+1)$) και βάζουμε στο κελί της, δίπλα από τον υπόλοιπο χρόνο, ένα $\leftrightarrow$ για να δείξουμε ότι η μηχανή δουλεύει εκείνη την εργασία.

Δ. Επαναλαμβάνουμε το Γ μέχρι τη στιγμή που η τελευταία εργασία θα ολοκληρώσει τον υπόλειπόμενο χρόνο και θα τελειώσει.

Εφαρμόζοντας τα Α-Δ προκύπτει ο τελικός πίνακας που περιγράφει την εξέλιξη της παραγωγής και **ισοδυναμεί με διάγραμμα Gantt**:

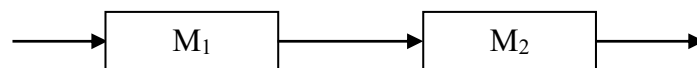
i	r _i	p _i	t:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	1	2			2 ↔	1 ↔	τέλος										
2	6	3								3 ↔	3 ↔	2	2 ↔	1 ↔	τέλος		
3	0	5		5 ↔	4	4	4 ↔	3 ↔	2 ↔	1 ↔	τέλος						
4	8	1										1 ↔	τέλος				

Έχουμε $F_i = C_i - r_i$ με $F_1 = 3 - 1 = 1$, $F_2 = 11 - 6 = 5$, $F_3 = 7 - 0 = 7$ και $F_4 = 9 - 8 = 1$. Το άθροισμα είναι $\Sigma F_i = 15$ και ο μέσος χρόνος ροής $\bar{F} = 15/4 = 3.75$.

4.3 Το πρόβλημα $F_2 || F_{\max}$

Θεωρούμε καταστήματα ροής και υποθέτουμε ότι υπάρχει πάντοτε αρκετός ελεύθερος χώρος μεταξύ δύο διαδοχικών μηχανών, ούτως ώστε, αν η πρώτη μηχανή είναι ταχύτερη από την δεύτερη, να μπορεί η πρώτη να παράγει συνεχώς χωρίς να υπόκειται σε αναγκαστικές παύσεις λόγω μπλοκαρισμάτων.

Τώρα έχουμε n εργασίες που θα γίνουν σε ένα κατάστημα ροής με 2 μηχανές (σύμβολο F_2). Όλες οι εργασίες είναι διαθέσιμες την στιγμή 0 και θα προγραμματισθούν έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο μέγιστος χρόνος ροής $F_{\max}$. Αυτός αντιστοιχεί στον χρόνο περάτωσης της τελευταίας εργασίας από την M_2 .



Έστω ότι ο χρόνος κατεργασίας της εργασίας i στην μηχανή j είναι p_{ij} . Το $F_{\max}$ ελαχιστοποιείται με τον αλγόριθμο *Johnson* ([6]):

1. Εύρετε το

$$\min_{(i,j)} p_{ij}.$$

Αν αυτό συμβαίνει για $j = 1$, τότε θέσετε την εργασία πρώτη στο πρόγραμμα. Αν $j = 2$, τότε θέσετέ την τελευταία. Σε περίπτωση ισότητας δύο ή περισσότερων p_{ij} επιλέγετε

ελεύθερα όποιο p_{ij} θέλετε.

2. Διαγράψτε την εργασία αυτή από τον κατάλογο.
3. Συνεχίστε με το βήμα 1 τοποθετώντας τις άλλες εργασίες ενδιάμεσα στο πρόγραμμα.

Παράδειγμα 4.3

Εργασία i	p_{i1}	p_{i2}
1	6	3
2	0	2
3	5	4
4	8	6
5	2	1

Αλγόριθμος Johnson:

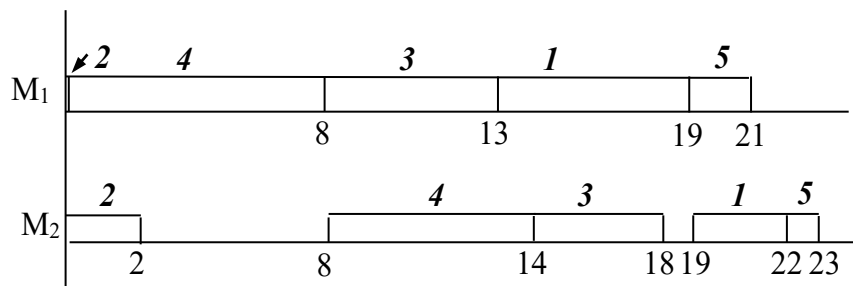
Αρχικά το πρόγραμμα είναι κενό: _ _ _ _ _

1) $\min p_{ij} = p_{21} = 0$, άρα η εργασία 2 θα εκτελεσθεί πρώτη: 2 _ _ _ _ .

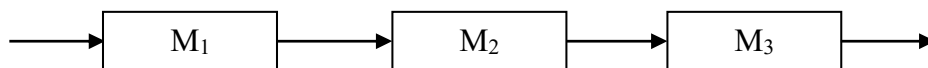
2) Από τις υπόλοιπες βρίσκουμε $\min p_{ij} = p_{52} = 1$, άρα η εργασία 5 εκτελείται τελευταία: : 2 _ _ _ 5

3) κ.ο.κ.

Η βέλτιστη ακολουθία σύμφωνα με τον αλγόριθμο είναι $S_{\text{Johnson}} = (2, 4, 3, 1, 5)$. Το διάγραμμα Gantt είναι:



4.4 Το πρόβλημα $F_3 || F_{\max}$



Εδώ μπορεί να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος Johnson με την προϋπόθεση ότι είτε η M_1 , ή η M_3 επικρατούν της M_2 , δηλαδή:

$$\text{είτε } \min_i p_{i1} \geq \max_k p_{k2}$$

$$\text{είτε } \min_i p_{i3} \geq \max_k p_{k2}.$$

Τότε ([6]) προχωρούμε με δύο ψευδομηχανές M_1', M_2' τέτοιες ώστε

$$p_{i1}' = p_{i1} + p_{i2}$$

$$p_{i2}' = p_{i2} + p_{i3}$$

και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Johnson ο οποίος *ευρίσκει το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί το $F_{\max}$ αλλά όχι το ίδιο το $F_{\max}$* . Για να εύρουμε τους χρόνους περάτωσης πρέπει να καταστρώσουμε το διάγραμμα Gantt με τις τρεις μηχανές και τους αρχικούς χρόνους και με πρόγραμμα παραγωγής εκείνο που βρήκαμε με τον αλγόριθμο Johnson.

Παράδειγμα

Εργασία i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}
1	8	2	4
2	5	4	5
3	6	1	3
4	7	3	2

Εύρετε το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί το $F_{\max}$.

Αφού $\min_i p_{i1} \geq \max_k p_{k2}$, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Johnson με ψευδομηχανές:

Ψευδομηχανές	
M_1'	M_2'
10	6
9	9
7	4
10	5

1) $\min p_{ij} = 4$ άρα η εργασία 3 θα εκτελεσθεί τελευταία: 3

2) $\min p_{ij} = 5$ και η 4 επίσης θα εκτελεσθεί στην τελευταία ελεύθερη θέση: 4 3

3) κ.ο.κ.

Το βέλτιστο πρόγραμμα είναι $S_{\text{Johnson}} = (2, 1, 4, 3)$.

4.5 Προθεσμίες παράδοσης - Τα προβλήματα $1||L_{\max}(T_{\max})$ και $1||L_{\min}(T_{\min})$

Η *βραδύτητα* (lateness) μιας εργασίας ορίζεται ως οποιαδήποτε απόκλιση από την *προθεσμία παράδοσης* (due date). Γράφουμε

$$L_i \triangleq C_i - d_i,$$

όπου d_i είναι η προθεσμία της εργασίας i . Η βραδύτητα μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. *Καθυστέρηση* (tardiness) μιας εργασίας είναι η υπέρβαση της προθεσμίας

$$T_i \triangleq \max(0, L_i).$$

Βλέπουμε ότι η καθυστέρηση είναι πάντα θετική ή 0.

Η μέση βραδύτητα $\bar{L}$ ελαχιστοποιείται από το πρόγραμμα SPT: $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ (γιατί;).

Εξετάζουμε στην συνέχεια τα προβλήματα $1||L_{\max}$ και $1||F_{\max}$ που αφορούν την ελαχιστοποίηση της μέγιστης βραδύτητας

$$L_{\max} = \max (L_1, \dots, L_n)$$

και μέγιστης καθυστέρησης $T_{\max}$

$$T_{\max} = \max(T_1, \dots, T_n) = \max (0, L_{\max})$$

(για εργασίες που είναι διαθέσιμες από την αρχή).

Θεώρημα ([7]): Οι $L_{\max}$ και $T_{\max}$ ελαχιστοποιούνται από το πρόγραμμα $(1, 2, \dots, n)$ όταν οι πρώτες εργασίες έχουν *ενωρίτερες προθεσμίες* (earliest due date—κανόνας EDD):

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n.$$

Παράδειγμα

Εργασία	Ημερομηνία παράδοσης
1	3
2	8
3	5
4	7
5	6

Το πρόγραμμα EDD είναι: $S_{\text{EDD}} = (1, 3, 5, 4, 2)$.

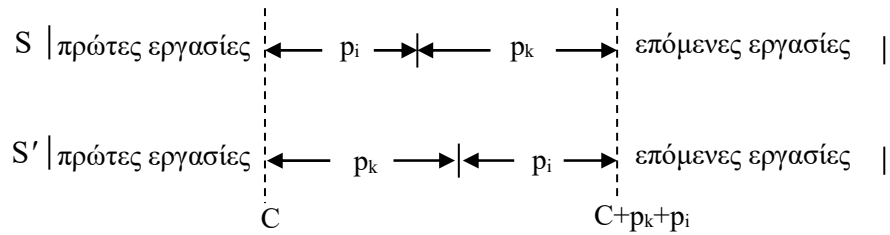
Απόδειξη του θεωρήματος

Έστω ένα πρόγραμμα S' το οποίο δεν είναι EDD. "Δεν" σημαίνει ότι δύο τουλάχιστον γειτονικές εργασίες του προγράμματος, έστω k και i , δεν ικανοποιούν τον κανόνα EDD, δηλαδή

$$d_k > d_i.$$

Θα αποδείξουμε ότι το $S' = (\dots, k, i, \dots)$ δεν μπορεί να είναι βέλτιστο.

Υποθέστε ότι τη στιγμή C ξεκινά η εργασία k στο S' , τη στιγμή $C + p_k$ περατώνεται η k και ακολουθεί η i , που περατώνεται σε χρόνο $C + p_k + p_i$ όπως φαίνεται στο σχήμα, και ακολουθούν άλλες εργασίες. Θεωρήστε ένα άλλο πρόγραμμα S ίδιο με το S' εκτός από τις i και k που εκτελούνται με αντίθετη σειρά. Προφανώς οι χρόνοι έναρξης της i και περάτωσης της k είναι, όπως πριν, C και $C + p_k + p_i$.



Οι βραδύτητες των i και k είναι

$$\text{για το } S': L_k(S') = C + p_k - d_k \text{ και } L_i(S') = C + p_k + p_i - d_i,$$

$$\text{για το } S: L_i(S) = C + p_i - d_i \text{ και } L_k(S) = C + p_i + p_k - d_k.$$

Εξ υποθέσεως $d_k > d_i$ άρα

$$-d_i > -d_k.$$

Επομένως

$$L_i(S') > L_k(S'), L_i(S') > L_i(S) \text{ και } L_i(S') > L_k(S).$$

Τότε όμως

$$L_{\max}(S') = \max [\dots, L_k(S'), L_i(S'), \dots] \geq \max [\dots, L_i(S), L_k(S), \dots] = L_{\max}(S)$$

(γράφουμε $\geq$ και όχι $>$ γιατί μπορεί το $\max$ να είναι στους όρους $\dots$ που είναι ίδιοι και στα δύο προγράμματα). Αυτήν την ανισότητα την διατυπώνουμε λεκτικά ως εξής:

Κανένα πρόγραμμα δεν μπορεί να είναι βέλτιστο για το πρόβλημα $n|1|L_{\max}$ εφ' όσον παραβιάζει τον κανόνα EDD. Ισοδύναμα, βέλτιστο πρόγραμμα είναι όποιο συμφωνεί με τον κανόνα EDD.

Η μέγιστη καθυστέρηση στο S' γράφεται:

$$T_{\max}(S') = \max_j \max[L_j(S'), 0] = \max [0, L_1, \dots, L_n] = \max[0, L_{\max}(S')]$$

και ανάλογα στο S :

$$T_{\max}(S) = \max[0, L_{\max}(S)].$$

Αποδείξαμε πριν ότι $L_{\max}(S') \geq L_{\max}(S)$. Άρα $T_{\max}(S') \geq T_{\max}(S)$ οπότε το S' που παραβιάζει τον EDD δεν είναι βέλτιστο. Συνεπώς το EDD ελαχιστοποιεί και το $T_{\max}$.

Ορισμός: Περιθώριο (slack) μιας εργασίας i με χρόνο κατεργασίας p_i και ημερομηνία παράδοσης d_i , είναι η ποσότητα $d_i - p_i$.

Η εργασία με την μικρότερη διαφορά χρόνου είναι πιθανώς η πιο επικίνδυνη για να αργήσει. Ίσως τότε αν της δινόταν προτεραιότητα, αυτός ο κίνδυνος να γινόταν ελάχιστος. Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει πως η διαίσθηση μπορεί να αποτύχει παταγωδώς:

Θεώρημα ([3]): Αν οι εργασίες είναι με σειρά αυξανόμενων περιθωρίων

$$d_1 - p_1 \leq d_2 - p_2 \leq \dots \leq d_n - p_n$$

τότε το πρόγραμμα $(1, 2, \dots, n)$ μεγιστοποιεί την ελάχιστη βραδύτητα και την ελάχιστη καθυστέρηση εργασιών (προβλήματα $1||\max L_{\min}$ ή και $n|1||\max T_{\min}$, αντίστοιχα).

Απόδειξη: Στο μάθημα.

4.6 Προγραμματισμός με απαιτούμενη διαδοχή εργασιών

Επιστρέφουμε στο πρόβλημα $1||\sum F_i$, μόνο που τώρα υπάρχουν μερικές εργασίες που πρέπει να ακολουθήσουν ορισμένη τεχνολογική διαδοχή, ή που ακολουθούνται από αυστηρά καθορισμένες εργασίες, αλλιώς ο χρόνος προετοιμασίας θα αυξηθεί υπερβολικά. Έστω ότι οι n εργασίες έχουν ομαδοποιηθεί σε K ομάδες με συγκεκριμένη διαδοχή. Έστω:

n_i : ο αριθμός εργασιών στην ομάδα i , όπου $n_1 + \dots + n_K = n$

$p_{i,j}$: ο χρόνος επεξεργασίας της εργασίας j στην ομάδα i , $j=1, \dots, n_i$

$F_{i,j}$: ο αντίστοιχος χρόνος ροής

$p_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_{i,j}$: ο συνολικός χρόνος επεξεργασίας της ομάδας i

$F_i = F_{i,n_i}$: ο χρόνος ροής της ομάδας i δηλαδή της τελευταίας εργασίας της ομάδας.

Αν οι χρόνοι των ομάδων είναι SPT,

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_K,$$

τότε, προφανώς, η ακολουθία ομάδων $(1, 2, \dots, K)$ ελαχιστοποιεί το

$$\bar{F}_0 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K F_i$$

που είναι ο μέσος χρόνος ροής των ομάδων.

Παράδειγμα

Εργασία	Χρόνοι επεξεργασίας	Ομάδα	Χρόνοι επεξεργασίας	n_i
1	5	1 = (2, 4)	23	2
2	8	2 = (5, 1, 3)	10	3
3	2	3 = (6)	4	1
4	15			
5	3			
6	4			

Η ακολουθία $1||\bar{F}_0$ είναι (6, 5, 1, 3, 2, 4).

Αν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον μέσον χρόνο ροής των (επί μέρους) εργασιών

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j}$$

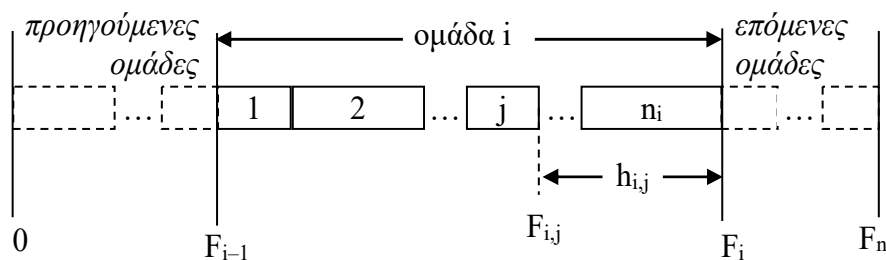
τότε ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα: Αν οι χρόνοι των ομάδων ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{p_1}{n_1} \leq \frac{p_2}{n_2} \leq \dots \leq \frac{p_K}{n_K}$$

τότε η ακολουθία ομάδων (1, 2, ..., n) ελαχιστοποιεί το $\bar{F}$.

Απόδειξη:



Έστω $h_{i,j}$ το διάστημα μεταξύ του χρόνου $F_{i,j}$ που τελειώνει η εργασία j της i ομάδας και του χρόνου F_i της περάτωσης όλων των εργασιών της ομάδας i . Έχουμε

$$h_{i,j} = F_i - F_{i,j}$$

Τώρα $F_{i,j} = F_i - h_{i,j}$ και ο μέσος χρόνος

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j} = \frac{1}{n} \left[(F_{1,1} + F_{1,2} + \dots + F_{1,n_1}) + (F_{2,1} + \dots + F_{2,n_2}) + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[\begin{aligned} &(F_1 - h_{1,1} + F_1 - h_{1,2} + \dots + F_1 - h_{1,n_1}) \\ &+ (F_2 - h_{2,1} + F_2 - h_{2,2} + \dots + F_2 - h_{2,n_2}) \\ &+ \dots \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K n_i F_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j}.$$

Αλλά τα $h_{i,j}$ δεν αλλάζουν όταν αλλάζουμε πρόγραμμα παραγωγής γιατί οι σχετικές θέσεις των εργασιών σε κάθε ομάδα είναι σταθερές. Άρα ελαχιστοποιούμε το

$$\sum_{i=1}^K n_i F_i$$

το οποίο είναι ένα πρόβλημα $1||\sum n_i F_i$ με λύση την διάταξη WSPT της Εξ. (4.2) όπου $w_i = n_i$, που είναι ίδια με του θεωρήματος.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το προηγούμενο παράδειγμα

i	n_i	p_i/n_i
1	2	11.5
2	3	3.33
3	1	4

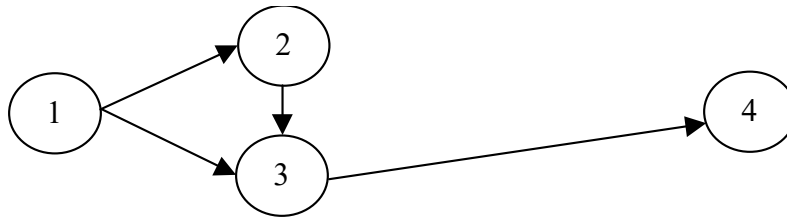
Για το πρόβλημα $1||\sum n_i F_i$ η βέλτιστη ακολουθία ομάδων είναι (2, 3, 1) και εργασιών (5, 1, 3, 6, 2, 4).

4.7 Προγραμματισμός πρότζεκτ

Το βασικό πρόβλημα είναι η πρόγνωση της διάρκειας του πρότζεκτ ώστε να παραδοθεί έγκαιρα. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό των δικτύων.

Ένα γράφημα συνίσταται από κόμβους και τόξα. Οι κόμβοι συμβολίζονται με γράμματα ή αριθμούς ενώ τα τόξα συμβολίζονται με διατεταγμένα ζεύγη (x, y) όπου x και y είναι οι κόμβοι που συνδέουν.

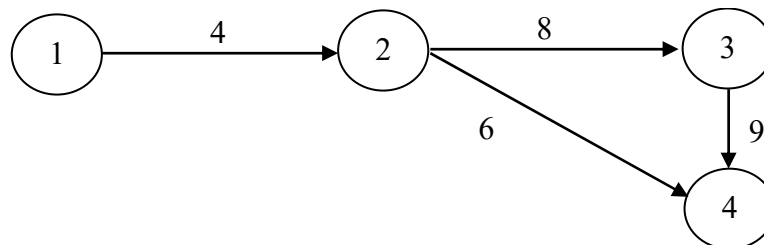
Οι κόμβοι αντιστοιχούν σε γεγονότα (π.χ. περάτωση της εγκατάστασης κινητήρων σε αεροπλάνο) ενώ τα τόξα στις διαδικασίες ή δραστηριότητες (π.χ. διαδικασία εγκατάστασης των κινητήρων).



Σε κάθε δίκτυο έχουμε τον αρχικό και τον τελικό κόμβο.

Ορισμός: Μία διαδικασία λέγεται *κρίσιμη* αν κάποια καθυστέρηση περάτωσής της προκαλεί την ίδια καθυστέρηση στην επόμενη διαδικασία. Ένας

Παράδειγμα



Η 1 είναι κρίσιμη για τις 2, 3 και 4, η 2 είναι κρίσιμη για τις 3 και 4, και η 3 είναι κρίσιμη για την 4.

Ορισμός: *Κρίσιμο μονοπάτι* (critical path) είναι εκείνο που απαρτίζεται αποκλειστικά από κρίσιμες διαδικασίες-τόξα.

Σε κάθε πρότζεκτ υπάρχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο μονοπάτι που προσδιορίζει την διάρκειά του. Ο αλγόριθμος *CPM* (Critical Path Method) δίνει τον τρόπο εύρεσης του κρίσιμου μονοπατιού.

Υποθέσεις - Συμβολισμοί:

1. Δύο κόμβοι συνδέονται με το πολύ ένα τόξο.
2. Οι αριθμοί των κόμβων είναι μοναδικοί.
3. Υπάρχει μόνον ένας αρχικό κόμβος (1) και ένας τελικός κόμβος (n).
4. t_{ij} : διάρκεια από κόμβο i σε κόμβο j
 E_i : ενωρίτερος χρόνος έναρξης της διαδικασίας i
 L_i : αργότερος χρόνος έναρξης της διαδικασίας i
 S_{ij} : διαφορά χρόνων για το τόξο (i, j)

Ο αλγόριθμος CPM

1. Θέσετε τον ενωρίτερο χρόνο για τον αρχικό κόμβο $E_1 = 0$.

2. Υπολογίσετε τον ενωρίτερο χρόνο έναρξης από:

$$E_j = \max(E_{i_1} + t_{i_1j}, \dots, E_{i_u} + t_{i_uj}), \forall j > 1$$

όπου $i_1, \dots, i_u$ συμβολίζουν διαδικασίες που προηγούνται της j .

3. Θέσετε τον αργότερο χρόνο του τελικού κόμβου ίσο με τον ενωρίτερο χρόνο του:

$$E_n = L_n.$$

4. Υπολογίσετε τον αργότερο χρόνο έναρξης από:

$$L_i = \min(L_{j_1} - t_{i,j_1}, \dots, L_{j_d} - t_{i,j_d}), \forall i < n$$

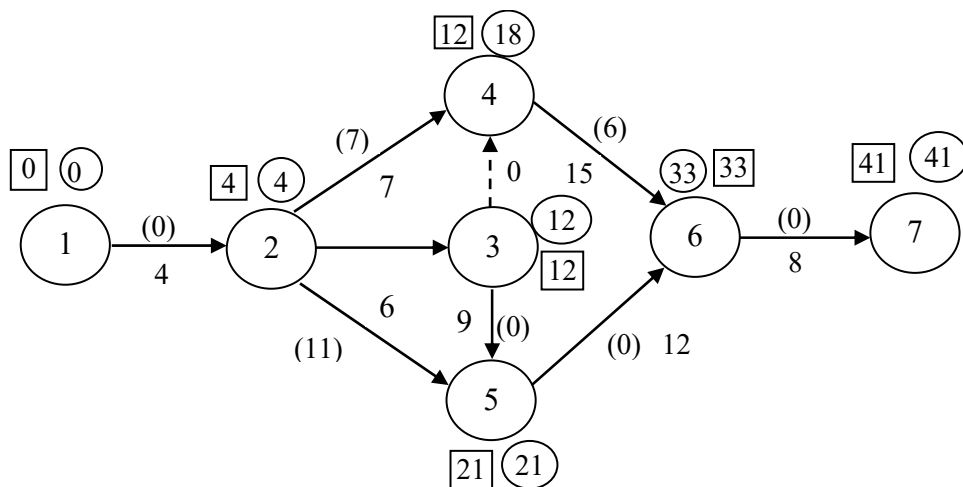
όπου $j_1, \dots, j_d$ είναι οι διαδικασίες που ακολουθούν αμέσως μετά την i .

5. Υπολογίσετε την διαφορά για το (i, j) από:

$$S_{i,j} = L_j - E_i - t_{i,j}.$$

6. Προσδιορίστε το μονοπάτι με τόξα i,j όπου $S_{i,j} = 0$. Αυτό είναι το κρίσιμο μονοπάτι.

Παράδειγμα



Το πρότζεκτ είναι:

Διαδικασία	Διάρκεια	Άμεσος προκάτοχος
(1,2)	4	
(2,4)	7	(1,2)
(2,3)	6	(1,2)
(2,5)	11	(1,2)
(4,6)	6	(2,4), (2,3)
(3,5)	9	(2,3)
(5,6)	12	(2,5), (3,5)
(6,7)	8	(4,6), (5,6)

Επειδή οι κόμβοι είναι λιγότεροι από 10, παραλείπουμε τα κόμματα στα t_{ij} και S_{ij} . Ο αλγόριθμος ακολουθεί τα εξής βήματα:

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = E_1 + t_{12} = 0 + 4 = 4$$

$$E_3 = E_2 + t_{23} = 4 + 8 = 12$$

$$E_4 = \max(E_2 + t_{24}, E_3 + t_{34}) = \max(4 + 7, 12 + 0) = 12.$$

Το ψεύτικο τόξο (3,4) με διάρκεια 0, χρειάζεται για να δείξει ότι η διαδικασία (4,6) εξαρτάται από την (2,3), αφού η (2,3) προηγείται. Παρόμοια $E_5 = 21$, $E_6 = 33$, $E_7 = 41$. Αυτούς τους αριθμούς βάζουμε σε τετράγωνα. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο αντίστροφα.

$$L_7 = E_7 = 41$$

$$L_6 = L_7 - t_{67} = 41 - 8 = 33$$

$$L_5 = L_6 - t_{56} = 33 - 12 = 21$$

$$L_4 = L_6 - t_{46} = 33 - 15 = 18$$

$$L_3 = \min(L_4 - t_{34}, L_5 - t_{35}) = \min(18 - 0, 21 - 9) = 12$$

$$L_2 = 4.$$

Αυτούς τους αριθμούς τους βάζουμε σε κύκλους. Τώρα υπολογίζουμε την διαφορά.

$$S_{67} = L_7 - E_6 - t_{67} = 41 - 33 - 8 = 0$$

$$S_{46} = L_6 - E_4 - t_{46} = 33 - 12 - 15 = 6.$$

Παρόμοια $S_{56} = 0$, $S_{35} = 0$, $S_{25} = 11$, $S_{24} = 7$, $S_{12} = 0$. Αυτούς τους αριθμούς τους βάζουμε σε παρένθεση. Το κρίσιμο μονοπάτι είναι:

$$\{(1,2), (2,3), (3,5), (5,6), (6,7)\}.$$

4.8 Προβλήματα

1. α. Εύρετε την *μέση βραδύτητα* αν οι ακόλουθες εργασίες προγραμματιστούν με αυξανόμενο χρόνο επεξεργασίας (SPT).

Εργασία	1	2	3	4	5
p_i	8	7	6	4	10
d_i	10	15	24	28	23

β. Με δεδομένο ότι η ακολουθία SPT είναι βέλτιστη για το πρόβλημα $1||\bar{F}$ να αποδείξετε ότι είναι βέλτιστη και για το $1||\bar{L}$.

2. Θεωρήστε το πρόβλημα $F_2||F_{\max}$ και τα δεδομένα

Εργασία	Χρόνοι επεξεργασίας		Ημερομηνία παράδοσης
	M ₁	M ₂	
1	1	3	5
2	2	5	12
3	4	1	16
4	3	2	20
5	6	4	25

Εύρετε την βέλτιστη ακολουθία, το $F_{\max}$, και τα αντίστοιχα $\bar{L}$ και $L_{\max}$. Υπάρχει άλλη ακολουθία με μικρότερη $L_{\max}$;

3. Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα $1||\sum w_i F_i$ λύνεται με τον κανόνα WSPT της (4.2).

Υπόδειξη: Εκφράστε το $\sum w_i F_i$ ως εσωτερικό γινόμενο δύο ακολουθιών και εφαρμόστε το θεώρημα της Παραγράφου 4.2.

4. Να αποδείξετε το θεώρημα της Παραγράφου 4.2. *Υπόδειξη:* Υποθέστε ότι η a_i είναι φθίνουσα. Αυτό μπορείτε να το κάνετε σε οποιοδήποτε εσωτερικό γινόμενο αφού όπως και να προσθέσετε τους όρους $a_i b_i$ δεν επηρεάζεται το αποτέλεσμα. Έτσι μπορείτε αυθαίρετα να διατάξετε τα a_i κατά φθίνουσα τάξη $a_1 \geq a_2 \dots$. Τώρα με την a_i φθίνουσα υποθέστε ότι η b_i δεν είναι παντού αύξουσα. Επιλέξτε τυχαία δύο γειτονικούς όρους της b_i που έχουν φθίνουσα σειρά. Εναλλάξτε θέσεις ώστε να έχουν αύξουσα σειρά αλλά μην εναλλάξετε θέσεις στα a_i . Το νέο εσωτερικό γινόμενο θα προκύψει μικρότερο. Και ολοκληρώστε με πλάγια απόδειξη: "Όταν η b_i δεν είναι παντού αύξουσα τότε δεν έχουμε ελάχιστο. Επομένως ... "

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Διαφόριση Πινάκων

Γινόμενα πινάκων και διανυσμάτων

Μία διάταξη n αριθμών-στοιχείων $x_1, x_2, \dots, x_n$ παριστάνεται ως στοιχείο διατεταγμένου συνόλου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ή ως διάνυσμα

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Το x^T είναι το ανάστροφο διάνυσμα: $x^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$. Αντίστροφα, αν x είναι διάνυσμα γραμμής τότε το x^T είναι διάνυσμα στήλης. Ο συμβολισμός με στήλες βολεύει στις πράξεις με πίνακες αλλά σπαταλά χώρο. Γι' αυτό γράφουμε $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$.

Τα στοιχεία x_i μπορεί να είναι συναρτήσεις $x_i(u)$ άλλου διανύσματος $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T$. Τότε γράφουμε $x = x(u)$ και $x_i = x_i(u) = x_i(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Ένας πίνακας A στοιχείων με m γραμμές και n στήλες ($m \times n$) συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

I είναι ο ταυτοτικός (μοναδιαίος) τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία διαγωνίου 1 και τα άλλα 0. A^T είναι ο *ανάστροφος* πίνακας ($n \times m$). **Προσοχή:** Δεν πρέπει να συγχέει κανείς τον A^T με τον αντίστροφο A^{-1} . Στο μάθημα αυτό χρειάζεται να υπολογίζετε τους A^{-1} .

Για διανύσματα w ($n \times 1$), x ($n \times 1$), y ($m \times 1$) και πίνακες A ($m \times n$), B ($n \times p$) ορίζονται
(i) γινόμενο διανυσμάτων

$$w^T x = [w_1 \ \dots \ w_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = w_1 x_1 + \dots + w_n x_n = \sum_{k=1}^n w_k x_k$$

που είναι *βαθμωτό* μέγεθος, δηλαδή μη διανυσματικό,

(ii) γινόμενο πίνακα με διάνυσμα στήλης ή γινόμενο διανύσματος γραμμής με πίνακα

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n) \\ (A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n) \\ \dots \\ (A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n A_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^n A_{2k}x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{mk}x_k \end{bmatrix} \quad (m \times 1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T A &= \begin{bmatrix} (y_1 A_{11} + y_2 A_{21} + \dots + y_m A_{m1}) & (y_1 A_{12} + y_2 A_{22} + \dots + y_m A_{m2}) & \dots & (y_1 A_{1n} + y_2 A_{2n} + \dots + y_m A_{mn}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m y_j A_{j1} & \sum_{j=1}^m y_j A_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^m y_j A_{jn} \end{bmatrix} \quad (1 \times n) \end{aligned}$$

(iii) γινόμενο $\mathbf{y}^T A \mathbf{x}$, που είναι το βαθμωτό μέγεθος,

$$\mathbf{y}^T A \mathbf{x} = (\mathbf{y}^T A) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m y_j A_{j1} & \sum_{j=1}^m y_j A_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^m y_j A_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m y_j A_{jk} x_k$$

και (iv) το γινόμενο πινάκων A ($m \times n$) και B ($n \times p$)

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n A_{1k} B_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{1k} B_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{1k} B_{kp} \\ \sum_{k=1}^n A_{2k} B_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{2k} B_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{2k} B_{kp} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{mk} B_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{mk} B_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{mk} B_{kp} \end{bmatrix}$$

όπου $(m \times n)(n \times p) = (m \times p)$ και οι A και B είναι συμβατοί: (στήλες A) = (γραμμές B) = n .

Για τον ανάστροφο του γινομένου δύο η περισσότερων πινάκων ισχύει ότι

$$(AB \dots C)^T = C^T \dots B^T A^T.$$

Παράγωγοι

Ορισμός: Αν $\alpha = \alpha(\mathbf{u})$ είναι μία συνάρτηση του $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_p]^T$, η κλίση της α ορίζεται¹

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}} = \text{grad}(\alpha) = \nabla \alpha \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \alpha}{\partial u_p} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

¹ Στα βιβλία η κλίση ορίζεται ως **διάνυσμα στήλης** ενώ στην (A.1) την ορίζουμε ως **γραμμή**. Έτσι, οι τύποι που θα προκύψουν στη συνέχεια ταυτίζονται με των βιβλίων αν αλλάξουμε τις γραμμές σε στήλες.

Ορισμός: Αν $w(u)$ είναι διάνυσμα $(m \times 1)$ με στοιχεία που είναι συναρτήσεις του u ,

$$w = \begin{bmatrix} w_1(u) \\ \dots \\ w_m(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(u_1, \dots, u_p) \\ \dots \\ w_m(u_1, \dots, u_p) \end{bmatrix}$$

η παράγωγος του w ως προς το u ορίζεται ως πίνακας $(m \times p)$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1(u)}{\partial u} \\ \dots \\ \frac{\partial w_m(u)}{\partial u} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1(u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial w_1(u)}{\partial u_p} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial w_m(u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial w_m(u)}{\partial u_p} \end{bmatrix}. \quad (A.2)$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι η παράγωγος του u ως προς u (δηλ. τον εαυτό του) είναι ο ταυτοτικός πίνακας:

$$\frac{\partial u}{\partial u} = I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T$ και $w(u)$ και $x(u)$ είναι διανύσματα $(n \times 1)$ συναρτήσεις του u ,

$$w = \begin{bmatrix} w_1(u) \\ \dots \\ w_n(u) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1(u) \\ \dots \\ x_n(u) \end{bmatrix}$$

τότε το $w^T x$ είναι, όπως είδαμε, ένα βαθμωτό μέγεθος ίσο με $\sum_{k=1}^n w_k x_k$ και συγχρόνως

είναι συνάρτηση του u . Από τον ορισμό (A.1), η κλίση του $w^T x$ είναι διάνυσμα γραμμής.

Με διαδοχικές πράξεις προκύπτουν οι ισοδύναμες εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (w^T x)}{\partial u} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n w_k x_k \right)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n w_k x_k \right)}{\partial u_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial (w_k x_k)}{\partial u_1} & \dots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial (w_k x_k)}{\partial u_p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial w_k}{\partial u_1} x_k & \dots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial w_k}{\partial u_p} x_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_1} w_k & \dots & \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_p} w_k \end{bmatrix} \\ &= x^T \frac{\partial w}{\partial u} + w^T \frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Για σταθερό πίνακα A $(m \times n)$ και διάνυσμα x $(n \times 1)$ που είναι συνάρτηση του $u = [u_1 \dots u_p]$, η παράγωγος του διανύσματος Ax ως προς u υπολογίζεται

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(Ax)}{\partial u} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n A_{1k} x_k \right)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n A_{1k} x_k \right)}{\partial u_p} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n A_{mk} x_k \right)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^n A_{mk} x_k \right)}{\partial u_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n A_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{1k} \frac{\partial x_k}{\partial u_p} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{mk} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{mk} \frac{\partial x_k}{\partial u_p} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_p} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_p} \end{bmatrix} = A \frac{\partial x}{\partial u}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Ειδικά όταν $u = x$, λόγω του ότι $\partial x / \partial x = I$, προκύπτει

$$\frac{\partial(Ax)}{\partial x} = A. \tag{A.5}$$

Για σταθερό πίνακα A ($m \times n$) και διανύσματα x ($n \times 1$) και y ($m \times 1$) που είναι συναρτήσεις του $u = [u_1 \dots u_p]$, η έκφραση

$$y^T Ax$$

είναι μία βαθμωτή συνάρτηση του u . Η παράγωγός της υπολογίζεται ως εξής. Γράφουμε

$$\frac{\partial(y^T Ax)}{\partial u} = \frac{\partial(w^T x)}{\partial u}$$

όπου έχουμε ορίσει $w^T = y^T A$. Από την Εξ. (A.3),

$$\frac{\partial(y^T Ax)}{\partial u} = \frac{\partial(w^T x)}{\partial u} = x^T \frac{\partial w}{\partial u} + w^T \frac{\partial x}{\partial u}$$

Επί πλέον, από την $w = A^T y$ και την (A.4) προκύπτει $(\partial w / \partial u) = A^T (\partial y / \partial u)$ και με αντικατάσταση στην ανωτέρω έκφραση έχουμε τελικά

$$\frac{\partial(y^T Ax)}{\partial u} = x^T A^T \frac{\partial y}{\partial u} + y^T A \frac{\partial x}{\partial u} \tag{A.6}$$

Αν $x = y = u$ και $m = n$, οι παράγωγοι ισούνται με I και η προηγούμενη απλοποιείται σε

$$\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} = x^T A^T + x^T A = x^T (A^T + A) \tag{A.7}$$

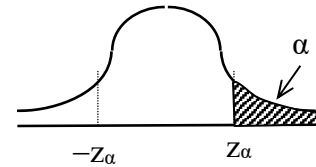
Αν επί πλέον ο A είναι συμμετρικός ($A = A^T$) τότε

$$\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} = 2x^T A \tag{A.8}$$

Στο μάθημα της γραμμικής παλινδρόμησης θα χρειαστούμε τις Εξ. (A.5) και (A.8).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Η τυποποιημένη κανονική κατανομή, $N(0, 1)$

Τιμές z_α που αντιστοιχούν σε πιθανότητα $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$.



	. 0	. 1	. 2	. 3	. 4	. 5	. 6	. 7	. 8	. 9	
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	0.0
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	0.1
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	0.2
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	0.3
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	0.4
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	0.5
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451	0.6
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148	0.7
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867	0.8
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	0.9
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	1.0
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	1.1
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985	1.2
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823	1.3
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681	1.4
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559	1.5
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455	1.6
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367	1.7
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294	1.8
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233	1.9
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183	2.0
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143	2.1
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	2.2
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084	2.3
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064	2.4
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048	2.5
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	2.6
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	2.7
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	2.8
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	2.9
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	3.0
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	3.1
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	3.2
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	3.3
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	3.4
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	3.5
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.6
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.7
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	3.8
3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003	3.9
4.0	0.000032										

Παράδειγμα 1. Αν $F(z) = P(Z \leq z) = 0.90$, τότε $P(Z \geq z) = 0.10$. Από τον πίνακα, το πλησιέστερο στοιχείο είναι το 0.1003 που αντιστοιχεί στην γραμμή 1.2_ και στήλη _ 8. Άρα $z = 1.28$. Μπορούμε να κάνουμε γραμμική παρεμβολή του 0.10 στα γειτονικά στοιχεία 0.1003 και 0.0985. Το τελικό z θα είναι πιο ακριβές αλλά η διαφορά του από το 1.28 είναι πρακτικά αμελητέα.

Παράδειγμα 2. Αν $F(z) = 0.14 < 0.5$, τότε το σημείο z είναι αρνητικό και συμμετρικό με το σημείο z_α για το οποίο $P(Z \geq z_\alpha) = 0.14$. Το πλησιέστερο στοιχείο του πίνακα είναι το 0.1401 με $z_\alpha = 1.08$. Συνεπώς $z = -1.08$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] L. A. Johnson and D. C. Montgomery, *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, Wiley, New York, 1974.
- [2] K. R. Baker, *Introduction to Sequencing and Scheduling*, Wiley, New York, 1974.
- [3] R. W. Conway, W. L. Maxwell, and L. W. Miller, *Theory of Scheduling*, Addison-Wesley, Reading MA, 1967. Διαθέσιμο από¹
<https://archive.org/stream/TheoryOfScheduling/TheoryOfScheduling.djvu>.
- [4] J. D. C. Little, K. G. Sweeney, and C. Karel, "An algorithm for the traveling salesman problem," *Operations Research*, vol. 11, no. 6, pp. 972–989, 1963.
- [5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1988.
- [6] S. M. Johnson, "Optimal two- and three- stage production schedules with setup times included," *Naval Research Logistics*, vol. 1, no. 1, pp. 61–68, 1954.
- [7] J. R. Jackson, "Scheduling a production line to minimize maximum tardiness," Research report no. 35, Management Sciences Research Project, University of California, Los Angeles, 1955.

¹ Προγράμματα ανάγνωσης αρχείων με κατάληξη είναι τα WinDjView και MacDjView, διαθέσιμα από <http://djvu.org/resources/>.