

ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ**Να ξέρετε ορισμούς και τύπους από:** Εισαγωγή και Στρατηγικές ελέγχου αποθεμάτων.

Ακρότατα: $f(x)$ συνάρτηση του $x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Αν $\partial f(x^*)/\partial x_i = 0 \forall i$, το x^* είναι στάσιμο σημείο και τοπικό ακρότατο. Αν $f =$ κυρτή (κοίλη) παντού, το x^* είναι ολικό $\min$ ($\max$). Η f είναι κυρτή (κοίλη) όταν $f[\theta\alpha + (1-\theta)\beta] \leq (\geq) \theta f(\alpha) + (1-\theta)f(\beta) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ και $\forall \theta \in [0, 1]$. Αν ο $H(x) = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ έχει όλες τις ιδιοτιμές ≥ 0 (≤ 0) $\forall x$, τότε $f =$ κυρτή (κοίλη).

Πολιτικές (Q,r)-Ορισμοί: D=ρυθμός ζήτησης (μονάδες ανά μον.

χρόνου), P=ρυθμός παραγωγής/εκφόρτωσης, $\rho = D/P$, $I(t)$ =καθαρό απόθεμα, b =μέγιστη έλλειψη, $I_{\max}$ =μέγιστο απόθεμα, A =σταθερό κόστος παραγγελίας, C =κόστος μίας μονάδας, h =κόστος αποθέματος ανά μονάδα και ανά μον. χρόνου= IC , Π =κόστος έλλειψης αγαθού ανά μονάδα, ανεξάρτητο από τη διάρκεια έλλειψης, $\hat{\Pi}$ =κόστος έλλειψης αγαθού ανά μονάδα και ανά μονάδα χρόνου, Q =σταθερή ποσότητα παραγγελίας αναπληρώσης του αποθέματος, τ =χρόνος μέχρι να έλθει η παραγγελία, r =σημείο παραγγελίας. Εκφράσεις συναρτήσει των Q και b : $I_{\max} = Q(1-\rho) - b$, $Q = P(T_1 + T_2)$, $Q = DT \Rightarrow T = Q/D$, $T_1 = b/(P-D)$, $T_2 = I_{\max}/(P-D)$, $T_3 = I_{\max}/D$, $T_4 = b/D$ (**γιατί;**). Αριθμός μη ετοιμοπαράδοτων παραγγελιών/κύκλος= $D(T_1 + T_4)$ και μέσος αριθμός/μονάδα χρόνου= $D(T_1 + T_4)/T$. Μέσο

απόθεμα: $\bar{I} = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} (T_2 + T_3) I_{\max} \right] = \frac{[Q(1-\rho) - b]^2}{2Q(1-\rho)}$. Μέσο έλλειμμα: $\bar{B} = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} b T_1 + \frac{1}{2} b T_4 \right) = \frac{b^2}{2Q(1-\rho)}$.

Πρόβλημα: **min** μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου, με δέσμευση ότι όλη η ζήτηση τελικά θα ικανοποιηθεί:

$$\min_{Q \geq 0, b \geq 0} K(Q, b) = \frac{AD}{Q} + CD + h\bar{I} + \hat{\Pi}\bar{B} + \Pi D \frac{T_1 + T_4}{T} = \frac{AD}{Q} + CD + \frac{h[Q(1-\rho) - b]^2}{2Q(1-\rho)} + \frac{\hat{\Pi} b^2}{2Q(1-\rho)} + \frac{\Pi D b}{Q(1-\rho)}.$$

Αν $A=0$, τότε παραγγέλλουμε κάθε dt απειροστικά μικρή ποσότητα $Q^*=Ddt$, όση χρειάζεται, κι έτσι $I(t)=0 \forall t$. Αν $h=0$, τότε παραγγέλλουμε μία μόνο φορά ποσότητα $Q^*=\infty$ και επειδή $I(t)=\infty \forall t$ δεν έχουμε ποτέ έλλειψη.

Αλλιώς έχουμε το (**μοντέλο**) **M.I (P<∞, b>0)**: Ορίζουμε $E \pm 2AD(h + \hat{\Pi}) - \frac{(D\Pi)^2}{1-\rho}$. Τότε $Q^* = \sqrt{\frac{E}{h\hat{\Pi}(1-\rho)}}$ και

$b^* = \frac{hQ^*(1-\rho) - D\Pi}{h + \hat{\Pi}}$. Αν $E < 0$ ή αν $b^* < 0$, τότε θέτουμε $b^*=0$ και χρησιμοποιούμε το Q^* του M.II. Έστω m =ακέραιο μέρος (τ/T). Παραγγέλλουμε όταν $I(t)=r$, όπου $r=\tau D - mQ - b$ αν $\tau - mT \leq T_3 + T_4$ και

$r=[(m+1)Q/D - \tau](P-D) - b$ όταν $\tau - mT \geq T_3 + T_4$. **M.II (P<∞, b=0)**: $Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h(1-\rho)}}$, $b^*=0$ και r όπως στο M.I. **M.III**

(P→∞, b>0): Όπως το M.I με $\rho=0$, $r=\tau D - mQ - b$. **M.IV (P→∞, b=0)**: ίδιο με M.II θέτοντας $\rho=0$.

Εκπτώσεις ποσότητας: Αν $Q \geq N_j$ τότε $C=C_j$. Για κάθε C_j ευρίσκουμε το Q_j^* με ελάχιστο κόστος K_j . Αν $Q_j^* \geq N_j$ τότε $Q_j=Q_j^*$ και $K_j=K_j(Q_j^*)$, αλλιώς $Q_j=N_j$ και $K_j=K_j(N_j)$. Επιλέγουμε το Q_n και n : $K_n(Q_n)=\min_j K_j$.

Δυναμική ζήτηση, πεπερασμένος ορίζοντας: Έστω $D(t)$ ο ρυθμόςζήτησης τη στιγμή t και T ο χρονικός ορίζοντας. Η ζήτηση στο $[0, t]$ είναι

$Z(t) = \int_0^t D(\tau) d\tau$. Αν $b=0$ και $P=\infty$, τότε συμφέρει να αναπληρώνουμε

το απόθεμα τις στιγμές t_i που $I(t_i)=0$ (**γιατί;**). Έστω Q_i η ποσότητα που φθάνει τη στιγμή t_i . Μικρά $Q_i \Leftrightarrow$ απαιτείται μεγάλας συνολικός αριθμός παραγγελιών n . Για δεδομένο n και $t_{n+1}=T$, το συνολικό κόστος ισοϋται με $nA + CZ(T) + H_n$ όπου H_n =κόστος αποθέματος

$= h \left[\sum_{j=0}^n [Z(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j)] - \int_0^T Z(t) dt \right]$. Ο όρος $nA + CZ(T)$ είναι σταθερός για δεδομένο n και το ελάχιστο

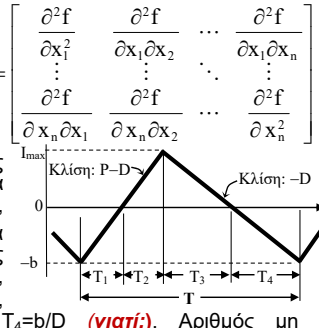
κόστος K_n επιτυγχάνεται για t_i τέτοια ώστε: $Z(t_i)=I(0)$ και $Z(t_{i+1})=Z(t_i) + (t_i - t_{i-1})D(t_i)$, $\forall j=2, \dots, n$ (**γιατί;**). Από αυτές τις εξισώσεις ευρίσκουμε τα t_i , τα $Q_i=Z(t_{i+1}) - Z(t_i)$ και τέλος το K_n . Επιλέγουμε εκείνο το n με $\min K_n$.

Σχεδίαση παραγωγής, Επιλογή διαδικασίας παραγωγής, Προβλήματα ανάμιξης: Τέτοια προβλήματα και παραλλαγές τους διατυπώνονται ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού (**πώς;**).

Στοχαστική ζήτηση: Η συνολική ζήτηση D σε μία περίοδο είναι τυχαία μεταβλητή. Αν είναι γνωστές οι $P(D=x)$ (D =διακριτή) ή η πυκνότητα $f(x)=dF(x)/dx$ (D =συνεχής), τότε μπορούμε να εύρουμε τις $F(x)=P(D \leq x)$ για δεδομένα x και αντίστροφα να εύρουμε το x αν η τιμή $F(x)$ είναι γνωστή.

Για κάθε κατανομή ισχύει ότι: αν $E(D)=\mu$, $\text{Var}(D)=\sigma^2$ και $\sigma \neq 0$, τότε $F(x) = P(Z \leq (x-\mu)/\sigma)$ όπου $Z \pm (D-\mu)/\sigma$, $E(Z)=0$, $\text{Var}(Z)=1$. Αν επί πλέον $D \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $Z \sim N(0, 1)$ και κάνουμε χρήση πίνακα.

Βελτιστοποίηση με περιορισμούς: Αναζητούμε το $\min_x f(x)$ ή το $\max_x f(x)$ όταν $g_i(x^*)=\dots=g_m(x^*)=0$. Αν οι g_i είναι κυρτές με συνεχείς παραγώγους, το πρόβλημα λύνεται με κάποιον από τους ακόλουθους δύο τρόπους: (**α**) Λύνουμε τους περιορισμούς $g_i(x)=0$ και κάποια x_k προκύπτουν συναρτήσει άλλων x_i . Τα x_k τα αντικαθιστούμε στην $f(\dots x_k \dots x_k \dots)$ και προκύπτει νέα συνάρτηση $F = f$ με αγνώστους μόνο τα x_i . Λύνουμε το



σύστημα $\partial F / \partial x_i^* = 0$ ως προς x_i . (**β**) Σχηματίζουμε την επαυξημένη συνάρτηση $L(x; \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$ όπου $\lambda_j =$ πολλαπλασιαστές Lagrange. Έχουμε πρόβλημα $\min L(x; \lambda)$ ή $\max L(x; \lambda)$ χωρίς περιορισμούς. Από τις συνθήκες στάσιμου $\partial L / \partial x_i = 0$ και $\partial L / \partial \lambda_j = 0 \Rightarrow g_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ ευρίσκουμε τα x_i^* και λ_j^* .

Στα α) και β) το τοπικό ακρότατο x^* είναι **ολικό ελάχιστο** όταν $f=$ κυρτή και **ολικό μέγιστο** όταν $f=$ κοίλη.

Αν υπάρχουν περιορισμοί ανισότητας, τότε λύνουμε το πρόβλημα αγνοώντας τους. Αν η λύση τους ικανοποιεί τότε είναι η βέλτιστη. Αν κάποιοι δεν ικανοποιούνται, τότε ξαναλύνουμε υποπροβλήματα, σε καθένα από τα οποία προσθέτουμε **έναν** από τους περιορισμούς που παραβιάστηκαν **ως ισότητα**. Επαναλαμβάνουμε για όλα τα υποπροβλήματα και μετά επιλέγουμε την καλύτερη λύση (αν υπάρχει κάποια).

Πολλά προϊόντα, στοχαστική ζήτηση: Διαθέτουμε κεφάλαιο B για προμήθεια N ειδών που θα μεταπωλήσουμε. Τα προϊόντα έχουν ίδια ημερομηνία λήξης. Έστω X_i =μονάδες προϊόντος i που θα διαθέσουμε, C_i =μοναδιαίο κόστος, r_i =μοναδιαία τιμή πώλησης πριν τη λήξη, r_i' =μοναδιαίο έσοδο από την απόσυρση μετά τη λήξη, D_i =τυχαία ζήτηση του i πριν τη λήξη, $F_i(\delta)=P(D_i \leq \delta)$. Πωλήσεις πριν τη λήξη

$\Phi_i = \min(X_i, D_i)$ και υπόλοιπο μετά τη λήξη $X_i - \Phi_i$. Κέρδος Z =έσοδα-έξοδα= $\sum_{i=1}^N [r_i \Phi_i + r_i'(X_i - \Phi_i) - C_i X_i]$, μέσο

κέρδος $E(Z) = \sum_{i=1}^N [(r_i - r_i')E(\Phi_i) + (r_i' - C_i)X_i]$. Αν D_i = διακριτή $\Rightarrow E(\Phi_i) = \sum_{x=0}^{X_i} x p_i(x) + X_i \sum_{x=X_i+1}^{\infty} p_i(x)$. Αν D_i =

συνεχής $\Rightarrow E(\Phi_i) = \int_0^{X_i} x f_i(x) dx + X_i \int_{X_i}^{\infty} f_i(x) dx = X_i - \int_0^{X_i} F_i(x) dx$ (**γιατί;**).

Εφαρμογή για συνεχείς D_i : $\max_{\{x_i\}} E(Z) = \dots = \sum_{i=1}^N \left[(r_i - C_i)X_i - (r_i - r_i') \int_0^{X_i} F_i(\delta) d\delta \right]$ υπό $\sum_{i=1}^N C_i X_i = B$.

Επαυξημένη $L = E(Z) + \lambda \left(\sum_{i=1}^N C_i X_i - B \right)$. Συνθήκες ακροτάτου: $\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow r_i - C_i - (r_i - r_i') F_i(X_i) + \lambda C_i = 0$ (**γιατί;**)

$\Rightarrow F_i(X_i) = \frac{r_i - (1-\lambda)C_i}{r_i - r_i'} \Rightarrow$ λύνουμε $X_i = X_i(\lambda)$. Από $\sum_{i=1}^N C_i X_i(\lambda) = B \Rightarrow \lambda =$ γνωστό και αντικαθιστούμε $X_i = X_i(\lambda)$.

Μεγέθη παρτίδων παραγωγής, σταθερή ζήτηση: Σύστημα παράγει N προϊόντα με $b=0$. Σε κάθε κύκλο διάρκειας T παράγονται όλα τα είδη κατά παρτίδες και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Το προϊόν j έχει ρυθμό ζήτησης D_j και μπορούμε να το παραγάγουμε με ρυθμό P_j . Το $\rho_j = D_j/P_j$ είναι το κλάσμα του χρόνου που το σύστημα παράγει το j . Υποθέτουμε ότι $\rho \triangleq \sum_{j=1}^N \rho_j \leq 1$. Το μέγεθος Q_j παρτίδας του προϊόντος j που

παράγεται σε χρόνο T είναι όσο η ζήτηση: $Q_j = T D_j$. Ρυθμός κόστους $K(T) = \sum_{j=1}^N K_j = (b=0 \Rightarrow \text{Μοντέλο II} \Rightarrow) =$

$\sum_{j=1}^N \left[\frac{A_j}{T} + C_j D_j + h_j \frac{T D_j}{2} (1 - \rho_j) \right]$. Από $\frac{\partial K}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{j=1}^N A_j}{\sum_{j=1}^N h_j D_j (1 - \rho_j)}}$ (**γιατί;**). Για παραγωγή $Q_j = T D_j$ το

σύστημα πρέπει σε έναν κύκλο T να παράγει το j για χρόνο $T_j = T D_j / P_j = T \rho_j$. Αν για κάθε παρτίδα j η μηχανή χρειάζεται και χρόνο προετοιμασίας S_j , τότε ο κύκλος T πρέπει να είναι μεγάλος ώστε $\sum_{j=1}^N (S_j + T \rho_j) \leq T$.

Άρα πρέπει $T \geq \frac{1}{1-\rho} \sum_{j=1}^N S_j \triangleq T_{\min}$ και $\rho < 1$ (**γιατί;**). Αν $T \geq T_{\min}$, η βέλτιστη περίοδος είναι $T=T^*$ και εισάγουμε

επί πλέον χρόνο αδράνειας T_0 ώστε $T_0 + \sum_{j=1}^N (S_j + T_j) = T$. Αν $T_{\min} > T^*$, τότε $T=T_{\min}$ και $T_0 = 0$.

Δυναμικός προγραμματισμός (ΔΠ): Εξετάζουμε ένα σύστημα για N περιόδους ή βαθμίδες λειτουργίας του, $n=1, \dots, N$. Γνωρίζουμε την κατάσταση x_1 του συστήματος στη βαθμίδα 1. Εν γένει, αν στη βαθμίδα n το σύστημα είναι στην κατάσταση x και εφαρμόσουμε μία απόφαση ελέγχου d , τότε από την x μεταβαίνουμε σε νέα κατάσταση $x_{n+1}=f_n(x, d)$ και το σύστημα επιβαρύνεται με κόστος $K_n=K_n(x, d)$. Ζητούμε τις αποφάσεις που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος $K_1 + \dots + K_n + K_{n+1} + \dots + K_N$. Συμβολίζουμε $C_n(x) \triangleq \min (K_n + K_{n+1} + \dots + K_N)$ το ελάχιστο κόστος από την n ως τη N δοθέντος ότι $x_n=x$. Εξίσωση του ΔΠ:

$C_n(x) = \min_d [K_n(x, d) + C_{n+1}(f_n(x, d))]$, $n=N, N-1, \dots, 1$, όπου $C_{N+1}=0$.

Αλγόριθμος ΔΠ: Εφαρμόζουμε την εξ. ΔΠ ξεκινώντας από το τέλος, για $n=N, N-1, \dots, 1$. Σε κάθε n βρίσκουμε το βέλτιστο d για κάθε πιθανή κατάσταση x χρησιμοποιώντας τα C_{n+1} της προηγούμενης επανάληψης. Αποθηκεύουμε το $C_n(x)$ και την αντίστοιχη βέλτιστη απόφαση $d_n(x)$ για κάθε x . Αν $n=1$, εξετάζουμε μόνο την κατάσταση x_1 και το $C_1(x_1)$.

Ελαχιστοποίηση προετοιμασιών: d_{kj} =χρόνος προετοιμασίας από προϊόν k για το j , $C_n(j, S) \triangleq$ ελάχιστος χρόνος προετοιμασιών από το 1 μέχρι και το j με ενδιάμεσα τα n προϊόντα του συνόλου S . Κατάσταση: (j, S) . **Αλγόριθμος:** (α) Ξεκινάμε με $n=0$ και $S=\emptyset$: $C_0(j, \emptyset) = d_{1j}$ για κάθε $j=2, 3, \dots, N$.

(β) Για $n=1, 2, \dots, N-2$: εφαρμόζεται η εξ. ΔΠ, $C_n(j, S) = \min_{k \in S} [C_{n-1}(k, S - \{k\}) + d_{kj}]$, $\forall j \neq 1$ για κάθε πιθανό S .

(γ) Στο τελευταίο στάδιο $N-1$, έχουμε μόνο $j=1$ και $S=\{2, 3, \dots, N\}$: $C_{N-1}(1, S) = \min_{k \in S} [C_{N-2}(k, S - \{k\}) + d_{k1}]$.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Γραμμική παλινδρόμηση: Μιας διαδικασίας X_t γνωρίζουμε τις τιμές $X_{it} = x_i$ για $t=t_i$ και $i=1, \dots, n$, και έχουμε το μοντέλο εκτίμησης $\hat{X}_t = \alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_m f_m(t) = \alpha^T F(t) = F^T(t) \alpha$ όπου $F(t) \triangleq [f_1(t) \dots f_m(t)]^T$ γνωστές συναρτήσεις και $\alpha \triangleq [\alpha_1 \dots \alpha_m]^T$ άγνωστες παραμέτροι. Σφάλματα: $\varepsilon(t_i) \triangleq x_i - \alpha^T F(t_i)$. Ζητείται το α ώστε $\min \sum_{i=1}^n q_i \varepsilon^2(t_i) = \varepsilon^T Q \varepsilon$

με $\varepsilon \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon(t_1) \\ \vdots \\ \varepsilon(t_n) \end{bmatrix}$, $Q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q_n \end{bmatrix}$. Θέτοντας $A \triangleq \begin{bmatrix} f_1(t_1) & \dots & f_1(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(t_1) & \dots & f_m(t_n) \end{bmatrix}$, $X \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ προκύπτει $\varepsilon^T Q \varepsilon = X^T Q X -$

$X^T Q A^T \alpha - \alpha^T A Q X + \alpha^T A Q A^T \alpha$. Ακρότατο: $\partial(\varepsilon^T Q \varepsilon) / \partial \alpha = -2 A Q X + 2 A Q A^T \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = (A Q A^T)^{-1} A Q X$. Ο $H(\alpha)$ έχει ιδιοτιμές ≥ 0 (**γιατί;**), άρα $\alpha = \text{ολικό ελάχιστο}$.

Κινούμενος μέσος όρος: Αν $\hat{X}_t = \alpha$ και $q_i = 1$, τότε η εκτιμήτρια γραμμικής παλινδρόμησης είναι $\alpha = (X_1 + \dots + X_n) / n$ (**γιατί;**). Αν πάρουμε μέσον όρο μόνο με τα k πιο πρόσφατα x_i , η εκτιμήτρια λέγεται κινούμενος μέσος όρος. **Εκθετική εξομάλυνση:** Αν $t_i = t$ (ισαπέχουσες χρονικές στιγμές) και εκθετικά βάρος $q_i = \beta^{n-i}$, για $\beta \in (0, 1)$, τότε το $\sum_{i=1}^n \beta^{n-i} (x_i - \alpha)^2$ ελαχιστοποιείται για $\alpha = \frac{1-\beta}{1-\beta^n} \sum_{i=1}^n \beta^{n-i} x_i \triangleq Y_n$ (**γιατί;**). Όταν $n \rightarrow \infty$, ισχύει

ότι $Y_n = \beta Y_{n-1} + (1-\beta)x_n$ (**γιατί;**).

Εκτίμηση της κατανομής: Δίνονται τα y_i και ζητούνται οι $P_i \triangleq P(y_{i-1} < X_i \leq y_i)$, $i=1, \dots, m$. Έστω $\hat{P}_i \triangleq [\hat{P}_{i,1} \dots \hat{P}_{i,m}]^T$ το διάνυσμα εκτιμήσεων τους. Αν έχουμε το $\hat{P}_{i-1}$ και πάρουμε νέα μέτρηση X_i και σχηματίζουμε το $I_i = [0 \dots 1 \dots 0]$ με 1 στη θέση i έστω k όπου $y_{k-1} < X_i \leq y_k$. Το νέο διάνυσμα σύμφωνα με την εκθετική εξομάλυνση είναι $\hat{P}_i = \beta \hat{P}_{i-1} + (1-\beta)I_i$. **Εκτίμηση της $F(y) = P(X_i \leq y)$:** $\hat{F}(y_i) = \hat{P}_{i,1} + \hat{P}_{i,2} + \dots + \hat{P}_{i,i}$ όταν $y=y_i$, αλλιώς γραμμική παρεμβολή μεταξύ των άκρων του διαστήματος όπου $y \in [y_{i-1}, y_i]$. **Εκτίμηση y όταν $F(y) = \alpha$:** $\hat{y} = y_i$ όταν $\alpha = F(y_i)$, αλλιώς γραμμική παρεμβολή εκεί όπου $\alpha \in [F(y_{i-1}), F(y_i)]$.

Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων (MEE): Μία τυχαία μεταβλητή Y εξαρτάται από μία άλλη X σύμφωνα με γνωστή συνάρτηση πυκνότητας $f(y|x)$. Αν είναι γνωστό ότι $X=x$, τότε η εκτιμήτρια $g(x)$ της Y με το μικρότερο τετραγωνικό σφάλμα $E[(Y-g(x))^2]$ είναι η $g(x) = E(Y|X=x) = \int y f(y|x) dy$.

Εκτίμηση Bayes: Έχουμε n παρατηρήσεις $x_1, \dots, x_n$ της διαδικασίας X_t και θέλουμε να εκτιμήσουμε κάποια παράμετρο θ που σχετίζεται με την X_t . Αν γνωρίζουμε τις πυκνότητες $f_1(x_1, \dots, x_n | \theta)$ και $f_2(\theta)$, τότε από MEE $\Rightarrow \hat{\theta} = E(\theta | x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta | x_1, \dots, x_n) d\theta$, όπου $f(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f_1(x_1, \dots, x_n | \theta) f_2(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, \dots, x_n | \theta) f_2(\theta) d\theta}$ (**γιατί;**).

Μοντέλα Box-Jenkins: Έχουμε μία χρονοσειρά n τιμών $x_1, \dots, x_n$ της X_t και ζητούμε $\hat{X}_{n+1}, \hat{X}_{n+2}, \dots$ **Υποθέσεις:** Η X_t (i) είναι αμετάβλητη κατά την ευρεία έννοια (ΑΚΕΕ) με $E(X_t) = \mu = \text{σταθ.}$ και αυτοσυσχετιστικότητα $E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = C_{XX}(k)$ που δεν εξαρτάται από το t , (ii) εξαρτάται από λευκό θόρυβο a_t , όπου $E(a_t) = 0$, $E(a_t^2) = \sigma_a^2$ (άγνωση), και $E(a_t a_{t-k}) = 0 \forall k \neq 0$, και (iii) είναι ανεξάρτητη από **μελλοντικούς** θορύβους $a_{t+k} \forall t$ και $\forall k > 0$.

Τελεστές διαφόρισης B, ∇ : $B^k X_t = X_{t-k}$ και $\nabla^d X_t = (1-B)^d X_t$. Αν η X_t δεν είναι ΑΚΕΕ, εφαρμόζουμε κατάλληλες διαφορίσεις. Π.χ. η διαφόριση $X_t - X_{t-12} = (1-B^{12})X_t$ εξαλείφει την περιοδικότητα 12 μηνών. Διαφορίζουμε τα x_t , αφαιρούμε τον μέσον όρο των διαφορών και προκύπτει μία χρονοσειρά y_t της διαδικασίας Y_t που είναι ΑΚΕΕ με $E(Y_t) = 0$. Εκτιμούμε τις αυτοσυσχετιστικότητες $\gamma_k = E(Y_t Y_{t-k})$ και τους συντελεστές συσχέτισης $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$ της Y_t από τα y_t με **κατάλληλες δειγματικές εκτιμήσεις (πώς;)**. Ισχύει ότι $\rho_0 = 1$.

Στατιστικός έλεγχος: Αν η δειγματική $|\hat{\rho}_k| \leq 2/n^{0.5}$ τότε δεν απορρίπτουμε την υπόθεση ότι $\rho_k = 0$. Αν $\rho_k = 0 \forall k \neq 1$, η Y_t είναι λευκός θόρυβος και $\hat{Y}_{n+1} = 0$. Αν $\rho_k \neq 0$ για κάποιο k , δοκιμάζουμε μοντέλα MA, AR κ.ο.κ..

Μοντέλο MA(q): $Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$ ή $Y_t = \Theta(B)a_t$ ($\Theta = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$). Από τα γ_k προκύπτουν εξισώσεις για τα θ_k ως εξής: Πολλίζουμε κατά μέλη τα μοντέλα $Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots$ και $Y_{t-k} = a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots$, κατόπιν παίρνουμε μέσους τιμές $E(\cdot)$. Προκύπτει $\gamma_k = E(Y_t Y_{t-k}) = (\dots \text{δεξί μέλος})$. Απλοποιούμε τις εκφράσεις στο δεξί μέλος εφαρμόζοντας τις υποθέσεις (ii) και (iii) και προκύπτουν εξισώσεις με αγνώστους τα θ_i και σ_a^2 (**πώς γίνονται όλα αυτά;**). Αποδεικνύεται ότι $\gamma_k = 0$ και άρα $\rho_k = 0$ για κάθε $k > q$ (**γιατί;**).

Μοντέλο AR(p): $Y_t = a_t + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p}$ ή $\Phi(B)Y_t = a_t$ ($\Phi = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$). Από τα γ_k προκύπτουν οι εξισώσεις Yule-Walker ως εξής: Ξεκινάμε με το μοντέλο $Y_t = a_t + \phi_1 Y_{t-1}$, πολλίζουμε με Y_{t-k} , για $k > 0$ τα δύο μέλη του και παίρνοντας $E(\cdot)$ προκύπτει $\gamma_k = 0 + \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}$, για $k=1, \dots, p$. Για να εύρουμε τα ϕ_i χρειαζόμαστε την τάξη p του AR(p). Αν αυτή δεν είναι γνωστή, τότε: (α) Στην αρχή $p=1$. (β) Λύνουμε εξισώσεις Yule-Walker υποθέτοντας τάξη p . Βρίσκουμε τον τελευταίο όρο ϕ_p (λέγεται μερική αυτοσυσχέτιση) (γ). Αν $|\phi_p| > 2/n^{0.5}$ τότε η τάξη του AR είναι $\geq p$, αυξάνουμε $p: p=p+1$ και επαναλαμβάνουμε το (β), αλλιώς σταματάμε και θεωρούμε ως τάξη του μοντέλου το $p-1$.

Μοντέλο ARMA(p,q): $\Phi(B)Y_t = \Theta(B)a_t \Rightarrow AR(\infty)$: $\Theta^{-1}(B)\Phi(B)Y_t = a_t$ όπου $\Theta^{-1} \Phi$ είναι ηγλικό πολυωνύμων.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
Na ξέρετε τι σημαίνουν: Κατάστημα ροής, κατάσταση εργασιών. Χρόνος ροής, χρόνος άφιξης r_i , χρόνος περάτωσης, προθεσμία, βραδύτητα, καθυστέρηση. Μέσες, μέγιστες, ελάχιστες τιμές αυτών.

Παράδειγμα διαγράμματος Gantt: Κατάστημα ροής M_1-M_2 και εργασίες **1,2,3**. Διάρκειες $p_{1,M_1}=1$, $p_{1,M_2}=4$, $p_{2,M_1}=3$, $p_{2,M_2}=3$, $p_{3,M_1}=6$, $p_{3,M_2}=3$. Έχουμε $C_{\max} = F_{\max} = 13$. Μπορούμε να εύρουμε χρόνους ροής εργασιών στις M_1, M_2 και στο σύστημα και μέσους χρόνους ροής (**πώς;**)

M_1	1	2	3	χρόνος
M_2	1	4	10	
	1	2	3	
	1	5	8	10
				13

Θεώρημα: Για δύο σύνολα αριθμών a_i και b_i , $i=1, \dots, n$ το άθροισμα $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ γίνεται ελάχιστο αν ένα σύνολο διαταχθεί κατά φθίνουσα τάξη και το άλλο κατ' αύξουσα, πχ. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ και $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Τα επόμενα **"γιατί;"** αποδεικνύονται με το θεώρημα αυτό ή με τη μέθοδο εναλλαγής διαδοχικών εργασιών.

Πρόβλημα 1||Σw_iF_i: Μία μηχανή, η εργασίες με $r_i=0$ ($C_i=F_i$). Αν το πρόγραμμα εκτέλεσης είναι $(1,2,\dots,n)$ και οι διάρκειες p_i , τότε ο χρόνος ροής της i είναι $F_i = p_1 + p_2 + \dots + p_i$. Το $w_1 F_1 + \dots + w_n F_n$ ($w_i > 0$) ελαχιστοποιείται από το $(1,2,\dots,n)$ αν $p_1/w_1 \leq \dots \leq p_n/w_n$ (**γιατί;**). **Για το 1||ΣF_i** βέλτιστο πρόγραμμα είναι το SPT: $p_1 \leq \dots \leq p_n$. **Για το 1|ri,prmp||ΣF_i** ($r_i \geq 0$ και επιτρέπονται διακοπές) η βέλτιστη πολιτική προκύπτει με τον κανόνα SRPT.

Προβλήματα με προθεσμίες: p_i =διάρκεια της i , F_i =χρόνος περάτωσης, d_i =προθεσμία παράδοσης, $L_i = F_i - d_i$ =βραδύτητα, $T_i = \max(0, L_i)$ =καθυστερήση της i , περιθώριο της i είναι η ποσότητα $S_i = d_i - p_i$.

(i) Το πρόγραμμα SPT ελαχιστοποιεί τη μέση βραδύτητα (πρόβλημα 1||ΣL_i) (**γιατί;**).
(ii) Το πρόγραμμα αυξανόμενων προθεσμιών (EDD) ελαχιστοποιεί τα $\max L_i$ και $\max T_i$ ($1||L_{\max}/T_{\max}$) (**γιατί;**).
(iii) Το πρόγραμμα αυξανόμενων περιθωρίων μεγιστοποιεί τα $\min L_i$ και $\min T_i$ ($1||L_{\min}/T_{\min}$).

Απαιτούμενη διαδοχή εργασιών: η εργασίες έχουν ομαδοποιηθεί σε K ομάδες και μέσα σε κάθε ομάδα υπάρχει συγκεκριμένη διαδοχή. Έστω $i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_{n_i}$ οι εργασίες της ομάδας i , p_{ij} η διάρκεια της j -οστής εργασίας της ομάδας i , $F_{ij} = 0$ αντιστοιχος χρόνος ροής, F_{ini} ο χρόνος ροής της ομάδας i που ισούται με το χρόνο ροής της τελευταίας εργασίας της ομάδας και $P_i = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{i n_i}$. Τότε το πρόγραμμα $(1, 2, \dots, n)$

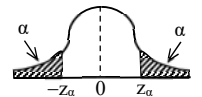
(i) ελαχιστοποιεί το μέσο χρόνο ροής των ομάδων, $(\sum F_{ini})/K$, **αν** $P_i' \leq P_2' \leq \dots \leq P_k'$ (**γιατί;**) και
(ii) ελαχιστοποιεί το μέσο χρόνο ροής των εργασιών, $(\sum (F_{ij})) / n$, **αν** $P_i' / n_1 \leq P_2' / n_2 \leq \dots \leq P_k' / n_k$ (**γιατί;**).

Πρόβλημα F₂||F_{max}: η εργασίες, όλες διαθέσιμες στην αρχή, περνούν από μηχανές M_1 και M_2 διαδοχικά. Έστω p_{ij} ο χρόνος κατεργασίας της εργασίας i στη M_j . Το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί το $F_{\max}$ ευρίσκεται με τον αλγόριθμο Johnson: (α) Ευρίσκουμε το $\min p_{ij}$. Αν αυτό συμβαίνει για $j=1$, τότε θέτουμε την εργασία i πρώτη στο πρόγραμμα, αλλιώς τελευταία. Σε περίπτωση ισότητας δύο ή περισσότερων p_{ij} επιλέγουμε αυθαίρετα. (β) Διαγράφουμε την εργασία αυτή από τον κατάλογο και επαναλαμβάνουμε το (α) τοποθετώντας τις υπόλοιπες εργασίες **ενδιάμεσα** στο πρόγραμμα. Για να εύρουμε το $F_{\max}$ σχεδιάζουμε το διάγραμμα Gantt.

Πρόβλημα F₃||F_{max} ($M_1-M_2-M_3$): Αν $\max_i p_{i2}$ είναι $\leq$ της **μίν** διάρκειας στη M_1 ή στη M_3 , τότε θεωρούμε δύο ψευδομηχανές M_1', M_2' με $p_{i1}' = p_{i1} + p_{i2}$ και $p_{i2}' = p_{i2} + p_{i3}$. Η βέλτιστη σειρά προκύπτει με αλγόριθμο Johnson στις δύο ψευδομηχανές. Το $F_{\max}$ ευρίσκεται από το διάγραμμα Gantt με τις 3 αρχικές μηχανές και τα p_{ij} .

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ, N(0,1)
Τιμές $z_\alpha \in (0, 3)$ που αντιστοιχούν σε πιθανότητα $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$. Λόγω συμμετρίας, ισχύει επίσης ότι $P(Z \leq -z_\alpha) = \alpha$.

z_α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	0.0
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	0.1
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	0.2
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	0.3
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	0.4
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	0.5
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	0.9
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	1.0
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	1.1
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985	1.2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455	1.6
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367	1.7
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294	1.8
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233	1.9
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183	2.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	3.0



Παράδειγμα: Έστω ότι ζητούμε το ξ : $F(\xi) = P(Z \leq \xi) = 0.14$. Επειδή $F(\xi) < 0.5$, το ξ είναι αρνητικό και συμμετρικό του σημείου z_α για το οποίο $P(Z \geq z_\alpha) = 0.14$. Η πλησιέστερη πιθανότητα στον πίνακα είναι **0.1401** και αντιστοιχεί στο $z_\alpha = 1.08$. Συνεπώς $\xi \approx -1.08$.