

Όνομα:

A.M.:

- Επιτρέπεται μόνο η χρήση αριθμομηχανής και ενός τυπολογίου που θα διανείμω μαζί με την εκφώνηση των προβλημάτων. Στο τέλος, επιστρέψετε την εκφώνηση και το τυπολόγιο μαζί με την κόλλα του γραπτού σας.
- Αφήστε σημειώσεις, βιβλία και κινητά τηλέφωνα κάτω στα πόδια σας, όχι σε διπλανά καθίσματα, με τα κινητά απενεργοποιημένα. Απαγορεύεται ο δανεισμός ή ανταλλαγή συσκευών, σημειώσεων και σημειωμάτων και η συζήτηση κατά τη διάρκεια του διαγωνίσματος.
- Έχετε μαζί σας ταυτότητες. — **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ! B.K.**

Θέμα 1 (1.5 μον.) Να περιγράψετε εν συντομία δύο από τους παράγοντες οι οποίοι διαμορφώνουν το κόστος αποθήκευσης μίας μονάδας προϊόντος ανά μονάδα χρόνου και έναν παράγοντα που διαμορφώνει το κόστος έλλειψης μίας μονάδας προϊόντος ανά μονάδα χρόνου σε μία αποθήκη.

Θέμα 2 Η ζήτηση βενζίνης σε ένα βενζινάδικο έχει σταθερό ρυθμό 3200 λίτρων ημερησίως και δεν επιτρέπεται έλλειψη. Το βενζινάδικο τροφοδοτείται με βενζίνη περιοδικά και κάθε φορά παραλαμβάνει την ίδια ποσότητα Q λίτρων. Για απλούστευση υποθέστε ότι, όταν γίνεται παραλαβή βενζίνης, ο χρόνος που χρειάζεται για να αντληθούν τα Q λίτρα από το βυτίο στη δεξαμενή του βενζινάδικου είναι αμελητέος. Το κόστος προμήθειας ανά λίτρο βενζίνης εξαρτάται από την ποσότητα παραγγελίας-παραδόσης Q :

$$C = C(Q) = 1.05 + \frac{400}{Q} \quad \text{€/λίτρο}$$

Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι 200 € και το κόστος διατήρησης της βενζίνης στη δεξαμενή (κόστος αποθέματος) είναι 0.001 € ανά λίτρο και ανά ημέρα.

α. (3 μον.) Εύρετε την βέλτιστη ποσότητα παραλαβής Q και το αντίστοιχο μέσο ημερήσιο κόστος λειτουργίας του βενζινάδικου.

β. (1 μον.) Αν το βενζινάδικο διέθετε δεξαμενή χωρητικότητας το πολύ 40000 λίτρων, πόση θα ήταν τότε η βέλτιστη ποσότητα Q ; Αιτιολογήστε την απάντηση είτε με ένα σχήμα είτε δίνοντας μία πλήρη μαθηματική απόδειξη. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε το ημερήσιο κόστος σε αυτή την περίπτωση.

Θέμα 3 (2.5 μον.) Η ημερήσια ζήτηση βενζίνης σε ένα βενζινάδικο (διαφορετικό από του Θέματος 2) έχει σταθερή μέση τιμή μ . Η ζήτηση z_t σε λίτρα κατά την ημέρα t περιγράφεται από το μοντέλο MA(1)

$$z_t - \mu = a_t + b a_{t-1}$$

Η b είναι άγνωστη παράμετρος του μοντέλου και η a_t είναι μία αμετάβλητη λευκή ακολουθία με $E(a_t) = 0$ και $E(a_t a_{t-k}) = 0$ για κάθε $k \neq 0$ και κάθε t . Από παλαιότερα δεδομένα έχετε μία εκτίμηση του συντελεστή αυτοσυσχέτισης τάξης 1 της z_t :

$$\frac{E[(z_t - \mu)(z_{t-1} - \mu)]}{E[(z_t - \mu)^2]} = 0.4$$

Εύρετε για ποιες τιμές της παραμέτρου b ικανοποιείται η ανωτέρω συνθήκη. Δεν απαιτείται γνώση της μ .

Θέμα 4 (2.5 μον.) Μία μηχανή εκτελεί 4 εργασίες κυκλικά. Δίνονται οι χρόνοι προετοιμασίας d_{ij} :

$i \rightarrow j$	1	2	3	4
1	-	0	0	4
2	4	-	6	6
3	0	8	-	7
4	4	3	1	-

Εφαρμόστε δυναμικό προγραμματισμό για να εύρετε τη σειρά εκτέλεσης εργασιών που ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο προετοιμασιών. (Λύσεις που δεν θα εφαρμόζουν δυναμικό προγραμματισμό θα βαθμολογηθούν 0.)

ΛΥΣΕΙΣ

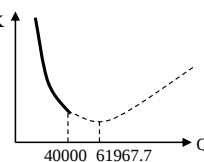
Θέμα 2α (3 μον.) Μοντέλο IV. $K = \frac{AD}{Q} + CD + h \frac{Q}{2} = \frac{200 \cdot 3200}{Q} + \left(1.05 + \frac{400}{Q}\right) 3200 + 0.001 \frac{Q}{2}$.

Ακρότατο έχουμε όταν $\frac{dK}{dQ} = 0 = -\frac{200 + 400}{Q^2} 3200 + \frac{0.001}{2} \Rightarrow$ (θετική ρίζα) $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 600 \cdot 3200}{0.001}} =$

61967.7 λίτρα. Η δεύτερη παράγωγος του κόστους είναι $2 \cdot 600 \cdot 3200 / Q^3 \geq 0$, άρα η K είναι κυρτή και το ακρότατο είναι ολικό ελάχιστο. Το μέσο ημερήσιο κόστος λειτουργίας είναι

$$K = \frac{200 \cdot 3200}{61967.7} + \left(1.05 + \frac{400}{61967.7}\right) 3200 + 0.001 \frac{61967.7}{2} = 3422 \text{ €}$$

2β (1 μον.) Η συμφερότερη πολιτική είναι να τροφοδοτείται η δεξαμενή ακριβώς όταν αδειάζει. Αν τότε αντλούνταν εκεί 61967.7 λίτρα ακαριαία, το απόθεμά της θα ξεπερνούσε τη χωρητικότητα 40000. Θα πρέπει επομένως κάθε φόρτωση να αντιστοιχεί σε 40000 λίτρα το πολύ. Επειδή η K είναι κυρτή (βλ. σχήμα), η πλέον συμφέρουσα ποσότητα τροφοδοσίας είναι η πλησιέστερη επιτρεπτή στο Q ήτοι 40000.



Θέμα 3 (2.5 μον.) Ξεκινάμε από το δεδομένο $\rho_1 = 0.4$. Αναπτύσσουμε αριθμητή και παρονομαστή:

$$E[(z_t - \mu)^2] = E(\alpha_t^2) + b^2 E(\alpha_{t-1}^2) + 2b E(\alpha_t \alpha_{t-1}) = \dots = E(\alpha_t^2) (1+b^2)$$

$$E[(z_t - \mu)(z_{t-1} - \mu)] = E[(\alpha_t + b \alpha_{t-1})(\alpha_{t-1} + b \alpha_{t-2})] = \dots = b E(\alpha_{t-1}^2) = b E(\alpha_t^2),$$

όπου επειδή η α_t είναι αμετάβλητη, έχουμε θέσει $E(\alpha_t^2) = E(\alpha_{t-1}^2)$, και επειδή είναι λευκή, $E(\alpha_t \alpha_{t-1}) = 0$. Τότε διαιρώντας κατά μέλη αριθμητή και παρονομαστή και απλοποιώντας το $E(\alpha_t^2)$ ευρίσκουμε

$$0.4 = \frac{b}{1+b^2} \Rightarrow 0.4b^2 - b + 0.4 = 0 \Rightarrow \text{δύο ρίζες: } b = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0.4 \cdot 0.4}}{2 \cdot 0.4} = \frac{1 \pm \sqrt{0.36}}{0.8} = \begin{cases} \frac{1+0.6}{0.8} = 2 \\ \frac{1-0.6}{0.8} = 0.5 \end{cases}$$

Θέμα 4 (2.5 μον.) Ευρίσκουμε τους συντομότερους χρόνους προετοιμασιών $K(j, S)$ σε προβλήματα όπου πρώτη εργασία είναι πάντα την 1, τελευταία είναι μία εργασία j από τις άλλες και ενδιάμεσες είναι οι εργασίες ενός συνόλου S . Λύνουμε προβλήματα για κάθε $j > 1$ και κάθε σύνολο S με 0, 1, 2, ή 3 στοιχεία.

$$\text{εξίσωση ΔΠ: } K(j, S) = \min_{k \in S} [K(k, S - \{k\}) + d_{kj}] \quad \forall j \text{ και } \forall S$$

Σύνολα S κενά και $j = 2, 3, 4$:

$$K(2, \emptyset) = d_{12} = 0. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 1-2$$

$$K(3, \emptyset) = d_{13} = 0. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 1-3$$

$$K(4, \emptyset) = d_{14} = 4. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 1-4$$

Σύνολα S με ένα στοιχείο και $j = 2, 3, 4$:

$$K(2, \{3\}) = K(3, \emptyset) + d_{32} = 0 + 8 = 8. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 3-2$$

$$K(2, \{4\}) = K(4, \emptyset) + d_{42} = 4 + 3 = 7. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-2$$

$$K(3, \{2\}) = K(2, \emptyset) + d_{23} = 0 + 6 = 6. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 2-3$$

$$K(3, \{4\}) = K(4, \emptyset) + d_{43} = 4 + 1 = 5. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-3$$

$$K(4, \{2\}) = K(2, \emptyset) + d_{24} = 0 + 6 = 6. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 2-4$$

$$K(4, \{3\}) = K(3, \emptyset) + d_{34} = 0 + 7 = 7. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 3-4$$

Σύνολα S με δύο στοιχεία και $j = 2, 3, 4$:

$$K(2, \{3, 4\}) = \min [K(3, \{4\}) + d_{32}, K(4, \{3\}) + d_{42}] = \min [5 + 8, 7 + 3] = 10. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-2$$

$$K(3, \{2, 4\}) = \min [K(2, \{4\}) + d_{23}, K(4, \{2\}) + d_{43}] = \min [7 + 6, 6 + 1] = 7. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-3$$

$$K(4, \{2, 3\}) = \min [K(2, \{3\}) + d_{24}, K(3, \{2\}) + d_{34}] = \min [8 + 6, 6 + 7] = 13. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 3-4$$

Τελικό πρόβλημα – σύνολο $S = \{2, 3, 4\}$ και $j = 1$:

$$K(1, \{2, 3, 4\}) = \min [K(2, \{3, 4\}) + d_{21}, K(3, \{2, 4\}) + d_{31}, K(4, \{2, 3\}) + d_{41}] = \min [10 + 4, 7 + 0, 13 + 4] = 7.$$

Τελευταία αλλαγή = 3-1.

Ο συντομότερος χρόνος προετοιμασιών είναι 7. Τελευταία εργασία πριν την 1 είναι η 3. Διαβάζουμε από τη λύση του $K(3, \{2, 4\})$ ότι πριν την 3 πρέπει να εκτελεσθεί η 4. Διαβάζουμε από τη λύση του $K(4, \{2\})$ ότι πριν την 4 εκτελείται η 2 (δεν υπάρχει άλλη εναλλακτική άλλωστε) και τέλος πριν την 2 μένει να ξεκινήσουμε από την 1. Άρα βέλτιστη σειρά είναι 1-2-4-3-1 με χρόνο 7.