

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εξέταση Ιουνίου 2015 στο μάθημα Συστήματα Παραγωγής - Διάρκεια 2 ώρες και 30 λεπτά

Όνομα:

Α.Μ.:

- Έχετε μαζί σας ταυτότητες. Επιτρέπεται η μόνο η χρήση αριθμομηχανής και ενός τυπολογίου που διανέμεται. Επιστρέφεται την εκφώνηση και το τυπολόγιο μαζί με την κόλλα του γραπτού σας.
- Αφήστε τυχόν σημειώσεις, βιβλία και κινητά τηλέφωνα κάτω στα πόδια σας, όχι σε διπλανά καθίσματα, με τα κινητά απενεργοποιημένα. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Θέμα 1 (2 μον.) Η ζήτηση d_t κάποιου προϊόντος κατά τον μήνα t προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την συνάρτηση $\hat{d}_t = at^2 + bt$. Η ζήτηση κατά τους 4 προηγούμενους μήνες ήταν

t	1	2	3	4
$d(t)$	5	20	43	71

Εύρετε τα a και b που ελαχιστοποιούν το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων $\varepsilon_t = d_t - \hat{d}_t$ και υπολογίστε την εκτίμηση $\hat{d}_5$.

Θέμα 2 (2 μον.) Μία στοχαστική διαδικασία z_t , $t = 1, 2, \dots$, έχει σταθερή μέση τιμή 0 και εξελίσσεται σύμφωνα με ένα μοντέλο AR(2) της μορφής $(1 - 0.6B + 0.2B^2)z_t = a_t$, όπου η a_t είναι λευκή ακολουθία με μέση τιμή επίσης 0. Υπολογίστε τους συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_1 και ρ_2 της z_t .

Θέμα 3 (2 μον.) Μία γαλακτοκομική εταιρεία διανέμει συνολικά 2.5 τόνους φρέσκο γάλα σε διάφορα σημεία πώλησης κάθε ημέρα. Η ημερήσια ζήτηση για το συγκεκριμένο γάλα ακολουθεί **ομοιόμορφη κατανομή** και κυμαίνεται από 1 έως 4 τόνους. Ποσότητα που δεν πωλείται σε μία ημέρα επιστρέφεται. Υπολογίστε τη μέση ποσότητα γάλακτος που επιστρέφεται ημερησίως.

Τυπολόγιο: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής στο διάστημα (α, β) ισούται με $1/(\beta - \alpha)$.

Θέμα 4 (2 μον.) Ένα κατάστημα προμηθεύεται ένα προϊόν με μοναδιαίο κόστος που είναι συνάρτηση της ποσότητας Q που παραγγέλλει κάθε φορά και έχει μορφή $C(Q) = (50 + 100e^{-Q/10})$ ευρώ ανά κομμάτι. Το σταθερό κόστος κάθε παραγγελίας στον προμηθευτή είναι 0 ευρώ. Όταν φθάνει η παραγγελία από τον προμηθευτή στο κατάστημα, τότε ξεφορτώνεται αμέσως ($P = \infty$). Δεν επιτρέπονται ελλείψεις στο απόθεμα. Η ζήτηση είναι 1000 κομμάτια το έτος, το κόστος αποθέματος είναι 1 ευρώ ανά μονάδα προϊόντος ανά έτος. Να αποδείξετε ότι το μέσο ετήσιο κόστος του καταστήματος είναι κυρτή συνάρτηση της ποσότητας παραγγελίας Q και να εύρετε το Q που ελαχιστοποιεί το μέσο ετήσιο κόστος. Επιτρέπονται κλασματικές παραγγελίες.

Θέμα 5 (2.5 μον.) Μία μηχανή εκτελεί 4 εργασίες κυκλικά. Δίνονται οι χρόνοι προετοιμασίας d_{ij} :

$i \rightarrow j$	1	2	3	4
1	-	4	1	6
2	5	-	7	8
3	1	12	-	9
4	5	7	2	-

Εφαρμόστε δυναμικό προγραμματισμό για να εύρετε τη σειρά εκτέλεσης εργασιών που ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο προετοιμασιών.

Προσοχή: Στο Θέμα 5 ζητείται η επίλυση με δυναμικό προγραμματισμό. Τυχόν σωστές λύσεις που δεν θα εφαρμόζουν δυναμικό προγραμματισμό, όπως για παράδειγμα κάποιες που μπορεί να προκύψουν -είτε με τυχαίες ή διαισθητικές επιλογές -είτε με την πλήρη ανάπτυξη και σύγκριση όλων των εναλλακτικών προγραμμάτων εκτέλεσης θα βαθμολογηθούν 0.

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1. $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ όπου $\alpha = (AQA^T)^{-1}AQX$, με $A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 43 \\ 71 \end{bmatrix}$, $Q = I_{4 \times 4}$ (ίσα βάρη).

$$\text{Έχουμε } AQA^T = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ 16 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 354 & 100 \\ 100 & 30 \end{bmatrix}, (AQA^T)^{-1} = \frac{1}{\underbrace{354 \cdot 30 - 100 \cdot 100}_{620}} \begin{bmatrix} 30 & -100 \\ -100 & 354 \end{bmatrix}, (AQA^T)^{-1}A = \frac{1}{620} \begin{bmatrix} -70 & -80 & -30 & 80 \\ 254 & 308 & 162 & -184 \end{bmatrix}. \text{ Τελικά } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (AQA^T)^{-1}AX = \frac{1}{620} \begin{bmatrix} 2440 \\ 1332 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.935 \\ 2.148 \end{bmatrix} \text{ και } \hat{d}(5) = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 109.1$$

Θέμα 2. Αφού $B^p Z_t = z_{t-p}$, η εξίσωση του μοντέλου $AR(2)$ γράφεται $z_t - 0.6z_{t-1} + 0.2z_{t-2} = a_t$. Πολλαπλασιάζουμε με z_{t-1} και τα δύο μέλη και παίρνουμε μέσες τιμές:

$$E(z_t z_{t-1}) - 0.6E(z_{t-1} z_{t-1}) + 0.2E(z_{t-2} z_{t-1}) = E(a_t z_{t-1}) \Rightarrow \gamma_1 - 0.6\gamma_0 + 0.2\gamma_1 = 0 \Rightarrow 1.2\gamma_1 = 0.6\gamma_0,$$

και από τον ορισμό, $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$, έχουμε $\rho_1 = 0.6 / 1.2 = 0.5$. Τώρα πολλαπλασιάζουμε με z_{t-2} την εξίσωση του $AR(2)$ και με τον ίδιο τρόπο ευρίσκουμε $\gamma_2 - 0.6\gamma_1 + 0.2\gamma_0 = 0 \Rightarrow \rho_2 = 0.6 \cdot 0.5 - 0.2 = 0.1$.

Θέμα 3. Οι επιστροφές $\varepsilon(\delta)$ εξαρτώνται από τη ζήτηση δ . Επιστρέφεται $\varepsilon(\delta) = 0$ αν η ζήτηση είναι $\delta \geq 2.5$ ή $\varepsilon(\delta) = 2.5 - \delta$ αν η ζήτηση είναι $\delta < 2.5$.

$$\text{Παίρνουμε μέση τιμή: } E(\varepsilon) = \int_1^4 \varepsilon(\delta) f(\delta) d\delta = \int_{2.5}^4 0 f(\delta) d\delta + \int_1^{2.5} (2.5 - \delta) f(\delta) d\delta = \int_1^{2.5} (2.5 - \delta) \frac{1}{4-1} d\delta = \frac{2.5\delta}{3} \Big|_1^{2.5} - \frac{1}{3} \frac{\delta^2}{2} \Big|_1^{2.5} = 1.25 - 5.25/6 = 0.375 \text{ του τόνου επιστρέφεται κατά μέσον όρο ημερησίως.}$$

Θέμα 4. Μοντέλο IV με $A = 0$ και κόστος $K(Q) = \frac{AD}{Q} + C(Q)D + h \frac{Q}{2} = (50 + 100e^{-Q/10}) \cdot 1000 + 0.5Q$. Ακρότατο:

$$K'(Q) = 0 \Rightarrow 10^5 \cdot (-1/10)e^{-Q/10} + 0.5 = 0 \Rightarrow e^{-Q/10} = 0.5 \cdot 10^{-4} \Rightarrow -Q/10 = \ln(0.5 \cdot 10^{-4}) = -9.9035 \Rightarrow Q \approx 99 \text{ μονάδες.}$$

Η $K(Q)$ είναι κυρτή, $K''(Q) = 10^5 \cdot (-1/10) \cdot (-1/10)e^{-Q/10} > 0$, άρα το $Q = 99$ είναι ολικό ελάχιστο.

Θέμα 5. Ζητούμε το πρόγραμμα ελάχιστου χρόνου προετοιμασίας για την εκτέλεση των εργασιών $1-\{2,3,4\}-1$. Θεωρούμε προβλήματα υπολογισμού του ελάχιστου χρόνου προετοιμασίας για προγράμματα $1-S-j$, για κάθε εργασία j και κάθε σύνολο ενδιάμεσων εργασιών S . Τα προβλήματα αυτά επιλύονται επαναληπτικά με την εξίσωση ΔΠ: $K_i(j, S) = \min_{k \in S} [K_{i-1}(k, S - \{k\}) + d_{kj}]$, για $i = 0, 1, 2, 3$ για κάθε εργασία j και κάθε σύνολο ενδιάμεσων εργασιών S . Για συντομία παραλείπουμε τους δείκτες $i, i-1$ από τα K_i .

$i = 0$:

$$K(2, \emptyset) = d_{12} = 4. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 1-2$$

$$K(3, \emptyset) = d_{13} = 1. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 1-3$$

$$K(4, \emptyset) = d_{14} = 6. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 1-4$$

$i = 1$:

$$K(2, \{3\}) = K(3, \emptyset) + d_{32} = 1 + 12 = 13. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 3-2$$

$$K(2, \{4\}) = K(4, \emptyset) + d_{42} = 6 + 7 = 13. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-2$$

$$K(3, \{2\}) = K(2, \emptyset) + d_{23} = 4 + 7 = 11. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 2-3$$

$$K(3, \{4\}) = K(4, \emptyset) + d_{43} = 6 + 2 = 8. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-3$$

$$K(4, \{2\}) = K(2, \emptyset) + d_{24} = 4 + 8 = 12. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 2-4$$

$$K(4, \{3\}) = K(3, \emptyset) + d_{34} = 1 + 9 = 10. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 3-4$$

$i = 2$:

$$K(2, \{3,4\}) = \min[K(3, \{4\}) + d_{32}, K(4, \{3\}) + d_{42}] = \min[8 + 12, 10 + 7] = 17. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-2$$

$$K(3, \{2,4\}) = \min[K(2, \{4\}) + d_{23}, K(4, \{2\}) + d_{43}] = \min[13 + 7, 12 + 2] = 14. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 4-3$$

$$K(4, \{2,3\}) = \min[K(2, \{3\}) + d_{24}, K(3, \{2\}) + d_{34}] = \min[13 + 8, 11 + 9] = 20. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 3-4$$

$$\underline{i = 3:} \quad K(1, \{2,3,4\}) = \min[K(2, \{3,4\}) + d_{21}, K(3, \{2,4\}) + d_{31}, K(4, \{2,3\}) + d_{41}] = \min[17 + 5, 14 + 1, 20 + 5] = 15. \text{ Τελευταία αλλαγή} = 3-1.$$

Διαβάζουμε στην $i = 3$ ότι ο συντομότερος δρόμος προς την 1 έχει τελευταία στάση την 3. Διαβάζουμε στην $i = 2$ ότι ο συντομότερος δρόμος προς την 3 έχει τελευταία στάση την 4. Διαβάζουμε στην $i = 1$ ότι ο μόνος δρόμος προς την 4 (χωρίς την 3) έχει τελευταία στάση την 2. Άρα η σειρά είναι 1-2-4-3-1 με χρόνο προετοιμασίας 15.