

Γενικεύσεις Επιλεγμένων Προβλημάτων 3.7

Γενίκευση Προβλήματος 1

Έστω η διαδικασία $Z_t = Bte^{Ct}$ (σφάλμα) όπου B και C άγνωστες παράμετροι, το σφάλμα > 0 και οι μετρήσεις: Το μοντέλο της Z_t **δεν έχει συνήθη μορφή**. Όμως λογαριθμίζοντας, $\ln Z_t = \ln(\dots)$, προκύπτει γνωστή μορφή.

t	1	4	7	9
z_t	12	17	6	7
x_t	2.485	2.833	1.792	1.946

- α.** Κάνετε πράξεις για να μετασχηματίσετε την Z_t στην $X_t = \ln Z_t - \ln(t)$ και γράψτε το μοντέλο της. Επίσης υπολογίστε τις τιμές x_1, x_4, x_7, x_9 .
- β.** Εύρετε τα B και C που ελαχιστοποιούν το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων του μοντέλου της X_t (όχι της Z_t).
- γ.** Υπολογίστε την εκτίμηση $\hat{z}_{12}$.

Λύση

α.
$$\ln(Z_t) = \ln[Bte^{Ct}(\text{σφάλμα})]$$
$$= \ln B + \ln(t) + Ct + \ln(\text{σφάλμα}).$$

Αφαιρώντας $\ln(t)$ από κάθε μέλος προκύπτει

$$\ln(Z_t) - \ln(t) = \ln B + Ct + \varepsilon(t)$$

$$\text{ή } X_t = \alpha_1 + \alpha_2 t + \varepsilon(t)$$

όπου $\alpha_1 = \ln B$, $\alpha_2 = C$, $\varepsilon(t) = \ln(\text{σφάλμα}) = \text{νέο σφάλμα}$.

Για το μοντέλο αυτό, τα δεδομένα είναι $x_t = \ln z_t - \ln(t)$ όπου z_t οι μετρήσεις της Z_t από τον πίνακα και οι λογάριθμοι $\ln(t)$ υπολογίζονται για $t=1,4,7,9$. Η νέα χρονοσειρά δεδομένων προσαρτάται κάτω από τον αρχικό πίνακα.

Γενίκευση Προβλήματος 1 (συνέχεια)

β. Εκτίμηση συντελεστών του $X_t = \alpha_1 + \alpha_2 t + \varepsilon(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \varepsilon(t)$ και των B και C .

Πίνακας A	1	2	3	4	Πίνακας A ^T		
$f_1(t)$	1	1	1	1	1	1	1
$f_2(t)$	1	4	7	9	2	1	4
					3	1	7
					4	1	9
Διάνυσμα X ^T	2.485	2.833	1.792	1.946			
AA ^T =				4	21	det= 147	
				21	147		
adjoint AA ^T =				147	-21	(AA ^T) ⁻¹ =	
				-21	4	1	-0.143
						-0.143	0.027
X=		AX=		(AA ^T) ⁻¹ (AX)=		exp(α_1)=B=	
2.485		9.056		2.788		16.251	
2.833		43.875		-0.100		α_2 =C=	
1.792						-0.100	
1.946							

γ. $\hat{z}_{12} = B(12)e^{C(12)} = 16.251(12)e^{-0.1(12)} = 58.74$.

Γενίκευση Προβλήματος 4

Θεωρήστε το μοντέλο ARMA(1,1), $X_t = \phi X_{t-1} + \theta a_{t-1} + a_t$ με $E(X_t)=0$. Εύρετε όσες εξισώσεις είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό των ϕ , θ και της $\sigma_a^2 = \text{Var}(a_t) = E(a_t^2)$, συναρτήσει των αυτοσυσμμεταβλητοτήτων $\gamma_k = E(X_t X_{t-k})$.

Λύση

Στα ARMA, οι X_t , a_t είναι αμετάβλητες κ.ε.ε, άρα ό,τι γράφεται στην εκφώνηση ισχύει για όλα τα t . Για παράδειγμα $E(a_{t-k}^2) = \sigma_a^2$.

Χρειαζόμαστε 3 εξισώσεις. Στις διαλέξεις είδαμε **δύο τρόπους** εκτίμησης των συντελεστών, για μοντέλα AR και για MA. Δοκιμάζουμε και τους δύο:

1) Ξεκινάμε με την εξίσωση του X_t , πολ/ζουμε με X_{t-k} και παίρνουμε $E()$:

$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = \phi E(X_{t-1} X_{t-k}) + \theta E(a_{t-1} X_{t-k}) + E(a_t X_{t-k})$$

Συμβολίζουμε για συντομία $g_k = E(a_t X_{t+k})$.

Είδαμε στο μάθημα ότι $g_k = 0$ όταν $k < 0$, αφού τα τωρινά **σφάλματα** a_t **δεν επηρεάζουν παλαιές τιμές** X_{t+k} . Όμως για $k \geq 0$ τα g_k είναι άγνωστα.

$$k=0, (1): \gamma_0 = \phi \gamma_1 + \theta g_1 + g_0$$

$$k=1, (2): \gamma_1 = \phi \gamma_0 + \theta g_0 + g_{-1} = \phi \gamma_0 + \theta g_0 + 0$$

$$k=2, (3): \gamma_2 = \phi \gamma_1 + \theta g_{-1} + g_{-2} = \phi \gamma_1 + 0 + 0 \Rightarrow \phi = \gamma_2 / \gamma_1$$

Έχουμε 2 εξισώσεις με αγνώστους θ , g_0 , g_1 . Χρειαζόμαστε άλλη μία και ακόμη μία για το σ_a^2 . Εφαρμόζουμε την άλλη μέθοδο.

4

Γενίκευση Προβλήματος 4 (συνέχεια)

2) Γράφουμε και τις δύο εξισώσεις των X_t και X_{t-k}

$$X_t = \phi X_{t-1} + \theta a_{t-1} + a_t \quad X_{t-k} = \phi X_{t-k-1} + \theta a_{t-k-1} + a_{t-k}$$

πολ/ζουμε κατά μέλη και μετά $E()$:

$$\begin{aligned} \gamma_k = E(X_t X_{t-k}) &= \phi^2 E(X_{t-1} X_{t-k-1}) + \phi \theta E(X_{t-1} a_{t-k-1}) + \phi E(X_{t-1} a_{t-k}) \\ &\quad + \theta \phi E(a_{t-1} X_{t-k-1}) + \theta^2 E(a_{t-1} a_{t-k-1}) + \theta E(a_{t-1} a_{t-k}) \\ &\quad + \phi E(a_t X_{t-k-1}) + \theta E(a_t a_{t-k-1}) + E(a_t a_{t-k}) \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε $k=0,1$ και απλοποιούμε $E(X_{t-1} a_t) = E(a_{t-1} a_t) = 0$, $E(a_t a_t) = \sigma_a^2$ για κάθε t αφού οι X_t και a_t είναι αμετάβλητες κ.ε.ε. Προκύπτουν

$$k=0, (4): \gamma_0 = \phi^2 \gamma_0 + \phi \theta g_0 + 0 + \theta \phi g_0 + \theta^2 \sigma_a^2 + 0 + 0 + 0 + \sigma_a^2$$

$$k=1, (5): \gamma_1 = \phi^2 \gamma_1 + \phi \theta g_1 + \phi g_0 + 0 + 0 + \theta \sigma_a^2 + 0 + 0 + 0$$

Έχουμε επομένως καταστρώσει ένα σύστημα εξισώσεων με ίσο πλήθος αγνώστων.

5

Εκτίμηση ζήτησης Poisson με την μέθοδο Bayes

Ένα προϊόν πωλείται σε ακέραιες ποσότητες.

Η ζήτηση σε κάθε περίοδο διάρκειας T είναι αμετάβλητη διαδικασία με κατανομή Poisson και μέση τιμή λT . Δηλαδή:

$$P(\text{ζήτηση}=k) = e^{-\lambda T} (\lambda T)^k / k! \quad \text{για } k=0,1,\dots \quad (0!=1 \text{ εξ ορισμού}).$$

Το λ είναι άγνωστο. Όπως συνηθίζεται, η άγνωστη παράμετρος θεωρείται τυχαία μεταβλητή. Έστω ότι για το συγκεκριμένο προϊόν το λ ακολουθεί εκθετική κατανομή με γνωστή μέση τιμή $1/v$ και πυκνότητα πιθανότητας $f(\lambda) = v e^{-v\lambda}$.

Μετά την πρώτη περίοδο, έχετε την πρώτη μέτρηση z_1 . Εκτιμήστε τα λ και z_2 χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία.

Τυπολόγιο: • Η μέση τιμή της Poisson είναι λT (δεν απαιτείται απόδειξη).

• $\int_0^\infty t^k e^{-st} dt = k! / s^{k+1}, s \neq 0.$

• Τύπος Bayes για εκτίμηση άγνωστης παραμέτρου θ από μετρήσεις x_i που έχουν πυκνότητα πιθανότητας:
$$f(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n | \theta) f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n | \theta) f(\theta) d\theta}$$

• Αντίστοιχος τύπος Bayes για εκτίμηση λ από μετρήσεις z_i που είναι διακριτές τ.μ. με πιθανότητες $P(z_1 | \lambda) = e^{-\lambda T} (\lambda T)^k / k!:$
$$f(\lambda | z_1) = \frac{P(z_1 | \lambda) f(\lambda)}{\int_0^\infty P(z_1 | \lambda) f(\lambda) d\lambda}$$

6

Εκτίμηση Bayes (συνέχεια)

Λύση

Εκτιμούμε λ και z_2 συνδυάζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (MET) και τον τύπο του Bayes:

$$\text{MET: } \hat{\lambda} = E(\lambda | z_1) = \int_0^\infty \lambda f(\lambda | z_1) d\lambda \quad \text{Bayes: } f(\lambda | z_1) = \frac{P(z_1 | \lambda) f(\lambda)}{\int_0^\infty P(z_1 | \lambda) f(\lambda) d\lambda}$$

$$\text{MET: } \hat{z}_2 = E(z | \hat{\lambda}) = \hat{\lambda} T \quad (1)$$

Υπολογίζουμε την $f(\lambda | z_1)$: (τυπολόγιο: $\int_0^\infty t^k e^{-st} dt = k! / s^{k+1}$)

$$f(\lambda | z_1) = \frac{\left[e^{-\lambda T} (\lambda T)^{z_1} / (z_1!) \right] v e^{-v\lambda}}{\int_0^\infty \left[e^{-\lambda T} (\lambda T)^{z_1} / (z_1!) \right] v e^{-v\lambda} d\lambda} = \frac{e^{-\lambda(T+v)} (\lambda T)^{z_1} / (z_1!)}{\frac{v T^{z_1} (z_1!) / (z_1!)}{(T+v)^{z_1+1}}} = \frac{T+v}{v} \frac{1}{z_1!} e^{-\lambda(T+v)} [\lambda(T+v)]^{z_1}$$

Παρατήρηση: Μετά τη νέα μέτρηση, η κατανομή του λ **δεν είναι πλέον εκθετική!**

Συνεχίζουμε με την εκτίμηση της λ :

$$\hat{\lambda} = E(\lambda | z_1) = \frac{(T+v)^{z_1+1}}{v} \frac{1}{z_1!} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(T+v)} \lambda^{z_1} d\lambda = \frac{T+v}{v} \frac{(T+v)^{z_1}}{z_1!} \frac{(z_1+1)!}{(T+v)^{z_1+2}} = \frac{z_1+1}{v(T+v)}$$

Τελικά από την (1), $\hat{z}_2 = \frac{z_1+1}{v} \frac{T}{T+v}$

7