

Επιλεγμένα Προβλήματα 2.12

Πρόβλημα 6

Εμπορικό κατάστημα προμηθεύεται και μεταπωλεί προϊόντα $j=1, \dots, n$. Η ζήτηση είναι σταθερή D_j μονάδες/έτος με κόστος αγοράς C_j , το κόστος αποθέματος/έτος h_j , το σταθερό κόστος παραγγελίας $A_j=A$ ίδιο για όλα, **οι ρυθμοί εκφόρτωσης είναι ∞ και δεν επιτρέπεται έλλειψη**. Υπάρχει ένα άνω όριο N στον αριθμό παραγγελιών ανά έτος. Εύρετε εκφράσεις κλειστής μορφής για τους πολλαπλασιαστές Lagrange και τα βέλτιστα μεγέθη παραγγελίας. Ποια είναι η ερμηνεία των πολλαπλασιαστών; Υπάρχει λύση κλειστής μορφής αν τα A_j διαφέρουν μεταξύ τους;

Λύση

Κόστος/έτος $K = \sum K_j$. Μοντέλο I με έλλειψη $b_j=0$ και $P_j=\infty$. Απλοποιούμε:

$$K(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{A_j D_j}{Q_j} + C_j D_j + \frac{h_j [Q_j(1-\rho_j) - \rho_j]^2}{2Q_j(1-\rho_j)} + \frac{\hat{\Pi} \rho_j^2}{2Q_j(1-\rho_j)} + \frac{\Pi_j D_j \rho_j}{Q_j(1-\rho_j)} \right]$$
$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j D_j}{Q_j} + C_j D_j + \frac{h_j Q_j}{2} \right) \quad \text{Αριθμός παραγγελιών ανά έτος} = \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{Q_j}$$

Πρόβλημα: Εύρεση Q_j ώστε • $\min K$
υπό περιορισμούς: • αριθμός παραγγελιών $\leq N$
• τα $Q_j \geq 0, j=1, \dots, N$

2

Πρόβλημα 6 (συνέχεια)

1. Λύνουμε το πρόβλημα χωρίς ανισότητες και ελέγχουμε τη λύση.
2. Αν μία ανισότητα παραβιάζεται, την εντάσσουμε ως ισότητα και λύνουμε πάλι. Επαναλαμβάνουμε για **κάθε** ανισότητα που παραβιάζεται.

1. Η K είναι άθροισμα κυρτών, άρα κυρτή. Επομένως το στάσιμο σημείο της, αν υπάρχει, είναι ολικό ελάχιστο. Εδώ υπάρχει:

$$\frac{\partial K}{\partial Q_j} = -\frac{A_j D_j}{Q_j^2} + \frac{h_j}{2} = 0. \quad \text{Θετική ρίζα } Q_j = \sqrt{\frac{2A_j D_j}{h_j}} \geq 0. \quad \text{Πρέπει } \sum_{j=1}^n \frac{D_j}{Q_j} = \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{h_j D_j}{2A_j}} \leq N$$

Αν ικανοποιείται ο περιορισμός, η ζητούμενη λύση Q_j έχει κλειστή μορφή για **κάθε** A_j . **Αλλιώς** τον εισάγουμε ως ισότητα στην επαυξημένη:

$$L = \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_j D_j}{Q_j} + C_j D_j + \frac{h_j Q_j}{2} \right) + \lambda \left(\sum_{j=1}^n \frac{D_j}{Q_j} - N \right) \quad \text{Στάσιμο: } \frac{\partial L}{\partial Q_j} = 0 \Rightarrow Q_j = \sqrt{\frac{2(A_j + \lambda) D_j}{h_j}} \quad (*)$$

Το λ πρέπει να ικανοποιεί την ισότητα: $\sum_{j=1}^n \frac{D_j}{Q_j} = \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{h_j D_j}{2(A_j + \lambda)}} = N$

Αν $A_j=A$, τότε $[2(A_j + \lambda)]^{0.5} = \text{ίδια} = [\sum (h_j D_j)^{0.5}] / N$. Υπολογίζουμε Q_j από τις (*).

Αν A_j είναι διαφορετικά τότε δεν υπάρχει λύση κλειστής μορφής.

Ερμηνεία: Το λ είναι συντελεστής ποινής που παίρνει τέτοιες τιμές ώστε να αυξάνει το κόστος L όταν παραβιάζεται η ισότητα.

3

Πρόβλημα 7

Ο ρυθμός ζήτησης για κάποιο είδος για τον επόμενο χρόνο είναι $200+1600t$, $0 \leq t \leq 1$. Το σταθερό κόστος παραγγελίας είναι 200 ανά παραγγελία, το κάθε είδος κοστίζει 10/μονάδα, και το κόστος αποθέματος είναι 20% ετησίως. Το αρχικό απόθεμα είναι 100 μονάδες. Αν $b=0$ ποια είναι η βέλτιστη πολιτική για τον επόμενο χρόνο;

Λύση

Η ζήτηση στο $[0, t]$ είναι $Z(t) = \int_0^t D(\tau) d\tau = 200t + 800t^2$

Αν ο συνολικός αριθμός παραγγελιών στο $[0, 1]$ είναι καθορισμένος τότε οι παραλαβές συμφέρει να γίνονται σε χρόνους t_j ώστε $Z(t_1)=I(0)$ και $Z(t_{j+1})=Z(t_j)+(t_j-t_{j-1})D(t_j)$ (*), $\forall j=2, \dots, n$ και $t_{n+1}=T=1$. Q_j και K_n από τυπολόγιο.

n=1: $200t_1+800t_1^2=100 \Rightarrow t_1=0.25$ ή $t_1=-1$. Η $t_1=0.25$ ανήκει στο διάστημα που μας ενδιαφέρει. $Q_1=Z(1)-Z(0.25)=(200+800)-100=900$. Κόστος αποθέματος:

$$H_n = h \left[\sum_{j=0}^n [Z(t_{j+1})(t_{j+1} - t_j)] - \int_0^T Z(t) dt \right] (**)$$

$$\Rightarrow H_1 = 0.2(10) \left[Z(t_1)(t_1 - t_0) + Z(t_2)(t_2 - t_1) - \underbrace{200(T^2/2) - 800(T^3/3)}_{366.67} \right] = 816.7$$

Τελικά $K_1=1A+H_1+CZ(T)=1016.7+CZ(T)$.

n=2: $t_3=1$. Η πρώτη αναπλήρωση γίνεται πάντα στην $t_1=0.25$. Από (*) με $j=2$: $Z(t_3)=Z(t_2)+(t_2-t_1)D(t_2) \Rightarrow Z(1)=(200t_2+800t_2^2)+(t_2-0.25)(200+1600t_2) \Rightarrow 2400t_2^2-1150=0$ με αποδεκτή ρίζα $t_2=0.6614$ (η άλλη είναι αρνητική). Ποσότητες αναπλήρωσης $Q_i=Z(t_{i+1})-Z(t_i)$: $Q_1=382.2$, $Q_2=517.8$.

4

Πρόβλημα 7 (συνέχεια)

Με $n=2$ στην (**) $\Rightarrow H_2=2[Z(t_1)(t_1-0)+Z(t_2)(t_2-t_1)+Z(1)(1-t_2)-366.67] \approx 390.7$. Τελικά $K_2=2A+H_2+CZ(T)=790.7+CZ(T)$.

n=3: $t_4=1$, $t_1=0.25$. Από την (*) με $j=2$ και $j=3$:

$$Z(t_3)=Z(t_2)+(t_2-t_1)D(t_2) \Rightarrow Z(t_3)-Z(t_2)-(t_2-0.25)D(t_2)=0$$

$$Z(t_4)=Z(t_3)+(t_3-t_2)D(t_3) \Rightarrow Z(1)-Z(t_3)-(t_3-t_2)D(t_3)Z(t_3)=0$$

Έχουμε ένα σύστημα εξισώσεων (είναι τριώνυμα) με αγνώστους t_2, t_3 . Το λύνουμε με κάποια αριθμητική μέθοδο όπως η Newton-Raphson (***) και κρατάμε μόνο τις λύσεις $0.25 < t_2 < t_3 < 1$. Αυτές είναι $t_2=0.5386$ $t_3=0.7823$.

Ποσότητες αναπλήρωσης $Q_i=Z(t_{i+1})-Z(t_i)$: $Q_1=239.7$, $Q_2=306.4$, $Q_3=353.9$.

$$(**) \Rightarrow H_3=2[Z(t_1)(t_1-0)+Z(t_2)(t_2-t_1)+Z(t_3)(t_3-t_2)+Z(1)(1-t_3)-366.67] \approx 295.$$

Τελικά $K_2=3A+H_3+CZ(T)=1095+CZ(T)$.

Παρατηρούμε ότι $K_1 > K_2$ και $K_2 < K_3$. Έχουμε τοπικό ελάχιστο για $n=2$ και προτείνουμε αυτήν την πολιτική αναπλήρωσης.

(***) Εκτός ύλης: $F(t)=0=F(t)+[dF(t)/dt](t-t) \Rightarrow t = t - [dF(t)/dt]^{-1}F(t)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(t_3) - Z(t_2) - (t_2 - t_1)D(t_2) \\ 1000 - Z(t_3) - (t_3 - t_2)D(t_3) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -2D(t_2) - (t_2 - t_1)D'(t_2) & D(t_3) \\ D(t_3) & -2D(t_3) - (t_3 - t_2)D'(t_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_2 - t_2 \\ t_3 - t_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2D(t_2) \dots & D(t_3) \\ D(t_3) & -2D(t_3) \dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z(t_3) - \dots \\ 1000 - \dots \end{bmatrix} \text{ όπου } \begin{bmatrix} t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \text{αρχικές τιμές π.χ. } \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

5

Πρόβλημα 8

Πρώτη ύλη καταναλώνεται με ρυθμό 180000 μονάδες/έτος. Η τιμή μονάδας είναι στον πίνακα, το σταθερό κόστος 60/παραγγελία και $i=20\%$. Δεν επιτρέπεται έλλειψη. Ο ρυθμός αναπλήρωσης είναι ∞ .

Ποια είναι η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας; Κάνετε το διάγραμμα κόστους ως προς την ποσότητα παραγγελίας.

Λύση

Το κόστος αποθέματος μεταβάλλεται με την τιμή και φαίνεται στον δεξιό πίνακα. Ευρίσκουμε το βέλτιστο κόστος σε κάθε περίπτωση με Μοντέλο IV:

$$K_j(Q_j) = \frac{AD}{Q_j} + C_j D + \frac{h_j Q_j}{2} \quad Q_j^* = \sqrt{\frac{2AD}{h_j}}$$

j	επιτρεπτό		$K_j(Q_j)$
	Q_j^*	Q_j	
1	7970.5	7970.5	308710
2	8215.8	20000	291740
3	8485.3	40000	276270

Ποσότητα	Τιμή	$h_j=0.2C_j$
$0 < Q < 20000$	1.7	0.34
$20000 \leq Q < 40000$	1.6	0.32
$40000 \leq Q < \infty$	1.5	0.30

