

Επιλεγμένα Προβλήματα 2.12

Πρόβλημα 1

Προϊόν παράγεται σε δόσεις των 20000 μον. = Q

Ρυθμός παραγωγής = 400000 μον./έτος = P

Ζήτηση = 160000 μον./έτος = D και $\rho = D/P = 0.4$

Παραγωγή αρχίζει όταν ανικανοποίητες = 4000 = b

Κόστος προετοιμασίας = 400 = A

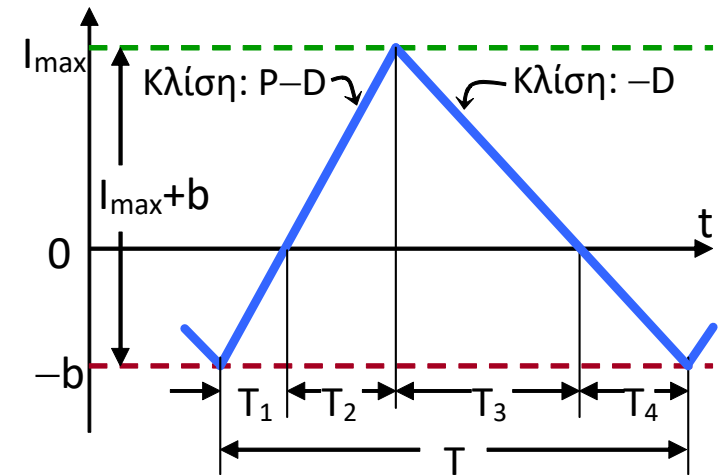
Κόστος ανά μονάδα = 20 = C

~~Ρυθμός~~ Κόστος αποθέματος = 20%/έτος

Κόστος ανικανοποιήτων = 5/μον./έτος = $\hat{\Pi}$

Δεν αναφέρεται $\Pi \Rightarrow \Pi = 0$

(Με καφέ σημειώνονται ουσιώδεις αλλαγές στις σημειώσεις)



$$\Rightarrow h=0.2 \quad C=4$$

Εύρετε: α. Μέγιστο απόθεμα $I_{\max} = Q(1-\rho) - b = 8000$

β. **Ετήσιο** κόστος αποθέματος $\frac{h[Q(1-\rho) - b]^2}{2Q(1-\rho)} = \frac{4[20000(0.6) - 4000]^2}{2(20000)(0.6)} = 10666.67$

γ. **Ετήσιο** κόστος ανικανοποιήτων παραγγελιών $\frac{\hat{\Pi}b^2}{2Q(1-\rho)} + \frac{\cancel{\Pi}Db}{Q(1-\rho)} = 3333.33$

δ. **Ετήσιο** κόστος προετοιμασίας = A (ετοιμασίες/έτος) = $A (D/Q) = 400(8) = 3200$

ε. Ποσοστό χρόνου που το σύστημα ευρίσκεται σε αρνητικό απόθεμα

$$= (T_1 + T_4) / T$$

$$= [b/(P-D) + b/D] / (Q/D) = [4/240 + 4/160] / (20/400) = 0.833 = 83.3\%$$

Πρόβλημα 2

Κατάστημα εμπορεύεται είδος με δεδομένα:

Ετήσιος ρυθμός ζήτησης: 100000 μονάδες = D

Σταθερό κόστος παραγγελίας: 40 = A

Μεταβλητό μοναδιαίο κόστος: 10 = C

Ρυθμός Κόστος αποθέματος/έτος: ~~0.2~~ 20% $\Rightarrow h=0.2$ $C=2$

Ετήσιο κόστος ανικανοποίητων παραγγελιών: 2/μονάδα = $\hat{\Pi}$... Πάλι $\Pi=0$

Η παραγγελία εκφορτώνεται χωρίς καθυστέρηση, δηλ. $P=\infty \Rightarrow$ Μοντέλο III,
 $\rho=D/P=0$

Εύρετε:

α. Βέλτιστο μέγεθος παραγγελίας. $Q^* = \sqrt{\frac{E}{h\hat{\Pi}(1-\rho)}} = 2828.42$ αφού $E=...$

$$E = 2AD(h + \hat{\Pi}) - \underbrace{(D\rho)^2}_{=0} / (1-\rho) = 32 \cdot 10^6 \quad \text{Επίσης } b^* = \frac{hQ^*(1-\rho) - D\rho}{h + \hat{\Pi}} = 1414.21$$

β. Αν ο χρόνος άφιξης παραγγελίας είναι 1 μήνας ποιο είναι το σημείο παραγγελίας; $r = \tau D - mQ - b$, όπου $\tau = 1/12$, $m = \text{int}(\tau/T) = \text{int}(\tau/(Q/D)) = \text{int}(2.94) = 2$
οπότε $r = 100000/12 - 2(2828.42) - 1414.21 = 1262.28$

γ. Μέσο και μέγιστο απόθεμα. $\bar{I} = \frac{[Q(1-\rho) - b]^2}{2Q(1-\rho)} = 353.5$ και $I_{\max} = Q - b = 1414.21$

δ. Μέσο και μέγιστο μέγεθος ανικανοποίητων παραγγελιών.

$$\bar{B} = \dots = \frac{b^2}{2Q} = 353.5 \quad (\text{από σύμπτωση ίδιο με } \bar{I}) \quad \text{και } b = 1414.21 \quad (\text{ίδιο με } I_{\max}).$$

Πρόβλημα 5

Στην τάξη έχουμε μεταχειρισθεί την ζήτηση σαν συνεχή μεταβλητή, ενώ στην πράξη είναι διακριτή. Για $D \gg$ αυτή η προσέγγιση είναι ικανοποιητική αλλά για μικρό D δεν μπορούμε να παίρνουμε παραγώγους.

Για να είναι το Q^* ελάχιστο πρέπει **οποιαδήποτε μεταβολή του, είτε + είτε -, να αυξάνει το κόστος. Δηλαδή $K(Q^*-1) > K(Q^*)$ και $K(Q^*+1) \geq K(Q^*)$.**

Δείξτε ότι όταν $b=0$ και $P \rightarrow \infty$, το Q^* είναι ο μεγαλύτερος **ακέραιος από όλους εκείνους που ικανοποιούν** $Q(Q-1) \leq \frac{2AD}{h}$

Λύση: Για $b=0$, $P \rightarrow \infty$ το κόστος ανά μονάδα χρόνου απλοποιείται ως εξής

$$K(Q) = \frac{AD}{Q} + CD + \frac{h[Q(1-\cancel{\rho}) - \cancel{b}]^2}{2Q(1-\cancel{\rho})} + \frac{\hat{\Pi} \cancel{b}^2}{2Q(1-\cancel{\rho})} + \frac{\Pi D \cancel{b}}{Q(1-\cancel{\rho})} = \frac{AD}{Q} + CD + \frac{1}{2}hQ$$

Αναλύουμε τις δύο συνθήκες: Η $K(Q^*-1) \geq K(Q^*)$ μετά από πράξεις γίνεται $Q^*(Q^*-1) \leq \alpha$ όπου $\alpha = 2AD/h$. Σημειώστε ότι η συνάρτηση $Q(Q-1)$ είναι γνησίως αύξουσα για $Q = 1, 2, \dots$ (παραγωγίστε την) ενώ δεν μας ενδιαφέρουν τιμές $Q \leq 0$. Επομένως έχουμε ότι **$Q(Q-1) < (Q^*+1)Q^* \leq \alpha$** για κάθε Q τέτοιο ώστε $1 \leq Q < Q^*$.

Η $K(Q^*+1) \geq K(Q^*)$ γίνεται **$(Q^*+1)Q^* \geq \alpha$.**

Συνδυάζοντας τις δύο: **$Q(Q-1) < Q^*(Q^*-1) \leq \alpha \leq (Q^*+1)Q^*$** για κάθε Q : $1 \leq Q < Q^*$.

Έχουμε επομένως αποδείξει ότι: από **όλα τα Q τα οποία ικανοποιούν την ανισότητα $Q(Q-1) \leq \alpha$, το Q^* είναι το μεγαλύτερο** γιατί αφ' ενός την ικανοποιεί και αφ' ετέρου **αν το μεγαλώσουμε σε Q^*+1 , τότε παύει να την ικανοποιεί.**