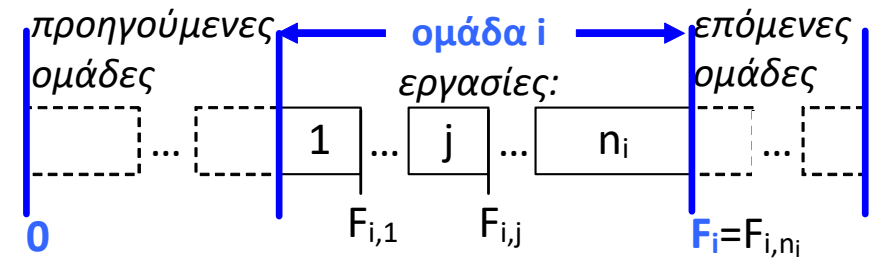


Ομάδες με Απαιτούμενη Διαδοχή Εργασιών

Μία μηχανή θα εκτελέσει K **ομάδες εργασιών** $i=1,\dots,K$ με $r_i=0$. Η ομάδα i μία **αλυσίδα** από n_i εργασίες (i,j) με διάρκειες $p_{i,j}$ και **ορισμένη διαδοχή** $(i,1)-\dots-(i,n_i)$.



Ζητείται το πρόγραμμα εκτέλεσης των **ομάδων** που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των χρόνων ροής των **εργασιών** $\sum_i \sum_j F_{i,j}$. **Πρακτική αξία=...;**

(προστίθεται στην ύλη) Ένα έργο (ομάδα) αποτελείται από πολλά στάδια (εργασίες) εν σειρά. Αν και τα έργα μπορεί να έχουν και στάδια που εκτελούνται παράλληλα εδώ διαιρούμε το έργο σε στάδια εν σειρά.

Συχνά στη **σύμβαση εκτέλεσης** ορίζονται οι **κανονικοί χρόνοι ολοκλήρωσης των επί μέρους σταδίων που συμβολίζονται $d_{i,j}$** . Αν ο εργολάβος τελειώσει το στάδιο i αργότερα, επιβαρύνεται με επί πλέον κόστος $A(F_{i,j}-d_{i,j})>0$ ενώ αν τελειώσει νωρίτερα έχει κέρδος $B(d_{i,j}-F_{i,j})>0$ ή αλλάζοντας το νόημα σε κόστος, έχει κόστος $B(F_{i,j}-d_{i,j})<0$.

Αν ο εργολάβος έχει **K έργα** και ένα μόνο συνεργείο, έχει πρακτική αξία η σειρά εκτέλεσης με ελάχιστο κόστος. Για $A=B$ το συνολικό κόστος είναι:

$$Z = \sum_{i=1}^K \left[A(F_{i,1} - d_{i,1}) + \dots + A(F_{i,n_i} - d_{i,n_i}) \right] = A \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j} - A \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} d_{i,j}$$

Τα A και $d_{i,j}$ είναι σταθερά, άρα **$\min Z$ έχουμε όταν συμβεί $\min \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j}$**

Ομάδες με Απαιτούμενη Διαδοχή Εργασιών (συνέχεια)

Η διάρκεια όλης της ομάδας i είναι $p_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_{i,j}$ και ο χρόνος περάτωσης $F_i = F_{i,n_i}$.

Θεώρημα: Όταν οι **λόγοι p_i/n_i είναι αύξοντες,**

$$\frac{p_1}{n_1} \leq \frac{p_2}{n_2} \leq \dots \leq \frac{p_K}{n_K}$$

η σειρά $(1, 2, \dots, K)$ ελαχιστοποιεί το

άθροισμα των χρόνων περάτωσης όλων των εργασιών $\sum_i \sum_j F_{i,j}$.

Απόδειξη: Δείτε την εκτέλεση της ομάδας i .

Για την εργασία j στην ομάδα i η **απόσταση** από τον χρόνο F_i ορίζεται

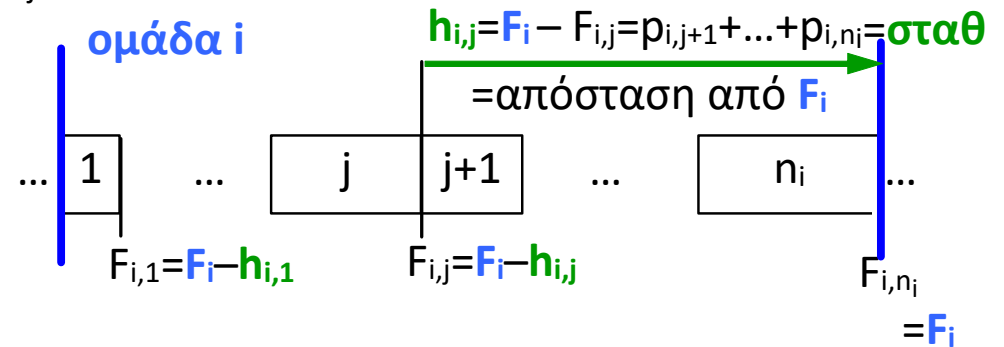
$h_{i,j} = p_{i,j+1} + \dots + p_{i,n_i}$ και είναι σταθερή, ανεξάρτητη της σειράς των ομάδων.

Γράφουμε επίσης $F_{i,j} = F_i - h_{i,j}$. Το άθροισμα χρόνων της ομάδας i είναι

$$\sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j} = (F_i - h_{i,1}) + (F_i - h_{i,2}) + \dots + (F_i - 0) = n_i F_i - \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$$

και το συνολικό $\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j} = \sum_{i=1}^K n_i F_i - \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} h_{i,j} = \sum_{i=1}^K n_i F_i - \text{σταθ.}$

Το $\sum n_i F_i$ είναι άθροισμα των χρόνων ροής με βάρη $w_i = n_i$. Αλλά αυτό γίνεται ελάχιστο όταν ισχύει ο κανόνας WSPT $\min p_i/n_i$. ΟΕΔ.



Ομάδες με Απαιτούμενη Διαδοχή Εργασιών (συνέχεια)

Θεώρημα: Όταν οι **διάρκειες εκτέλεσης των ομάδων είναι αύξουσες**,

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_K$$

η σειρά $(1, 2, \dots, K)$ ελαχιστοποιεί το άθροισμα $\sum_i F_i$.

Απόδειξη: Ορίζουμε νέο πρόβλημα με $n_i=1$, $p_{i,1}(=p_{i,n_i})=p_i$ και $F_{i,1}(=F_{i,n_i})=F_i$.

Το κόστος του αρχικού είναι ίδιο με του νέου: $\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} F_{i,j} = \sum_{i=1}^K F_{i,1} = \sum_{i=1}^K F_i$

Αποδείξαμε πριν ότι το νέο έχει λύση $p_1/1 \leq p_2/1 \leq \dots \leq p_K/1$. ΟΕΔ.

Άλλος τρόπος: Απ' ευθείας, $\sum_i F_i = \dots = Kp_1 + (K-1)p_2 + \dots + 1p_K \Leftrightarrow \text{SPT: } p_1 \leq \dots \leq p_K$

Παραδείγματα από προηγούμενες ενότητες

1. Ιδιότητα του προγράμματος EDD. Μία μηχανή εκτελεί η εργασίες. Να αποδείξετε ότι αν με το πρόγραμμα EDD καθυστερεί μία τουλάχιστο εργασία, τότε δεν υπάρχει άλλο πρόγραμμα στο οποίο να μην καθυστερεί καμία.

Ευθεία απόδειξη: Αφού μία τουλάχιστο εργασία καθυστερεί, σημαίνει ότι κάποιο $L_i(EDD) > 0$ οπότε $L_{\max}(EDD) > 0$. Γνωρίζουμε ότι $L_{\max}(EDD) \leq L_{\max}(S)$ για κάθε S , άρα $L_{\max}(S) > 0$, άρα και στο S υπάρχει τουλάχιστο μία εργασία που καθυστερεί.

Πλάγια απόδειξη (αντιστροφoαντίθετο): Αν για κάποιο S δεν καθυστερεί καμία, τότε $L_i(S) \leq 0$ για όλα τα i άρα $L_{\max}(S) \leq 0$. Αφού $L_{\max}(EDD) \leq L_{\max}(S)$, συμπεραίνουμε ότι $L_{\max}(EDD) \leq 0$ άρα ούτε στο EDD υπάρχουν καθυστερήσεις.

2. F3 | F_{max} - Χρόνοι ροής: Γραμμή με 3 μηχανές (F3) εκτελεί 6 εργασίες με χρόνους στον πίνακα. Εύρετε το πρόγραμμα με $\min F_{\max}$. Κατόπιν εύρετε το $F_{\max}$ και τους μέσους χρόνους ροής στο σύστημα και στην M_3 .

i	p _{i1}	p _{i2}	p _{i3}	p _{i1} '	p _{i2} '
1	3	1	2	4	3
2	1	1	2	2	3
3	1	1	2	2	3
4	3	1	1	4	2
5	1	0	1	1	1
6	1	0	1	1	1

Λύση: Η μεσαία μηχανή έχει $\max p_{k2} = 1$. Οι άλλες έχουν $p_{i1} \geq 1$ και επίσης $p_{i3} \geq 1$ άρα **κυριαρχούν επί της M_2** (μία αρκούσε).

Το βέλτιστο πρόγραμμα είναι ίδιο με ενός F2 | F_{max} και χρόνους $p_{i1}' = p_{i1} + p_{i2}$ και $p_{i2}' = p_{i2} + p_{i3}$

A. Επαναλήψεις αλγορίθμου Johnson στις p_{ik}

- 1) $\min = 1$, υποψήφιος $i = 5, 6$. Επιλογή $p_{51}' \Rightarrow \underline{5}$ _ _ _ _ _
- 2) $\min = 1 = p_{61}' = p_{62}'$, επιλογή $p_{61}' \Rightarrow \underline{5} \underline{6}$ _ _ _ _
- 3) $\min = 2$, υποψήφιος $i = 2, 3, 4$. Επιλογή $p_{21}' \Rightarrow \underline{5} \underline{6} \underline{2}$ _ _ _
- 4) $\min = 2$, υποψήφιος $i = 3, 4$. Επιλογή $p_{31}' \Rightarrow \underline{5} \underline{6} \underline{2} \underline{3}$ _ _
- 5) $\min = 2 = p_{42}' \Rightarrow \underline{5} \underline{6} \underline{2} \underline{3} \underline{4}$
- 6) Τελευταία θέση $\underline{5} \underline{6} \underline{2} \underline{3} \underline{4} \underline{1}$

B. Διάγραμμα Gantt:

Διάστημα: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 ...

M_1 **562311444**
 M_2 **↓ ↓ 23 1 4**
 M_3 **56 223311 4 | F_{max} = 12**

$$\Gamma. \bar{F} = (F_5 + F_6 + F_2 + F_3 + F_1 + F_4) / 6 = (2 + 3 + 6 + 8 + 10 + 12) / 6 = 5.17$$

$$\bar{F}_3 = [(F_{53} - F_{52}) + (F_{63} - F_{62}) + (F_{23} - F_{22}) + (F_{33} - F_{32}) + (F_{13} - F_{12}) + (F_{43} - F_{42})] / 6 = [(2-1) + (3-2) + (6-4) + (8-5) + (10-8) + (12-11)] / 6 = 1.67.$$