

# Τήρηση Προθεσμιών Παράδοσης-Μία Μηχανή

Μία μηχανή πρέπει να εκτελέσει  $n$  εργασίες με χρόνους άφιξης  $r_i=0$ , γνωστές διάρκειες  $p_i$  και **προθεσμίες παράδοσης**  $d_i$  (due dates).

Ορίζουμε κάποιους δείκτες τήρησης των προθεσμιών.

**Βραδύτητα** (lateness) της εργασίας  $i$  είναι η **διαφορά**

$$L_i = C_i - d_i$$

που είναι θετική, 0 ή αρνητική. Αφού  $r_i=0$ , ισχύει ότι  $F_i = C_i - r_i = C_i$  και  $L_i = F_i - d_i$ .

Η μέση βραδύτητα  $\bar{L} = (L_1 + \dots + L_n)/n$  ελαχιστοποιείται με **SPT**:  $p_1 \leq \dots \leq p_n$ .

**Απόδειξη:** Το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί την  $\sum L_i = \sum F_i - \sum d_i$  είναι **ίδιο** με εκείνο που ελαχιστοποιεί τον  $\sum F_i$ , δηλαδή **SPT**, αφού  $\sum d_i = \text{σταθερό}$ .

**Καθυστερήση** (tardiness) της  $i$  είναι η υπέρβαση της προθεσμίας

$$T_i = \max(0, L_i).$$

και είναι πάντα θετική ή 0.

Το  $\max$  είναι **μη γραμμική συνάρτηση**. Για τούτο τα προβλήματα ελαχιστοποίησης καθυστερήσεων είναι δύσκολα.

**(εκτός ύλης)** Η **ενωρίτητα** (earliness) της  $i$  ορίζεται

$$E_i = \max(0, d_i - C_i) = \max(0, -L_i)$$

και είναι θετική όταν η παραγγελία παραδίδεται νωρίτερα από την προθεσμία.

Αν π.χ. μία παραγγελία παγωτού με προθεσμία παράδοσης 4 εβδομάδες είναι έτοιμη την 3η εβδομάδα πρέπει να μείνει στο ψυγείο 7 ημέρες με κόστος.

$1||L_{\max}, 1||T_{\max}$ . Η ελαχιστοποίηση  $L_{\max}$  ή  $T_{\max}$  είναι το ίδιο πρόβλημα:

$$L_{\max} = \max(L_1, \dots, L_n) \text{ και } T_{\max} = \max(T_1, \dots, T_n) = \max[\max(0, L_1), \dots, \max(0, L_n)] = \max(0, L_{\max}).$$

**Θεώρημα:** Οι  $L_{\max}, T_{\max}$  ελαχιστοποιούνται με τον πρόγραμμα **ενωρίτερων προθεσμιών** (earliest due dates **EDD**) όπου εργασίες με σύντομες προθεσμίες εκτελούνται πρώτες. Έχουμε δηλαδή τη σειρά  $(1, 2, \dots, n)$  όταν  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ .

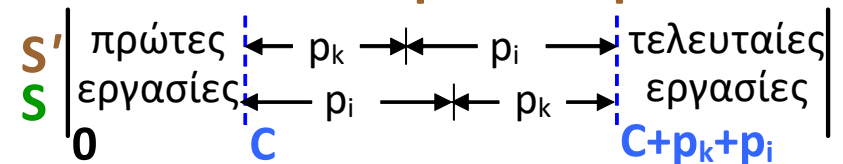
**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή

**παραβίαση EDD  $\Rightarrow$  μη βέλτιστο πρόγραμμα**

που ισοδυναμεί με το **θεώρημα: βέλτιστο πρόγραμμα  $\Rightarrow$  τήρηση EDD** (πρόκειται για ισοδυναμία των αντιστροφοαντίθετων ή πλάγια απόδειξη).

**Παραβίαση EDD** έχουμε αν **μία τουλάχιστον ανισότητα δεν ισχύει. Μη βέλτιστο** είναι ένα πρόγραμμα αν υπάρχει **άλλο το ίδιο καλό ή καλύτερο**.

Θεωρούμε πρόγραμμα **S'** που **παραβιάζει** μία τουλάχιστον ανισότητα EDD, έστω στις διαδοχικές εργασίες  $(k, i)$  με  $d_k > d_i$ .



Κατασκευάζουμε ένα όμοιο **S** αλλά με αντίθετη σειρά  $(i, k)$ . Βραδύτητες:

$$L_{\max}(S) = \max(C + p_i - d_i, C + p_i + p_k - d_k) \quad L_{\max}(S') = \max(C + p_k - d_k, C + p_k + p_i - d_i)$$

Ο όρος δεξιά, λόγω της  $d_k > d_i \Leftrightarrow -d_i > -d_k$  είναι  $>$  από τους άλλους τρεις:

- $C + p_k + p_i - d_i > C + p_k - d_k$ , αφού  $p_i - d_i > -d_k$ ,
  - $C + p_k + p_i - d_i > C + p_i + p_k - d_k$  αφού  $-d_i > -d_k$ ,
  - και προφανώς  $C + p_k + p_i - d_i > C + p_i - d_i$ .
- } **παραβίαση της EDD**  
 $\Rightarrow L_{\max}(S') \geq L_{\max}(S)$   
 $\Rightarrow$  **μη βέλτιστο πρόγραμμα**

Αποδείξαμε ότι **για ελάχιστο  $L_{\max}$  πρέπει η EDD να ισχύει παντού.**

**$1 || \max L_{\min}, 1 || \max T_{\min}$** . Ένα πρόγραμμα δίχως προφανή πρακτική χρησιμότητα είναι εκείνο στο οποίο η μικρότερη βραδύτητα και η μικρότερη καθυστέρηση έχουν **τις μέγιστες δυνατές τιμές (!)**

Υποθέτουμε ότι η μηχανή επιβάλλεται να δουλέψει αν εκκρεμεί εργασία.

**Περιθώριο** (slack) μιας εργασίας  $i$  είναι η ποσότητα  $s_i = d_i - p_i$ . Είναι ο αργότερος χρόνος έναρξης της  $i$  που δεν οδηγεί σε καθυστέρηση.

**Θεώρημα:** Ο κανόνας **αυξανόμενων περιθωρίων** (least slack **LS**)

$$d_1 - p_1 \leq \dots \leq d_n - p_n \quad \text{ή} \quad s_1 \leq \dots \leq s_n$$

συνεπάγεται ότι το πρόγραμμα  $(1, \dots, n)$  **μεγιστοποιεί** τις  $L_{\min}$  και  $T_{\min}$ .

**(εκτός ύλης)** Για προβλήματα με πολλές μηχανές δοκιμάζονται πολλοί κανόνες με προσομοίωση. Συχνά οι κανόνες που βασίζονται **στο περιθώριο** (π.χ.  $\min(s_i/n_i)$  όπου  $n_i$  ο αριθμός κατεργασιών που η  $i$  χρειάζεται) **είναι καλύτεροι**.

**Απόδειξη θεωρήματος (όμοια με προηγούμενη αλλά εκτός ύλης):** Συγκρίνουμε τα προγράμματα  $S$  και  $S'$  με  $(i, k)$  και  $(k, i)$  αντιστοίχως. Εν γένει

$$L_i = C_i - d_i = (\text{χρόνος έναρξης} + p_i) - d_i = (\text{χρόνος έναρξης}) + p_i - d_i = (\text{χρόνος έναρξης}) - s_i$$

$$\text{Τότε } L_{\min}(S) = \min(\dots C - s_i, C + p_i - s_k \dots) \text{ και } L_{\min}(S') = \min(\dots C - s_k, C + p_k - s_i \dots)$$

Αν το  $S'$  **παραβιάζει τον κανόνα LS**, τότε  $s_k > s_i$  και άρα  $-s_k < -s_i$ . Τότε επίσης ο όρος  $C - s_k$  του  $L_{\min}(S')$  είναι ο **μικρότερος από όλους**.

Άρα η παραβίαση μίας ανισότητας LS οδηγεί σε  $L_{\min}(S') \leq L_{\min}(S)$  που σημαίνει ότι **για να έχουμε μέγιστο  $L_{\min}$  πρέπει η ανισότητα LS να ισχύει παντού**.

**Παράδειγμα: (από εξετάσεις)** Μία μηχανή θα εκτελέσει 5 εργασίες με διάρκειες και προθεσμίες όπως στον πίνακα.

| i | p <sub>i</sub> | d <sub>i</sub> | s <sub>i</sub> |
|---|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 5.1            | 5.5            | 0.4            |
| 2 | 2.2            | 6              | 3.8            |
| 3 | 5.1            | 6              | 0.9            |
| 4 | 1.9            | 5              | 3.1            |
| 5 | 3              | 4              | 1              |

**α.** Εύρετε ένα πρόγραμμα εκτέλεσης των εργασιών που ελαχιστοποιεί τον μέσο χρόνο ροής και μετά υπολογίστε τον.

**β.** Εύρετε ένα πρόγραμμα εκτέλεσης των εργασιών που ελαχιστοποιεί την μέγιστη καθυστέρηση και υπολογίστε την.

**γ.** Εύρετε ένα πρόγραμμα εκτέλεσης των εργασιών που μεγιστοποιεί την ελάχιστη καθυστέρηση και υπολογίστε την.

**Λύση: α.** Πρόγραμμα SPT: 4-2-5-1-3 (μπορούμε και το 4-2-5-3-1)

$F_4=1.9$   $F_2=1.9+2.2=4.1$   $F_5=4.1+3=7.1$   $F_1=7.1+5.1=12.2$   $F_3=12.2+5.1=17.3$   
και  $\bar{F} = (1.9+4.1+7.1+12.2+17.3)/5 = 42.6/5=8.52$

**β.** Πρόγραμμα EDD: 5-4-1-2-3 (μπορούμε και το 5-4-1-3-2).

$F_5=3$  και  $T_5=\max(F_5-d_5,0)=\max(3-4,0)=0$

$F_4=3+1.9=4.9$  και  $T_4=\max(4.9-5,0)=0$

$F_1=4.9+5.1=10$  και  $T_1=\max(10-5.5,0)=4.5$

$F_2=10+2.2=12.2$  και  $T_2=\max(12.2-6,0)=6.2$

$F_3=12.2+5.1=17.3$  και  $T_3=\max(17.3-6,0)=9.3 = T_{\max}^{(*)}$

**(\*)** Εδώ έτυχε  $T_{\max}$  να είναι η  $T_3$  της τελευταίας: Αν  $d_3=20$ , τότε  $T_3=0$  και  $T_{\max}=T_2$ .

**γ.** Υπολογίζουμε τα  $s_i=d_i-p_i$  (δίπλα στα δεδομένα). Πρόγραμμα LS: 1-3-5-4-2.

$F_1=5.1$  και  $T_1=\max(F_1-d_1,0)=\max(5.1-5.5,0)=0 = T_{\min}^{(**)}$

$F_3=5.1+5.1=10.2$  και  $T_3=\max(10.2-6,0)=4.2$

$F_5=10.2+3=13.2$  και  $T_5=\max(13.2-4,0)=9.2$

$F_4=13.2+1.9=15.1$  και  $T_4=\max(15.1-5,0)=10.1$

$F_2=15.1+2.2=17.3$  και  $T_2=\max(17.3-6,0)=11.3$

**(\*\*)** Μπορούμε να σταματήσουμε γιατί τα υπόλοιπα  $T_i$  είναι σίγουρα  $\geq 0$ .