

Μοντέλα Box-Jenkins (μοντέλα ARMA)

A. Υποθέσεις και περιγραφή των μοντέλων

Ροπές 1ης και 2ης τάξης (μέση τιμή, συμμεταβλητότητες, συσχετίσεις)

Αν η X_t παίρνει διακριτές τιμές $x_{(i)}$ τότε $\mu_X = E(X_t) = \dots + x_{(i)} P(X_t = x_{(i)}) + \dots$
και αν παίρνει τιμές σε συνεχές διάστημα, τότε $\mu_X = E(X_t) = \int x f(x) dx$

Αμετάβλητες κ.ε.ε.: οι ροπές 1ης και 2ης τάξης **δεν** εξαρτώνται από t

Ανεξάρτητες X_t, Y_t : $P(X_t = x, Y_t = y) = P(X_t = x)P(Y_t = y)$ **Ασυσχέτιστες:** $E(X_t Y_t) = \mu_X \mu_Y$

M1) Ανεξάρτητες $\Rightarrow$ ασυσχέτιστες

M2) $E(\cdot)$ και άθροιση εναλλάσσονται: $E(\alpha + \beta X_t + \gamma Y_t + \dots) = \alpha + \beta \mu_X + \gamma \mu_Y + \dots$

Συμμεταβλητότητα X_t, Y_t : $\gamma_{XY,k} = E[(X_{t+k} - \mu_X)(Y_t - \mu_Y)] = \dots = E(X_{t+k} Y_t) - \mu_X \mu_Y$

Αυτοσυμμεταβλητότητα X_t : $\gamma_k = \gamma_{XX,k} = \dots = \gamma_{-k}$ **Διασπορά:** $\sigma_X^2 = \gamma_0$

Συντελεστές συσχέτισης X_t, Y_t : $\rho_{XY,k} = \gamma_{XY,k} / (\sigma_X \sigma_Y)$ **Αυτοσυσχ. X_t :** $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$

M3) $\text{Cov}(\alpha + \beta X_t + \gamma Y_{t+k} + \delta Z_{t+m} + \dots) = \beta^2 \sigma_X^2 + \gamma^2 \sigma_Y^2 + \dots + 2\beta\gamma \gamma_{XY,k} + 2\beta\delta \gamma_{XZ,m} + \dots$

Πρόβλημα:

Έχουμε μία διαδικασία X_t και μετρήσεις της σε χρόνους $t=1, 2, \dots$. Αναζητούμε **συναρτήσεις παλαιότερων μετρήσεων** $x_1, \dots, x_{t-1}$ που προσεγγίζουν καλά τα X_{t+k} για $k \geq 0$. Τέτοιες είδαμε: εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων, Bayes.
Θα δούμε τώρα κάποιες **γραμμικές συναρτήσεις** γνωστές ως **Αυτοπαλινδρομικά** μοντέλα **Κινούμενου** ή **Κινητού Μέσου Όρου** (ARMA models). ²

Υποθέσεις

Έστω ότι μελετάμε την X_t . Εν γένει $\mu_X \neq 0$. Γενικό μοντέλο πρόβλεψης:

$Y_t = \hat{Y}_t + a_t$, όπου $Y_t = X_t - \mu_X$, $\mu_X \approx \bar{x}$ = μέσος όρος $x_1, \dots, x_{t-1}$ και a_t = σφάλμα.

Y1) Η βοηθητική διαδικασία Y_t είναι αμετάβλητη με $\mu_Y = 0$.

Y2) a_t : λευκός θόρυβος $\sim N(0, \sigma_a^2)$, $\mu_a = 0$, $\gamma_a(k) = 0$ $k \neq 0$, $\gamma_a(0) = \sigma_a^2$ = **άγνωστη**.

Έχουμε εξηγήσει γιατί το σφάλμα **πρέπει** να είναι λευκός θόρυβος.

Y3) Οι διαδικασίες X_t, Y_t **εξαρτώνται** από τα a_t **ίσως και παλιότερα** $a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ **αλλά όχι από μελλοντικά** $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots$

MA(q) μοντέλο MA τάξης q : $Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$ ($X_t = Y_t + \mu_X$)

Λόγω **Y2** **πρέπει** $Y_t \sim N(0, \sigma_Y^2)$. **Εκτιμήσεις:** $q, \sigma_a^2, \theta_1, \dots, \theta_q$ και $a_{t-1}, \dots, a_{t-q}$

Οι τελεστές αντίστροφης μετατόπισης B και διαφοράς ∇

Τελεστής = μετασχηματισμός μίας συνάρτησης σε μία άλλη.

Παραδείγματα: παράγωγος, αόριστο ολοκλήρωμα, μ/σμός Fourier,...

Έστω μία διαδικασία Z_t . Η Z_t είναι συνάρτηση του χρόνου t και της τύχης.

Ο τελεστής B ορίζεται με τις ιδιότητες $BZ_t = Z_{t-1}$, $B^j Z_t = Z_{t-j}$, $B^{-1} Z_t = Z_{t+1}$, $B^0 Z_t = Z_t$

Το MA(q) ως πολυώνυμο τελεστών: $Y_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \Theta_q(B) a_t$

Ο τελεστής ∇ : $\nabla = 1 - B$. Π.χ. $\nabla^2 Z_t = (1 - B)^2 Z_t = (1 - 2B + B^2) Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$.

Τι τους θέλουμε; Απλοποίηση μοντέλων, πολυώνυμα, ισοδυναμίες ...

AR(p): $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t \Rightarrow (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) Y_t = \Phi(B) Y_t = a_t, Y_t \sim N(0, \sigma_Y^2)$

Y_t αμετάβλητη: $\{a_n / Y_1 / \dots / Y_p / < \infty \Rightarrow |Y_t| / \dots < \infty\}$ ή $\{\rho_{\lambda} \text{ της } \Phi(\lambda) = 0: |\lambda| > 1\}$.

ARMA(p,q): $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \Rightarrow \Phi(B) Y_t = \Theta(B) a_t, Y_t \sim N(0, \sigma_Y^2)$

Ισοδυναμίες

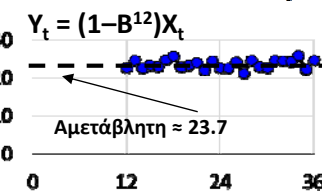
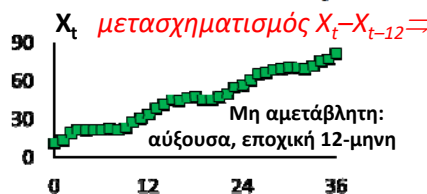
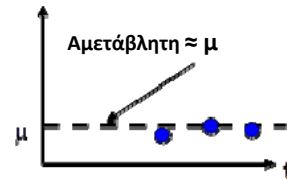
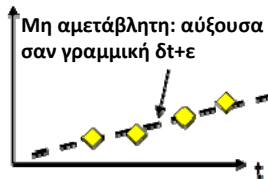
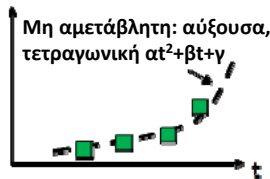
ARMA(p,q): $\Phi(B) Y_t = \Theta(B) a_t \Leftrightarrow \text{AR}(\infty): \Phi(B) / \Theta(B) Y_t = a_t \Leftrightarrow \text{MA}(\infty): Y_t = \Theta(B) / \Phi(B) a_t$

Π.χ., **MA(1)** $Y_t = (1 - \theta B) a_t, |\theta| < 1 \Leftrightarrow (1 - \theta B)^{-1} Y_t = (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \dots) Y_t = a_t$ **AR**(∞)

$\Psi(B) = \Phi(B) / \Theta(B) = \text{συνάρτηση μεταφοράς του γραμμικού συστήματος AR.}$

Μετασχηματισμοί μη αμετάβλητης $X_t \rightarrow Z_t \rightarrow Y_t$ σε αμετάβλητη

X_t μετασχηματισμός $X_t - X_{t-1} \Rightarrow Z_t = \nabla X_t$ μετασχηματισμός $Z_t - Z_{t-1} \Rightarrow Y_t = \nabla^2 X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$



ARIMA(p,d,q) με εποχικότητα s: $\Phi(B)(1 - B^s)(\nabla^d X_t - \mu) = \Theta(B) a_t$

4

Β) Τα βήματα της ανάπτυξης μοντέλου και πρόβλεψης

Έστω η X_t με χρονοσειρά $x_1, \dots, x_n$. Ζητούμε προβλέψεις $\hat{x}_{n+1}, \hat{x}_{n+2}, \dots$

1. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς ∇ (για $X_t \nearrow$ ή $\searrow$) και $1 - B^d$ (για περιοδική X_t) την μετασχηματίζουμε σε αμετάβλητη (αρκεί κ.ε.ε.) Y_t . Αφαιρούμε μέσον όρο και προκύπτει αμετάβλητη $Y_t - \bar{y}$ με $E(Y_t - \bar{y}) \approx 0$.

2. Είναι η $Y_t - \bar{y}$ λευκός θόρυβος; Δειγματοληψία, έλεγχος υποθέσεων:

• Δειγματικές τιμές, $\hat{\mu}_Y = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t, \hat{\gamma}_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}), \hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$
Αν $|\hat{\rho}_k| \leq 2/n^{0.5}$, τότε με πιθανότητα 95% ισχύει $\rho_k = 0$, αλλιώς $\rho_k \neq 0$.

• Αν $\rho_k = 0$ για κάθε $k > 0$ (ίδιο για $k < 0$, αφού $\rho_k = \rho_{-k}$), τότε η $Y_t - \bar{y}$ είναι λευκός θόρυβος, το μοντέλο είναι $Y_t = \bar{y} + a_t$ και εκτελούμε το βήμα 4,

• αν $\rho_k \neq 0$ για κάποιο $k > 0$, τότε και εκτελούμε το βήμα 3.

3. Επιλέγουμε κατάλληλο μοντέλο ARMA(p,q) για την $Y_t - \bar{y}$. Υπολογίζουμε τους συντελεστές του μοντέλου.

4. Από το μοντέλο υπολογίζουμε τις προβλέψεις $\hat{y}_{n+1}, \hat{y}_{n+2}, \dots$

Με αντίστροφους μετασχηματισμούς υπολογίζουμε και τις $\hat{x}_{n+1}, \hat{x}_{n+2}, \dots$

Παράδειγμα για το 4: Αν $x_1, \dots, x_n$ γνωστά και $Y_t = (1 - B)(1 - B^{12})X_t$. Πράξεις:

$$Y_t = (X_t - X_{t-12}) - (X_{t-1} - X_{t-13}) = X_t - X_{t-1} - X_{t-12} + X_{t-13}$$

Λύνουμε $X_t = Y_t + X_{t-1} + X_{t-12} - X_{t-13}$ και για $t = n+1 \Rightarrow \hat{x}_{n+1} = \hat{y}_{n+1} + \hat{x}_n + \hat{x}_{n-12} - \hat{x}_{n-13}$

5

Παράδειγμα ελέγχου αν η X_t (ή η Y_t) είναι λευκός θόρυβος

Έστω η χρονοσειρά $x_1, \dots, x_{10}$ με $\bar{x}=51$ Ζητούμε προβλέψεις $\hat{x}_{n+1}, \hat{x}_{n+2}, \dots$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	47	64	23	71	38	64	55	41	59	48
$x_t - \bar{x}$	-4	13	-28	20	-13	13	4	-10	8	-3

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^{10} (x_t - \bar{x})^2 = \frac{(-4)^2 + 13^2 + \dots + (-3)^2}{10} = 189.6$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^9 (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x}) = \frac{-4 \cdot 13 + 13(-28) + \dots + 8(-3)}{10} = -149.7$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{-149.7}{189.6} = -0.79$$

Εδώ $2/n^{0.5} = 2/10^{0.5} = 0.63$. Επειδή $|\hat{\rho}_1| > 0.63$, συμπεραίνουμε ότι οι $x_t - \bar{x}$ **δεν σχηματίζουν λευκή διαδικασία**.

Η ποσότητα $(\gamma_0)^{0.5} = 13.77$ είναι η εκτίμηση του **μέσου μεγέθους σφαλμάτων του απλούστερου μοντέλου**, $X_t = \bar{x} + a_t$.

Εμείς αναζητούμε ένα μοντέλο με μέσο μέγεθος σφαλμάτων < 13.77 .

6

Γ) Επιλογή μοντέλου και εκτίμηση παραμέτρων

Πρώτα κάνουμε **αναγνώριση** του μοντέλου (AR, MA, ή ARMA) που ταιριάζει στα δεδομένα και ακολουθεί η εκτίμηση των παραμέτρων του. Ξεκινάμε όμως με την εκτίμηση του AR γιατί εκεί εισάγεται η έννοια της **μερικής αυτοσυσχέτισης** που χρησιμοποιείται στην αναγνώριση.

Εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου AR

Για ορισμένο p: $Y_t = \phi_{p1}Y_{t-1} + \dots + \phi_{pp}Y_{t-p} + a_t$ με $\mu_Y = 0$, όπου $\phi_{pk} = \phi_k$.

Πολ/ζουμε κατά μέλη με Y_{t-k} : $Y_t Y_{t-k} = \phi_{p1}Y_{t-1}Y_{t-k} + \dots + \phi_{pp}Y_{t-p}Y_{t-k} + a_t Y_{t-k}$.

Παίρνουμε μέσες τιμές: $E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_{p1}E(Y_{t-1}Y_{t-k}) + \dots + \phi_{pp}E(Y_{t-p}Y_{t-k}) + E(a_t Y_{t-k})$.

Η $E(a_t Y_{t-k}) = E(a) \bar{Y} = 0$ (**Y3**: Y_{t-k} και μελλοντικά a_t).

Γράφουμε κατά σύμβαση $E(Y_{t-m}Y_{t-k}) = \gamma_{|m-k|}$ γιατί ισχύει $\gamma_{m-k} = \gamma_{k-m}$.

Προκύπτουν $\gamma_k = \phi_{p1}\gamma_{k-1} + \dots + \phi_{pk}\gamma_0 + \dots + \phi_{pp}\gamma_{p-k} + a_t Y_{t-k}$ για $k=1, \dots, p$.

Διαιρούμε με γ_0 ώστε $\rho_i = \gamma_i / \gamma_0$ και έχουμε τις εξισώσεις **Yule-Walker (Y-W)**:

Προσδιορισμός p: Ξεκινάμε με $p=1$.

Λύνουμε τις εξ. Y-W. Αν η **μερική αυτοσυσχέτιση ϕ_{pp}** (τελευταίος συντελεστής) είναι $|\phi_{pp}| \leq 2/n^{0.5}$ τότε σταματάμε και δηλώνουμε **AR(p-1)**.

Αλλιώς αυξάνουμε σε $p+1$, λύνουμε το

νέο σύστημα εξ. Y-W, κ.ο.κ.

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{p1} \\ \phi_{p2} \\ \vdots \\ \phi_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

Άλλος τρόπος: Γραμμική παλινδρόμηση!

7

Παράδειγμα εύρεσης της τάξης p του μοντέλου AR

Από 299 δεδομένα προέκυψαν οι παρακάτω δειγματικές ροπές:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\gamma}_k$	2466.2	1941.9	1390.3	935.0	583.2	460.8	444.2	542.9	576.7	475.8	270.9
$\hat{\rho}_k$	1	0.787	0.563	0.379	0.237	0.187	0.180	0.220	0.234	0.193	0.110

Έχουμε $2/299^{0.5} = 0.116$. Δοκιμάζουμε διάφορα p στις εξισώσεις Y-W:

$p=1$: $\rho_1 = \phi_{11}\rho_0 = \phi_{11} \Rightarrow |\phi_{11}| = 0.787 > 0.116$ και συνεχίζουμε.

$p=2$: $\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.787 \\ 0.787 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.787 \\ 0.563 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.627 & -2.068 \\ -2.068 & 2.627 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.787 \\ 0.563 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.901 \\ -0.145 \end{bmatrix} \Rightarrow |\phi_{22}| = 0.145 > 0.116$ συνεχίζουμε.

$p=3$: $\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.787 & 0.564 \\ 0.787 & 1 & 0.787 \\ 0.564 & 0.787 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.787 \\ 0.564 \\ 0.379 \end{bmatrix}$
 $\Rightarrow \begin{bmatrix} \phi_{31} \\ \phi_{32} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.684 & -2.420 & 0.390 \\ -2.420 & 4.808 & -2.420 \\ 0.390 & -2.420 & 2.684 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.787 \\ 0.564 \\ 0.379 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.896 \\ -0.109 \\ -0.040 \end{bmatrix} \Rightarrow |\phi_{33}| = 0.040 < 0.116$
και σταματάμε.

Κατάλληλη τάξη του μοντέλου AR είναι $p=2$: $Y_t = 0.901Y_{t-1} - 0.145Y_{t-2} + a_t$.

Προβλέψεις: $\hat{Y}_{11} = 0.901Y_{10} - 0.145Y_9 + 0$, $\hat{Y}_{12} = 0.901\hat{Y}_{11} - 0.145Y_{10} + 0$, ...

Έλεγχοι: • Αν άλλο ARMA είναι πιο κατάλληλο • Αν a_t = λευκός θόρυβος

8

Αναγνώριση (identification) του κατάλληλου μοντέλου

- AR: Η **μερική αυτοσυσχέτιση** ϕ_{kk} "κόβεται απότομα", μηδενίζεται δηλαδή από κάποια τιμή $k=p+1$ και μετά όταν έχουμε παρατηρήσεις $n=\infty$. Αλλά και για μεγάλο n (>50), γίνεται $|\phi_{kk}| < \pm 2/n^{0.5}$ για κάθε $k > p$.
- MA: Από κάποια τιμή $k=q+1$ και μετά η **αυτοσυσχέτιση** ρ_k μηδενίζεται ή εισέρχεται μόνιμα στη ζώνη $\pm 2/n^{0.5}$. **Απόδειξη:** $\gamma_{q+m} = E(Y_t Y_{t+q+m}) = E[(a_t \dots - \theta_q a_{t-q})(a_{t+q+m} \dots - \theta_q a_{t+q+m-q})] = \sum \theta_i \theta_j E(a_{t-i} a_{t+j}) = 0$ αφού a_t = λευκός θόρυβος.
- ARMA: Η αυτοσυσχέτιση και η μερική αυτοσυσχέτιση παρουσιάζουν γεωμετρική μείωση ή αποσβεννύμενη ταλάντωση καθώς το k αυξάνει. Η διερεύνηση είναι δύσκολο πρόβλημα και δεν θα μας απασχολήσει.

Εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου MA

Δίνονται οι εκτιμήσεις των $\gamma_k = E(Y_t Y_{t-k})$ και $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$, για $k=1, 2, \dots$

MA(1): $Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$. Όμοια $Y_{t-1} = a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2}$. Πολ/ζουμε κατά μέλη και $E(\cdot)$:

$$E(Y_t Y_t) = E(a_t^2) + \theta_1^2 E(a_{t-1}^2) - 2\theta_1 E(a_t a_{t-1}) \Rightarrow \gamma_0 = \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2$$

$$E(Y_t Y_{t-1}) = E(a_t a_{t-1}) - \theta_1 E(a_t a_{t-2}) - \theta_1 E(a_{t-1}^2) + \theta_1^2 E(a_{t-1} a_{t-2}) \Rightarrow \gamma_1 = -\theta_1 \sigma_a^2.$$

Διαιρώντας κατά μέλη:

$$\rho_1 = -\theta_1 / (1 + \theta_1^2) \Rightarrow \rho_1 \theta_1^2 + \theta_1 + \rho_1 = 0. \text{ Τριώνυμο με ρίζες } [-1 \pm (1 - 4\rho_1^2)]/2.$$

Επομένως, αν οι ρίζες είναι πραγματικές, στα ρ_k αντιστοιχούν 2 μοντέλα.

MA(q) μεγαλύτερης τάξης: Με χειρισμό ανάλογο του MA(1) ευρίσκονται $q+1$ μη γραμμικές εξισώσεις για τους q συντελεστές θ_k και το σ_a^2 .

9

Εκτίμηση παραμέτρων του μοντέλου ARMA

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t$$
$$Y_{t-k} = \phi_1 Y_{t-k-1} + \dots + \phi_p Y_{t-k-p} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q} + a_{t-k} \text{ για } k=q+1, \dots, q+p$$

Πολ/ζουμε κάθε Y_{t-k} με την πρώτη, Y_t , και παίρνοντας $E(\cdot)$ προκύπτει

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} = \phi_1 \gamma_{|k-1|} + \dots + \phi_p \gamma_{|k-p|}, k > q$$

οι όροι $E(a_t Y_{t-k}) \dots E(a_{t-q} Y_{t-k})$ είναι 0 αφού το $t-k$ αντιστοιχεί σε προηγούμενο χρόνο από τους $t, t-1, \dots, t-q$ (πήραμε $k > q$).

Τελικά, οι συντελεστές AR εκτιμώνται από εξισώσεις Yule-Walker. Για τους συντελεστές MA πρέπει να λύσουμε μη γραμμικές εξισώσεις.

Άλλος τρόπος: Ισοδύναμο AR

Είδαμε ότι $ARMA(p,q): \Phi_p(B)Y_t = \Theta_q(B)a_t \Leftrightarrow AR: \Psi(B)Y_t = a_t$ όπου $\Psi(B) = \Phi_p(B)/\Theta_q(B)$ είναι πολυώνυμο $1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots$ με **άπειρους όρους**.

Παίρνουμε τους πρώτους v όρους και προκύπτουν:

$$\Psi_v(B) = 1 + \psi_1 B + \dots + \psi_v B^v \text{ και η προσέγγιση } Y_t \approx -\psi_1 Y_{t-1} - \dots - \psi_v Y_{t-v} + a_t$$

Μοντέλο αποδεκτό αν $Y_t = \text{αμετάβλητη}$. Πρέπει ρίζες της $\Psi_v(\lambda) = 0: |\lambda| > 1$.

Εκτίμηση: Υπολογίζουμε τα $-\psi_k (= \phi_k)$ από εξ. Y-W για $v=1,2,\dots$ Σε κάθε v αντιστοιχεί ένα ξεχωριστό σύστημα εξ. Y-W που δίνει **διαφορετική τιμή** για το ψ_k . Επιλέγεται **το μικρότερο v** για το οποίο $|\psi_{kk}| \leq 2/n^{0.5}$ για $k > v$.

Προβλέψεις τη στιγμή t : $\hat{y}_{t+1} = -\psi_1 y_t - \dots - \psi_v y_{t-v+1}$, $\hat{y}_{t+2} = -\psi_1 \hat{y}_{t+1} - \dots - \psi_v y_{t-v+2}$, ...

Τέλος, τη στιγμή t η εκτίμηση για το a_t είναι: $\hat{a}_t = y_t + \psi_1 y_{t-1} + \dots + \psi_v y_{t-v}$