

Στοιχεία Μηχανών

Διάλεξη 7

Μετωπικοί Οδοντωτοί Τροχοί

Παναγιώτης Αλευράς
(palevras@tuc.gr)

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

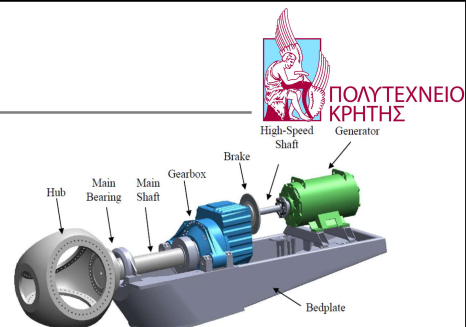
1

1

Γρανάζια

Χρησιμοποιούνται παντού, από ρολόγια
χειρός έως ανεμογεννήτριες

Ακρίβεια στην μεταφορά ισχύος και
κίνησης μεταξύ αξόνων



50 τόνοι μεταφέρουν 5 MW ισχύος και ροπή 4000 kNm!

Αυξάνουν ταχύτητα περιστροφής 50 έως 100 φορές

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

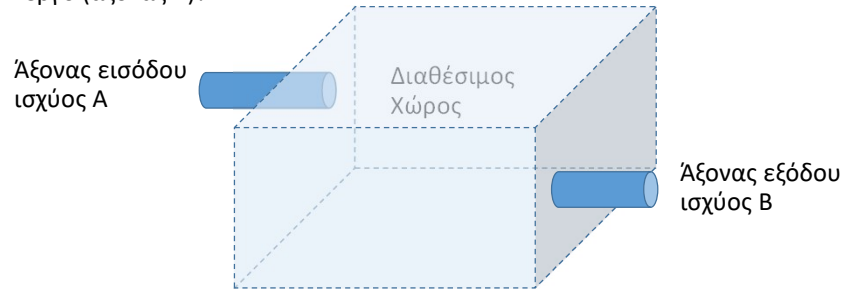
2

2

Βασικό ζητούμενο σχεδιασμού



Πώς θα μεταφερθεί η απαιτούμενη ισχύς από την παροχή (άξονας Α) στο έργο (άξονας Β)?



Ποιος πρέπει να είναι ο λόγος των στροφών εισόδου-εξόδου (σχέση μετάδοσης)? Τι ροπή πρέπει να μεταφερθεί?

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΡΟΧΩΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΤΡΟΧΩΝ

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

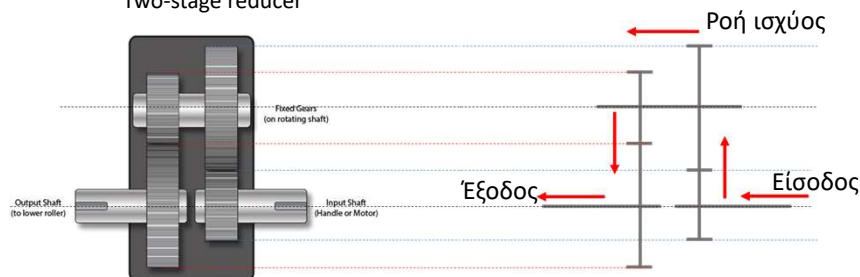
3

3

Βαθμίδες



Two-stage reducer



Σε ένα μειωτήρα στροφών κάθε ζεύγος τροχών ονομάζεται βαθμίδα (stage). Μπορεί να έχουμε 1, 2 ή και 3 βαθμίδες, ανάλογα με την επιθυμητή σχέση μετάδοσης και τους περιορισμούς σχεδιασμού (πχ διαθέσιμος χώρος).

Βασικό στοιχείο είναι η αναγνώριση της ροής ισχύος. Κάθε βαθμίδα μειώνει (αυξάνει) τις στροφές n και αυξάνει (μειώνει) την ροπή T . Η ισχύς $N = T * 2\pi n / 60$ μένει σταθερή αν αγνοήσουμε απώλειες στα ρουλεμάν και στην επαφή των τροχών.

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

4

4

Γεωμετρία οδοντώσεων



ΚΡΙΣΙΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

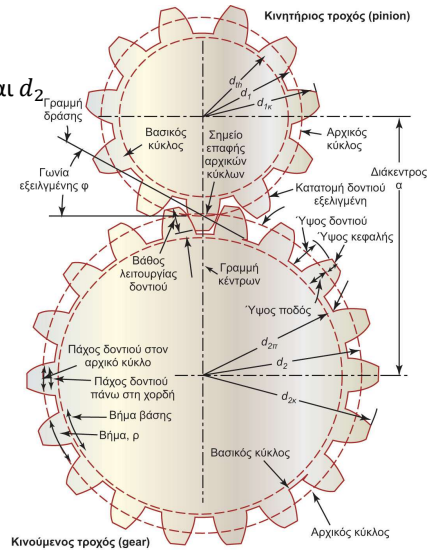
- Διάμετρος αρχικού κύκλου d_1 και d_2
- Διάκεντρος $a = (d_1 + d_2)/2$
- Αριθμός οδόντων N_1 και N_2
- Βήμα οδόντωσης p

$$pN_1 = \pi d_1 \quad \text{και} \quad pN_2 = \pi d_2$$

- **Module m**

$$m = \frac{p}{\pi} = \frac{d_1}{N_1} = \frac{d_2}{N_2}$$

Δύο συνεργαζόμενοι τροχοί έχουν το ίδιο module



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

5

5

Module m



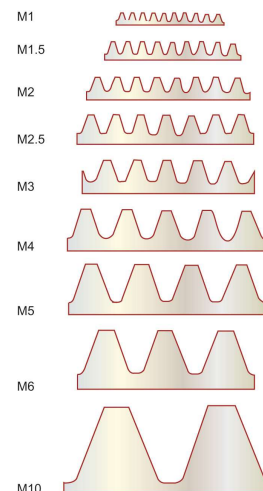
Τυποποιημένες τιμές module, mm											
Σειρά 1	Σειρά 2	Σειρά 3	Σειρά 1	Σειρά 2	Σειρά 3	Σειρά 1	Σειρά 2	Σειρά 3	Σειρά 1	Σειρά 2	Σειρά 3
0.1		1.25				8	7		50		
0.2	0.15	1.5				9			60	55	
0.3	0.25	2				10					65
0.4	0.35	2.5		2.25		11			70	75	
0.5		3		2.75		12	14		80	85	
0.6	0.45	3.25				16			90		
0.7	0.55	3.5				20	18		95		
0.8		3.75				22			100		
0.9	0.65	4				25	22				
1	0.7	4.5				28					
	0.75	5				32					
	0.8	5.5				36					
	0.9	6				40					
		6.5				45					

Η επιλογή του module γίνεται κατά προτεραιότητα από την σειρά 1, μετά από την σειρά 2 και τελευταία από την σειρά 3.

$$d_i = mN_i \quad a = m(N_1 + N_2)/2$$

Το module είναι τυποποιημένο και ο αριθμός δοντιών N ακέραιος, άρα
Η διάμετρος του τροχού και η διάκεντρος ενός ζεύγους είναι **διακριτά**, δηλ. μπορούν να πάρουν συγκεκριμένες τιμές.

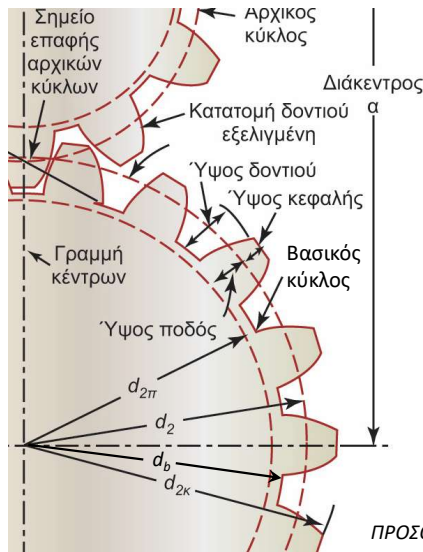
Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7



6

6

Λοιπά γεωμετρικά μεγέθη



$$\text{Ύψος κεφαλής } h_k = \frac{d_k - d}{2} = m$$

$$\text{Ύψος ποδός } h_\pi = \frac{d - d_\pi}{2} = 1.25m$$

$$\text{Χάρη } c = a - \frac{d_{1k} + d_{2\pi}}{2} = 0.25m$$

Διάμετροι: Αρχικού κύκλου d
 Κύκλου κεφαλής d_k
 Κύκλου ποδός (ρίζας) d_π
Βασικού κύκλου d_b

βιβλίο

ΠΡΟΣΟΧΗ! στο βιβλίο υπάρχει σύγχυση μεταξύ d_π και d_b

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

7

7

Βασικός κανόνας οδόντωσης



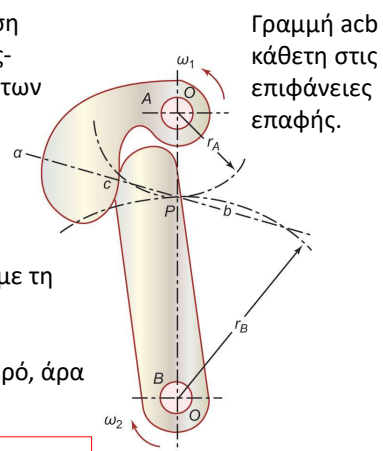
Γενικά, για μία τυχαία θέση κατά τη μετάδοση κίνησης από τυχαίο έκκεντρο σώμα 1 (κάμας-cam) σε ένα άλλο 2 όπου το σημείο επαφής των σωμάτων είναι το c ισχύει ότι:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(BP)}{(AP)} = i \quad (\text{Σχέση μετάδοσης})$$

Το P είναι το σημείο τομής της γραμμής acb με τη διάκεντρο.

Στις εφαρμογές, θέλουμε το i να είναι σταθερό, άρα πρέπει το σημείο P να είναι σταθερό:

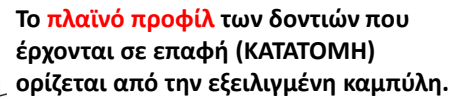
$$\text{Τότε: } i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_B}{r_A} = \frac{d_2}{d_1} = N_2/N_1$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

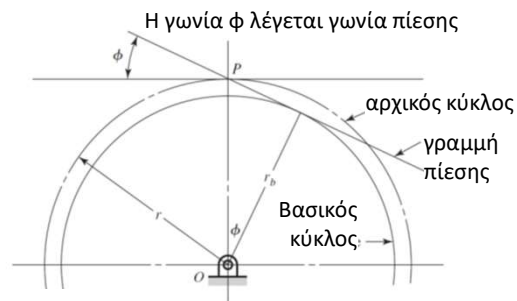
8

8



Ξετυλίγω, ώστε $(eb) = (\text{τόξο } ea)$.
Αυξάνοντας την γωνία θ , σχηματίζω την
καμπύλη της εξειλιγμένης.

!



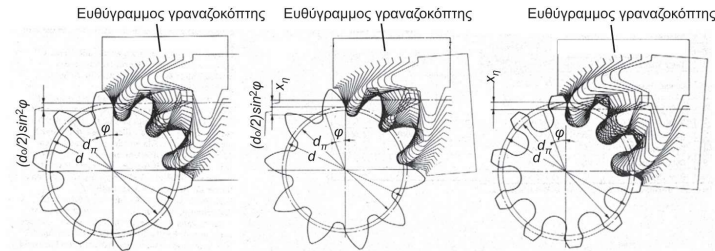
Το δοντι του O2 ορίζεται από την fg για $> d_{b2}$

$$\varphi = 20^\circ (14.5^\circ, 25^\circ)$$

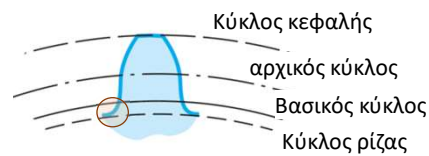
10

5

ΥΠΟΚΟΠΕΣ



Η κατατομή του δοντιού εσωτερικά του βασικού κύκλου ($r < r_b$) και μέχρι τη ρίζα του δοντιού δεν καθορίζεται από την εξελιγμένη. (Περιοχή υποκοπής)



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

11

11

ΥΠΟΚΟΠΕΣ



Στη περιοχή υποκοπών, θα υπήρχε επικάλυψη των συνεργαζόμενων δοντιών αλλά πραγματοποιούνται υποκοπές για την αποφυγή τους. Μεγάλο εύρος υποκοπών οδηγεί σε μείωση της αντοχής του δοντιού. Δεν θέλουμε να υπάρχει επαφή σε αυτή τη περιοχή για να έχουμε ομαλή μετάδοση

- Αριθμός δοντιών για αποφυγή υποκοπών

$$N \geq \frac{2}{\sin^2 \varphi} = 17 \text{ (για } \varphi = 20^\circ \text{)}$$

Για σύστημα πινιόν-κανόνα (δες μετά)

- Θετική μετατόπιση $x * m$

$$N \geq \frac{2(1-x)}{\sin^2 \varphi} \quad \text{Ελάχιστο } N \text{ για δεδομένη } x \quad x \geq 1 - \frac{N}{2} \sin \varphi \quad \text{Ελάχιστο } x \text{ για δεδομένο } N$$

- Αριθμός δοντιών για αποφυγή υποκοπών σε ζεύγος τροχών με module m

$$N_p \geq \frac{2}{(1+2m) \sin^2 \varphi} (m + \sqrt{m^2 + (1+2m) \sin^2 \varphi})$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

12

12

ΥΠΟΚΟΠΕΣ



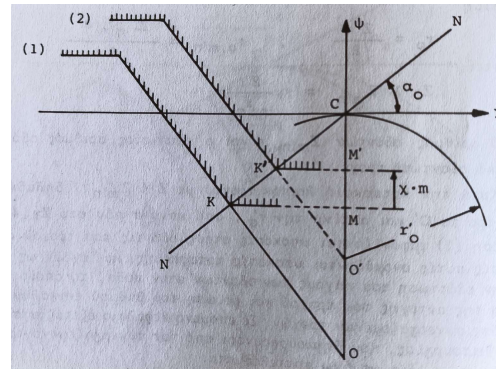
- Κατασκευή πινιόν από κανόνα

Ο κανόνας μετατοπίζεται κατά $x \cdot m$ για την αποφυγή υποκοπών

- Μεγέθη του πινιόν που δεν αλλάζουν από την μετατόπιση
module, d , d_b

- Μεγέθη του πινιόν που αλλάζουν από την μετατόπιση

$$\begin{aligned} h_k &= m + xm \\ h_\pi &= m - xm \\ a &= (d_1 + d_2)/2 + xm \end{aligned}$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

13

13

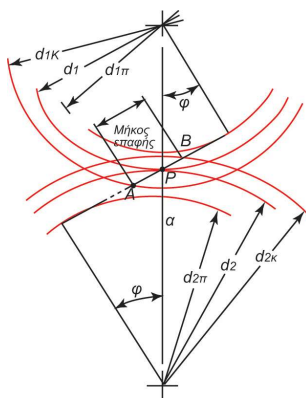
Λόγος Επαφής



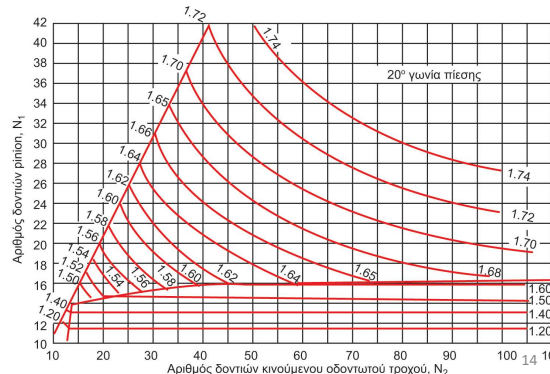
$$m_c = \frac{1}{2\pi \cos \varphi} \left[\sqrt{(N_2 + 2)^2 - N_2^2 \cos^2 \varphi} + \sqrt{(N_1 + 2)^2 - N_1^2 \cos^2 \varphi} - (N_1 + N_2) \sin \varphi \right]$$

Δίνει τον μέσο αριθμό δοντιών που βρίσκονται σε επαφή

Για ομαλή λειτουργία θέλουμε $m_c > 1.3$ (1.5)



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7



14

Εσωτερική οδόντωση



Οι σχέσεις αυτές με + ισχύουν για ζεύγος με εξωτερική οδόντωση

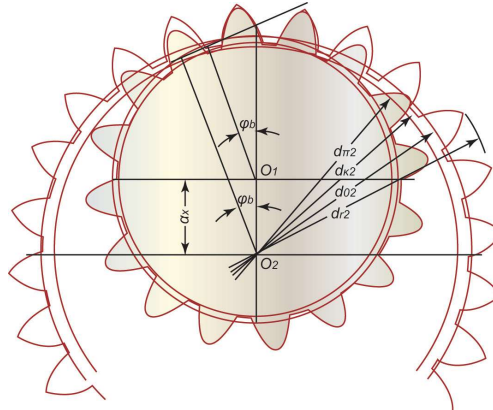
Διάκεντρος

$$a_x = \frac{d_{o2} - d_{o1}}{2}$$

Αρχικοί κύκλοι

$$d_{o1} = \frac{2\alpha_x N_1}{N_2 - N_1} \quad \text{πινιόν}$$

$$d_{o2} = \frac{2\alpha_x N_2}{N_2 - N_1} \quad \text{τροχός}$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

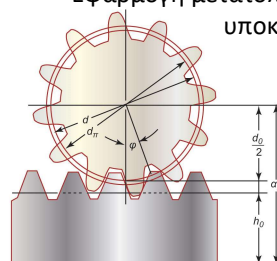
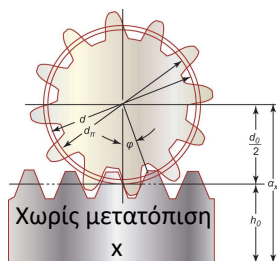
15

15

Πινιόν-κανόνας (rack and pinion)



Εφαρμογή μετατόπισης x για αποφυγή υποκοπών

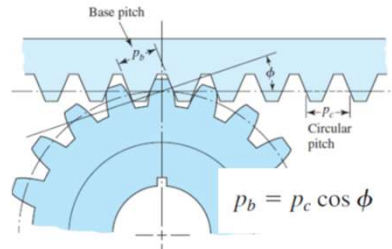


Κανόνας. Ευθύγραμμα σώμα με οδόντωση, άπειρη θεωρητική ακτίνα και άπειρος αριθμός δοντιών. Προφίλ δοντιών ευθύγραμμο.

Μετατροπή περιστροφικής σε γραμμική κίνηση και αντίθετα.

Για μία πλήρη περιστροφή του πινιόν, ο κανόνας μετατοπίζεται κατά

$$L = \pi d_o = \pi m N$$



16

16

Παράδειγμα γεωμετρίας



Παράδειγμα γεωμετρίας κανόνα-πινιόν

No	Στοιχείο	Σύμβολο	Σχέση	Παράδειγμα	
				μετασπικός τροχός	κανόνας
1	module	m		3	
2	Γωνία εξειλιγμένης	φ		20	
3	Αριθμός δοντιών	N_1		12	
4	Συντελεστής μετατόπισης	x_m		0.60	
5	Ύψος αρχικής γραμμής κανόνα	h_0		--	32.000
6	Γωνία δράσης λειτουργίας	φ_b		20	
7	Διάκεντρος	a_x	$a_x = N_1 m / 2 + h_0 + x_m$	51.800	
8	Αρχική διάμετρος	d_0	$d_0 = N_1 m$	36.000	
9	Διάμετρος ποδός	d_π	$d_\pi = d_0 \cos \varphi$	33.829	
10	Αρχική διάμετρος λειτουργίας	d_b	$d_b = d_\pi / \cos \varphi_b$	36.000	
11	Ύψος κεφαλής	h_k	$h_k = (1 + x) m$	4.800	3.000
12	Ολικό ύψος	h	$h = 2.25 m$	6.750	
13	Εξωτερική διάμετρος	d_k	$d_k = d_0 + 2h_k$	45.600	
14	Διάμετρος ρίζας	d_r	$d_r = d_k - 2h$	32.100	

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

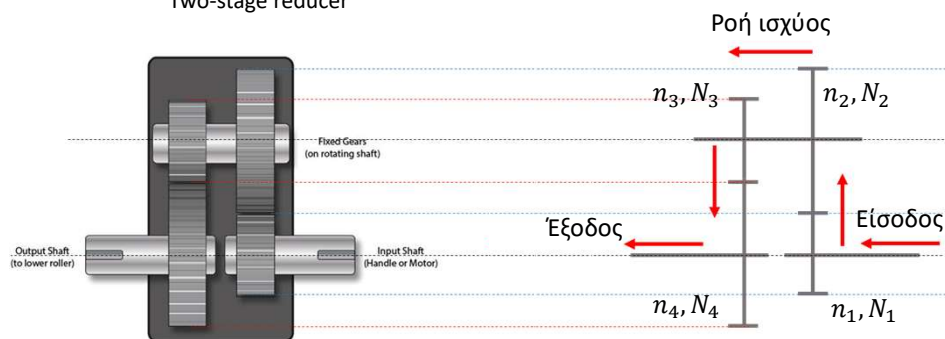
17

17

Geartrains



Two-stage reducer



$$i_{1,4} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{n_1}{n_{23}} \frac{n_{23}}{n_4}$$

$$i_{1,4} = \frac{N_2 N_4}{N_1 N_3}$$

Οι τροχοί στον παράλληλο άξονα (2,3) περιστρέφονται με την ίδια ταχύτητα $n_2 = n_3 = n_{23}$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

18

18

Πλανητικά συστήματα

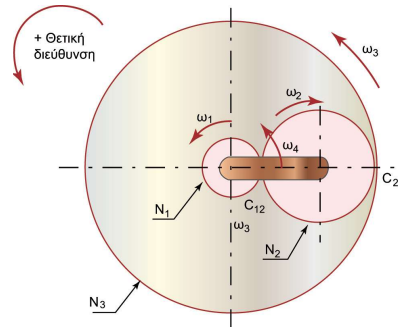


Ηλιος (1) με εξωτερική οδόντωση και σταθερό κέντρο περιστροφής,

Πλανήτης (2) με εξωτερική οδόντωση και ελεύθερο κέντρο περιστροφής,

Εξωτερικός τροχός – **ring (3)** με εσωτερική οδόντωση (3)

Βραχίονας (4) που συγκρατεί τον πλανήτη γύρω από τον ήλιο



$$n_1 N_1 = n_2 N_2 + n_4 (N_1 + N_2)$$

$$n_3 N_3 = n_4 (N_1 + N_2) - n_2 N_2$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

19

19

Πλανητικά συστήματα



- Υποπερίπτωση ακίνητου ring (3) – Είσοδος 1, Έξοδος 4

$$i_{1,4} = \frac{n_1}{n_4}$$

$$\begin{aligned} n_1 N_1 &= n_2 N_2 + n_4 (N_1 + N_2) \\ 0 &= n_4 (N_1 + N_2) - n_2 N_2 \end{aligned}$$

$$n_1 N_1 = 2n_4 (N_1 + N_2)$$

$$i_{1,4} = \frac{n_1}{n_4} = 2 \left(1 + \frac{N_2}{N_1} \right)$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 7

20

20

Ερωτήσεις?