

Στοιχεία Μηχανών

Διάλεξη 3

Ανάλυση Τάσεων-Παραμορφώσεων Κριτήρια Στατικής Αστοχίας

Παναγιώτης Αλευράς
(palevras@tuc.gr)

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

1

1

Περίγραμμα Διάλεξης

- Κύριες τάσεις, ελαστική παραμόρφωση
- Κάμψη, διάτμηση και στρέψη δοκών
- Κριτήρια αστοχίας σε στατική αντοχή
 - Μέγιστη Διατμητική Τάση
 - Θεωρία Έργου Παραμόρφωσης
 - Μέγιστη Ορθή Τάση
 - Coulomb-Mohr

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

2

2

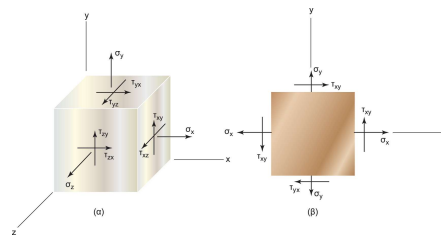
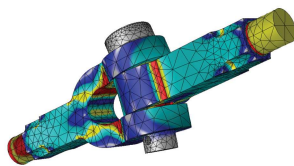
Ανάλυση Τάσεων Παραμορφώσεων

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

3

3

Εντατική Κατάσταση



Πως μπορούμε να βρούμε την διατομή που θα αστοχήσει? Ονομάζεται επικίνδυνη διατομή και συνήθως

- Βρίσκεται σε γεωμετρικές μεταβολές, πχ αλλαγή διαμέτρου άξονα
- Είναι μία διατομή που δέχεται το μεγαλύτερο φορτίο
- Παρουσιάζει αύξηση των τάσεων πχ εγκοπή, σφήνα κτλ.

Οι ορθές τάσεις $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ και οι διατμητικές $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ περιγράφουν την εντάτική κατάσταση των σωμάτων.

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

4

4

Κύριες τάσεις – 2D



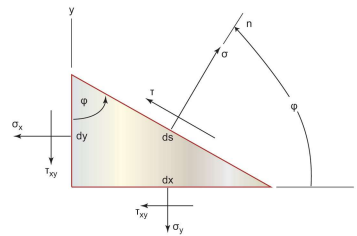
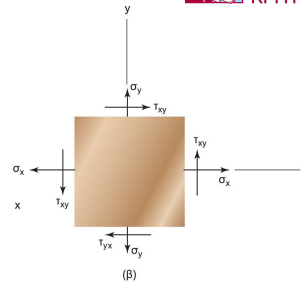
- $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$
- Εάν κάνουμε μία τομή στη διατομή υπό τυχαία γωνία ϕ

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi$$

- Μέγιστες ορθές τάσεις (κύριες τάσεις)

- $\tau = 0$
- $\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

5

5

Μέγιστες διατμητικές τάσεις



- Αντίστοιχα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες σχέσεις για να βρούμε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi$$

- Μέγιστες διατμητικές τάσεις

- $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$
- $\tau_1, \tau_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

6

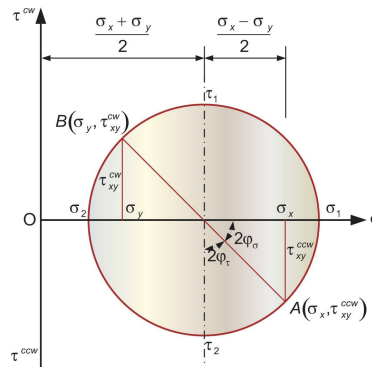
6

Κύκλος του Mohr



- Σημειώνουμε το σημείο A (σ_x, τ_{xy}) και το σημείο B (σ_y, τ_{xy}) και σχεδιάζουμε κύκλο με διάμετρο AB
- Οι μέγιστες ορθές δίνονται από τις τομές με τον άξονα σ , και οι μέγιστες διατμητικές τάσεις από το μέγιστο και το ελάχιστο του κύκλου
- Έτσι, προκύπτει ο κύκλος του Mohr
- Οι κύριες τάσεις και οι μέγιστες διατμητικές χρησιμοποιούνται στα κριτήρια αστοχίας

Ωρολογιακές
διατμητικές
στα (+)



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

7

7

Νόμος του Hooke



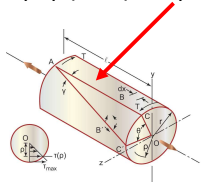
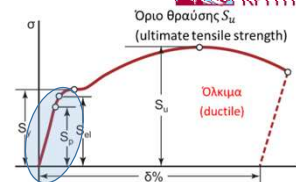
- Περιοχή ελαστικής παραμόρφωσης

$$\sigma = E\varepsilon, \tau = G\gamma$$

όπου

-E,G το μέτρο ελαστικότητας και διάτμησης

- $\varepsilon = \delta/l$ η αξονική παραμόρφωση και γ η γωνιακή.



- Σχέση E και G

$$E = 2G(1 + \nu)$$

Όπου ν ο λόγος Poisson.

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

	ΚΥΡΙΕΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ	ΚΥΡΙΕΣ ΤΑΣΕΙΣ
Μονοαξονική	$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$	$\sigma_1 = E\varepsilon_1$
	$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_1$	$\sigma_2 = 0$
	$\varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1$	$\sigma_3 = 0$
Διαξονική	$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2)$	$\sigma_1 = \frac{E\varepsilon_1(1+\nu\varepsilon_2)}{1-\nu^2}$
	$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1)$	$\sigma_2 = \frac{E\varepsilon_2(1+\nu\varepsilon_1)}{1-\nu^2}$
	$\varepsilon_3 = \frac{\nu}{E}(\sigma_1 - \sigma_2)$	$\sigma_3 = 0$
Τριαξονική	$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3)$	$\sigma_1 = \frac{E\varepsilon_1(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
	$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3)$	$\sigma_2 = \frac{E\varepsilon_2(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
	$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_2)$	$\sigma_3 = \frac{E\varepsilon_3(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

8

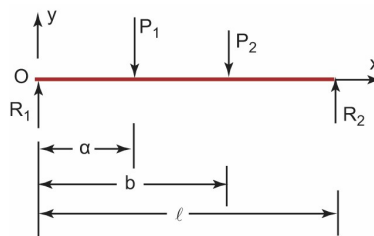
Διαγράμματα N,V,M



- Προσδιορισμός Αξονικών, Διατμητικών και Καμπτικών Ροπών σε Στοιχεία Μηχανών υπό φόρτιση
- Συμπληρώνονται από το διάγραμμα στρεπτικών ροπών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Η δοκός στηρίζεται με τις αντιδράσεις R_1 και R_2 ενώ δέχεται τα φορτία P_1 και P_2 . Υπολογίστε και σχεδιάστε τα διαγράμματα διατμητικής δύναμης (Q) και στρεπτικών ροπών.

$P_1=250 \text{ N}$, $P_2=450 \text{ N}$, $a=0.15\text{m}$, $b=0.35\text{m}$, $l=0.65\text{m}$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

9

9

Διαγράμματα N,V,M

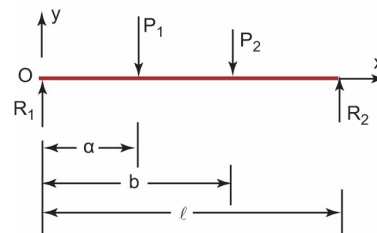


1. Ισορροπία για τις αντιδράσεις R_1 , R_2 .

$$P_1 + P_2 - R_1 - R_2 = 0 \quad \text{κατά } y$$

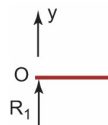
$$P_1 a + P_2 b - R_2 l = 0 \quad \text{ροπές ως προς O}$$

$$R_1 = 400 \text{ N}, R_2 = 300 \text{ N}$$



2. Εφαρμόζουμε τομές από αριστερά.

$$\bullet \quad 0 \leq x < a$$



$$V(x) = R_1 = 400 \text{ N}$$

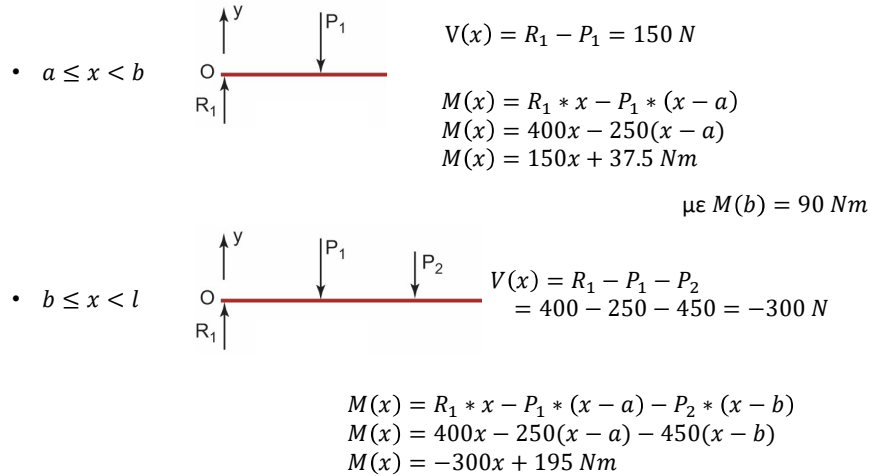
$$M(x) = R_1 * x = 400x \text{ Nm} \quad \text{με } M(a) = 60 \text{ Nm}$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

10

10

Διαγράμματα N,V,M



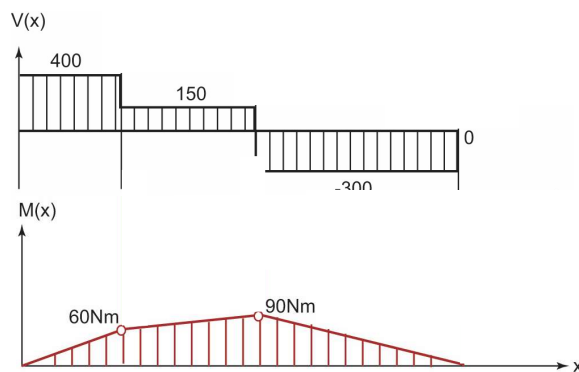
Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

με $M(l) = 0 \text{ Nm}$

11

11

Διαγράμματα N,V,M



- Τα διαγράμματα N , V , M_b (καμπτικές), M_t (στρεπτικές) είναι το πρώτο βήμα για τον προσδιορισμό της αντοχής
- Από αυτά υπολογίζουμε εσωτερικές τάσεις στα Στοιχεία Μηχανών και εφαρμόζουμε κριτήρια αστοχίας

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

12

12

Ιδιόμορφες συναρτήσεις για N,V,M



- Γενίκευση-αυτοματοποίηση της μεθόδου εύρεσης των N,Q,M

Ιδιόμορφη συνάρτηση $f_n(x) = \langle x - a \rangle^n$

ΚΑΝΟΝΕΣ

- $n > 0$ και $(x - a) > 0$ τότε $f_n = (x - a)^n$
- $n > 0$ και $(x - a) < 0$ τότε $f_n = 0$
- $n < 0$ τότε $f_n = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$
- $n = 0$ τότε $f_n = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$
- $n \geq 0$ τότε $\int_{-\infty}^x \langle x - a \rangle^n dx = \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1}$
- $n < 0$ τότε $\int_{-\infty}^x \langle x - a \rangle^n dx = \langle x - a \rangle^{n+1}$
- $n \geq 1$ τότε $\frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \langle x - a \rangle^{n-1}$

Είδος φόρτισης	Σχήμα της φόρτισης	Ιδιόμορφη συνάρτηση
Συγκεντρωμένη ροπή		$q(x) = M \langle x - a \rangle^{-2}$
Συγκεντρωμένη δύναμη		$q(x) = P \langle x - a \rangle^{-1}$
Συνεχές φορτίο		$q(x) = w_0 \langle x - a \rangle^0$
Γραμμικό αυξανόμενο φορτίο		$q(x) = \frac{w_0}{b} \langle x - a \rangle^1$
Γραμμικά μειούμενο φορτίο		$q(x) = w_0 \langle x - a \rangle^0 - \frac{w_0}{b} \langle x - a \rangle^1$
Παρεμβολικά αυξανόμενο φορτίο		$q(x) = \langle x - a \rangle^2$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

13

13

Παράδειγμα με Ιδιόμορφες



- Δεν εφαρμόζουμε τομές οπότε ελαχιστοποιούμε το κίνδυνο λάθους, όλα γίνονται σε ένα βήμα.

- Έχω 4 συγκεντρωμένες δυνάμεις.

Συγκεντρωμένη δύναμη		$q(x) = P \langle x - a \rangle^{-1}$
----------------------	--	---------------------------------------

- Υπολογίζω το $q(x)$

$$q(x) = R_1 \langle x - 0 \rangle^{-1} - P_1 \langle x - a \rangle^{-1} - P_2 \langle x - b \rangle^{-1} + R_2 \langle x - l \rangle^{-1}$$

- Ολοκληρώνω για να βρω τις διατμητικές δυνάμεις $Q(x) = V(x)$

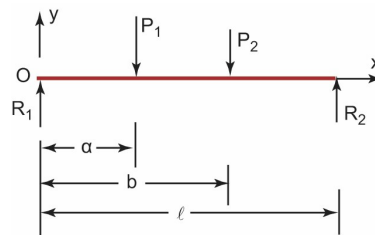
$$V(x) = \int_{-\infty}^x (R_1 \langle x - 0 \rangle^{-1} - P_1 \langle x - a \rangle^{-1} - P_2 \langle x - b \rangle^{-1} + R_2 \langle x - l \rangle^{-1}) dx$$

$$V(x) = R_1 \langle x \rangle^0 - P_1 \langle x - a \rangle^0 - P_2 \langle x - b \rangle^0 + R_2 \langle x - l \rangle^0$$

- Ολοκληρώνω ξανά για να βρω τις καμπτικές ροπές

$$M(x) = \int_{-\infty}^x V(x) dx = \int_{-\infty}^x (R_1 \langle x \rangle^0 - P_1 \langle x - a \rangle^0 - P_2 \langle x - b \rangle^0 + R_2 \langle x - l \rangle^0) dx$$

$$M(x) = R_1 \langle x \rangle^1 - P_1 \langle x - a \rangle^1 - P_2 \langle x - b \rangle^1 + R_2 \langle x - l \rangle^1$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

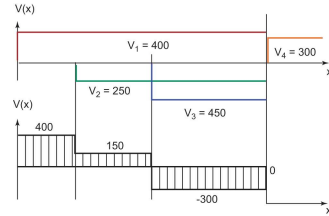
14

14

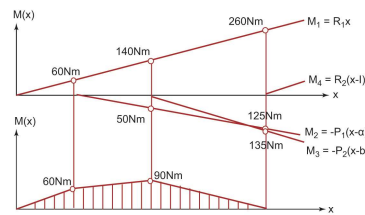
Παράδειγμα με Ιδιόμορφες



$$V(x) = R_1 \langle x \rangle^0 - P_1 \langle x - a \rangle^0 - P_2 \langle x - b \rangle^0 + R_2 \langle x - l \rangle^0$$



$$M(x) = R_1 \langle x \rangle^1 - P_1 \langle x - a \rangle^1 - P_2 \langle x - b \rangle^1 + R_2 \langle x - l \rangle^1$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

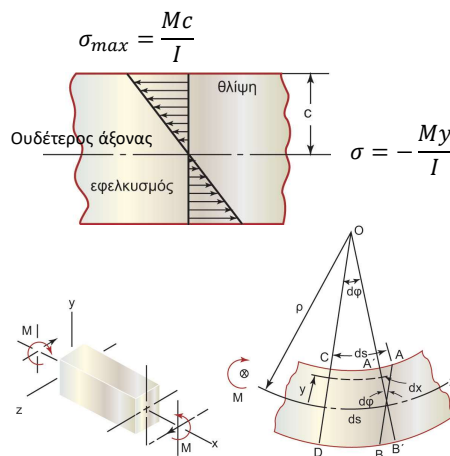
ΚΑΝΟΝΕΣ

1. $n > 0$ και $(x - a) > 0$ τότε $f_n = (x - a)^n$
2. $n > 0$ και $(x - a) < 0$ τότε $f_n = 0$
3. $n < 0$ τότε $f_n = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$
4. $n = 0$ τότε $f_n = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$
5. $n \geq 0$ τότε $\int_{-\infty}^x (x - a)^n dx = \frac{(x - a)^{n+1}}{n+1}$
6. $n < 0$ τότε $\int_{-\infty}^x (x - a)^n dx = (x - a)^{n+1}$
7. $n \geq 1$ τότε $\frac{d}{dx} (x - a)^n = n(x - a)^{n-1}$

15

15

Καμπτικές τάσεις δοκού



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

Ροπές αδράνειας επιφανειών, I

Shape	Area, A	Distances c_1 and c_2 to Outer Fibers	Moment of Inertia I About Centroidal Axis 1-1
1. Rectangle	bd	$c_1 = c_2 = \frac{d}{2}$	$\frac{bd^3}{12}$
2. Trapezoid	$\frac{(B + b)d}{2}$	$c_1 = \frac{b + 2B}{3(b + B)}d$ $c_2 = \frac{2b + B}{3(b + B)}d$	$\frac{(B^3 + 4bB + b^3)d^3}{36(b + B)}$
3. Triangle	$\frac{bd}{2}$	$c_1 = \frac{2d}{3}$ $c_2 = \frac{d}{3}$	$\frac{bd^3}{36}$
4. Solid circle	$\frac{\pi D^2}{4}$	$c = \frac{D}{2}$	$\frac{\pi D^4}{64}$
5. Hollow circle	$\frac{\pi(D_o^2 - D_i^2)}{4}$	$c = \frac{D_o}{2}$	$\frac{\pi(D_o^4 - D_i^4)}{64}$

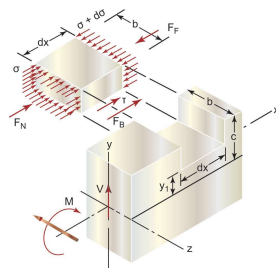
16

16

Συνδυασμός Κάμψης-Διάτμησης



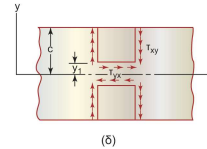
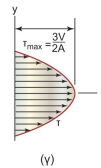
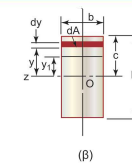
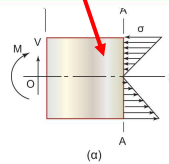
- Συνήθως έχουμε συνδυασμό κάμψης και διάτμησης
- Μεγιστοποιείται στον ουδέτερο άξονα, όπου οι καμπτικές και στρεπτικές τάσεις μηδενίζονται.



$$\tau = \frac{V}{2I}(c^2 - y_1^2)$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

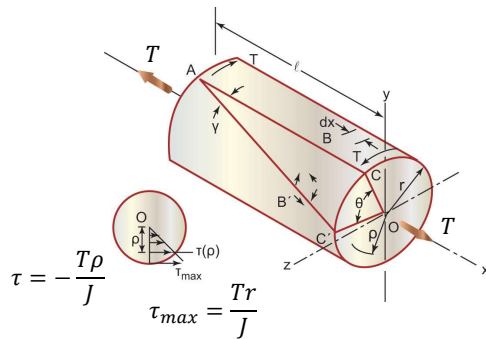
Beam Shape	Formula	Beam Shape	Formula
Rectangular	$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A}$ $\tau_{\text{max}} = \frac{3V}{2A}$	Hollow, thin-walled round	$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A}$ $\tau_{\text{max}} = \frac{2V}{A}$
Circular	$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A}$ $\tau_{\text{max}} = \frac{4V}{3A}$	Structural I beam (thin-walled)	$\tau_{\text{max}} = \frac{V}{A_{\text{web}}}$



17

17

Στρέψη Δοκού



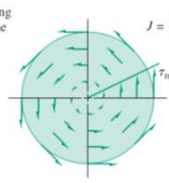
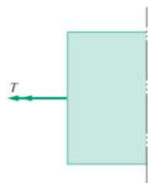
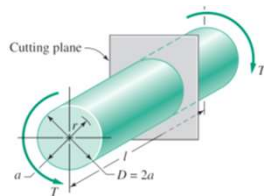
$$\tau = -\frac{T\rho}{J}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Tr}{J}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$J = \frac{\pi(D_o^4 - D_i^4)}{32}$$

$$\tau_{\text{max}} \approx \frac{T}{bc^2} \left(3 + \frac{1.8}{b/c} \right)$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

18

18

Κριτήρια Αστοχίας

Αντοχή σε Στατική Φόρτιση

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

19

19

Μέγιστη Διατμητική Τάση

- Γνωστό και ως κριτήριο Tresca
- Εφαρμόζεται σε ΟΛΚΙΜΑ υλικά, και θεωρεί την μέγιστη διατμητική τάση ως επαρκές κριτήριο σύγκρισης
- Σε μονοαξονική $\tau_{\max} = \sigma_1/2$

Έχουμε επαρκή αντοχή όταν
 $\sigma_1 \leq S_y$ άρα $\tau_{\max} \leq S_y/2$

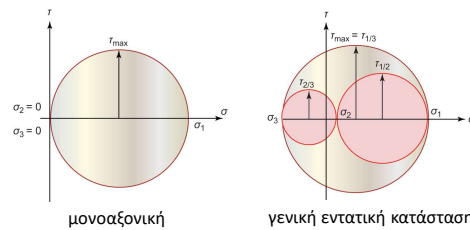
- Στην γενική εντατική κατάσταση οι κύριες τάσεις είναι

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

και

$$\tau_{\max} = \tau_{1/3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

άρα $\tau_{\max} \leq S_y/2$ ή $\sigma_1 - \sigma_3 \leq S_y$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

20

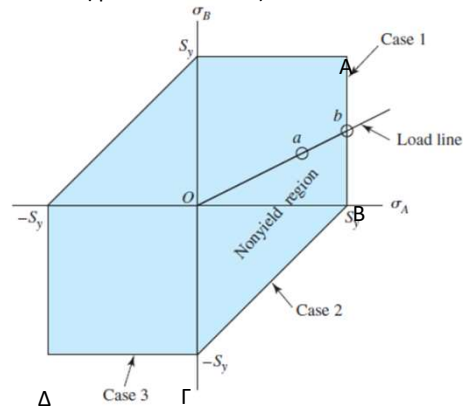
20

Μέγιστη Διατμητική Τάση



- Επίπεδη φόρτιση, δηλ μία κύρια τάση είναι ίση με 0 και οι άλλες δύο συμβολίζονται με σ_A και σ_B

- $\sigma_A > \sigma_B > 0$.
Δεξιά από το AB έχουμε αστοχία
($\sigma_A > S_y$)
- $\sigma_A > 0 > \sigma_B$.
Δεξιά από το ΒΓ έχουμε αστοχία
($\sigma_A - \sigma_B > S_y$)
- $0 > \sigma_A > \sigma_B$. Κάτω από το ΓΔ έχουμε αστοχία
($\sigma_B < -S_y$)



Έξω από το σκιαγραφημένο σχήμα έχουμε ΑΣΤΟΧΙΑ.

Συντελεστής ασφαλείας τυχαίας φόρτισης α

$$N = \frac{|b|}{|a|}$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

21

21

Μέγιστο Έργο Παραμόρφωσης



- Λέγεται και κριτήριο von Mises.
- Προβλέπει ότι το υλικό θα αστοχήσει σε διαρροή όταν η ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου ξεπεράσει την αντίστοιχη που παρατηρείται όταν το υλικό διαρρέει σε πείραμα εφελκυσμού.

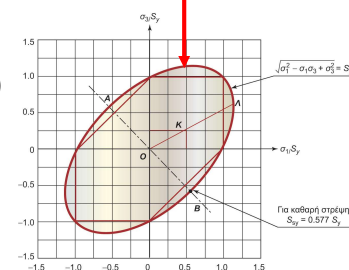
$$\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \geq S_y$$

ΑΣΤΟΧΙΑ έξω από την έλλειψη

Τάση von Mises

- Για επίπεδη φόρτιση (εάν μία κύρια τάση είναι 0)

$$\sigma' = (\sigma_A^2 - \sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2)^{1/2} \geq S_y$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

22

22

Μέγιστο Έργο Παραμόρφωσης



- Σε συντεταγμένες x, y, z

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2}$$

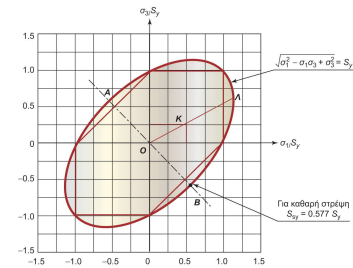
- Και στο επίπεδο

$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2}$$

- Για καθαρή διάτμηση $\sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\tau_{xy} = \frac{S_y}{\sqrt{3}} = 0.577 S_y$$

(το κριτήριο Tresca δίνει αστοχία στο 50% του S_y)



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

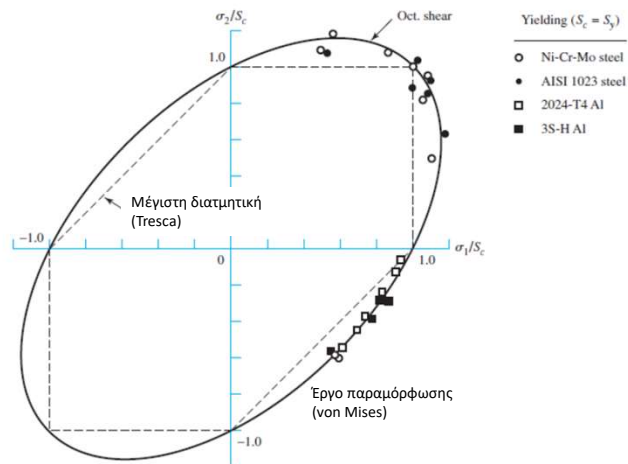
23

23

Σύγκριση Tresca-von Mises



- Το κριτήριο Tresca είναι πιο συντηρητικό από το von Mises.



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

24

24

- $$\max(\sigma_1, \sigma_3) \leq S_{ut} \text{ και } \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) \leq S_{uc}$$

Όριο θραύσης σε
θλίψη (compression)

-
- Θραύση σε Ψη (compression)
- Θραύση σε Τάση (tension)
- II
- I
- III
- IV
- O
- σ_1/S_{ut}
- $-S_{ut}$
- S_{ut}
- (σ_1, σ_3)
- $(-\sigma_1, -\sigma_3)$
- $(-\sigma_1, +\sigma_3)$
- σ_3/S_{ut}
- S_{ut}
- $-S_{ut}$
- $(\sigma_1, -\sigma_3)$
- Γραμμή φόρτισης
- Καθαρή διάτμηση
- Θεωρία Μείγνισης Ορθής Τάσης, $S_{uc} = S_{ut}$
- Θεωρία Μείγνισης Ορθής Τάσης, $S_{uc} > S_{ut}$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

Coulomb-Mohr

- $$\sigma_1 > 0 > \sigma_3 \text{ (Τεταρτημόριο IV)}$$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq 1$$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq \frac{1}{N}$$

- [illegible]

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

26

13

Coulomb-Mohr



- Τροποποίηση του κριτηρίου ορθής τάσης για διόρθωση των περιοχών II & IV

$\sigma_1 > 0 > \sigma_3$ (Τεταρτημόριο IV)

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq 1$$

ή με χρήση συντελεστή ασφαλείας N

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq \frac{1}{N}$$

Στο βιβλίο του Παπαδόπουλου ο τύπος αυτός είναι

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} + \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq \frac{1}{N}$$

Επισημαίνει ότι χρησιμοποιεί τις απόλυτες τιμές της τάσης!!!

- Έτσι στις περιοχές II & IV έχουμε τις γραμμές υπό κλίση που ορίζει η παραπάνω σχέση
- ΑΣΤΟΧΙΑ έχουμε έξω από τα όρια του σκιαγραφημένου πολυγώνου

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

27

27

Τροποποιημένη Coulomb-Mohr



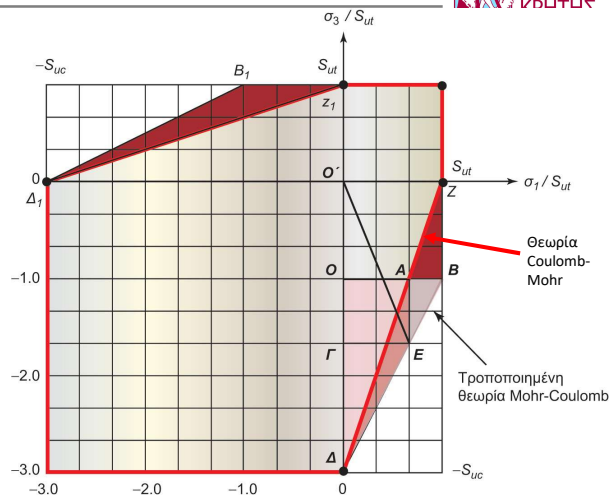
$\sigma_1 > 0 > \sigma_3$
Τεταρτημόριο IV

θετική αρνητική

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc} - S_{ut}} \leq \frac{\lambda}{N}$$

όπου

$$\lambda = \frac{S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}}$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

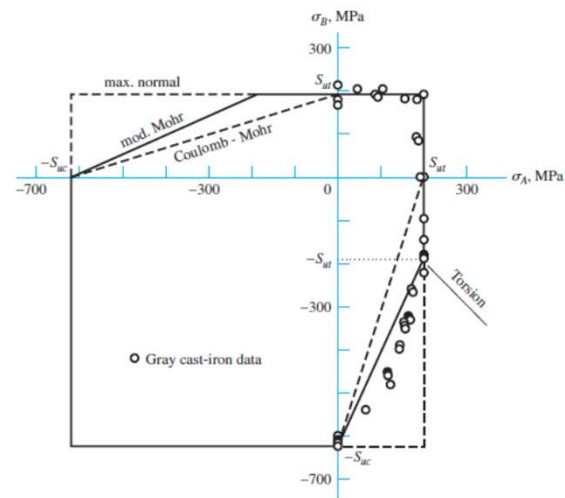
28

28

Δοκίμια σιδήρου



- Η τροποποίηση της Coulomb-Mohr υποστηρίζεται από πειραματικά δεδομένα



Στοιχεία Μηχανών -

29

29

Ερωτήσεις?



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

30

30

Στοιχεία Μηχανών

Ασκήσεις

Ανάλυση Τάσεων-Παραμορφώσεων Κριτήρια Στατικής Αστοχίας

Παναγιώτης Αλευράς
(palevras@tuc.gr)

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

1

1

Άσκηση 1

- Εφαρμογή κριτηρίων von Mises, Tresca
- Χρήση γραφικής μεθόδου για τον υπολογισμό συντελεστή ασφαλείας

(α) Μία ολκιμη χαλύβδινη δοκός έχει όριο διαρροής $S_y=350 \text{ MPa}$. Χρησιμοποιήστε τα κριτήρια μέγιστης διατμητικής (Tresca) και έργου παραμόρφωσης (von Mises) για να προσδιορίσετε τον συντελεστή ασφαλείας για τις παρακάτω εντατικές καταστάσεις

- $\sigma_x = 100 \text{ MPa}, \sigma_y = 50 \text{ MPa}$
- $\sigma_x = -50 \text{ MPa}, \sigma_y = -75 \text{ MPa}, \tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$

(β) Σχεδιάστε την όριο αστοχίας σε διάγραμμα κύριων τάσεων και τη γραμμή φόρτισης των παραπάνω περιπτώσεων. Υπολογίστε γραφικά τον συντελεστή ασφαλείας.

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

2

2

Άσκηση 1 (Λύση)



(α)i. Έχουμε μόνο δύο ορθές τάσεις, $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 50 \text{ MPa}$, άρα:

- Η τρίτη ορθή είναι μηδέν, οπότε έχουμε επίπεδη εντατική κατάσταση
- Έχουμε μηδενικές διατμητικές, οπότε οι δοσμένες τάσεις είναι οι κύριες τάσεις

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa}, \sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \sigma_3 = 0$$

Tresca $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{S_y}{N} \Rightarrow 100 - 0 \leq \frac{350}{N} \Rightarrow N \leq 3.5$

Άρα $N = 3.5$

von Mises $\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}$

$$\sigma' = \left[\frac{(100 - 50)^2 + (50 - 0)^2 + (0 - 100)^2}{2} \right]^{1/2} \leq \frac{S_y}{N}$$

$$86.6 \leq \frac{350}{N} \Rightarrow N \leq 4 \quad \text{Άρα} \quad N = 4$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

3

3

Άσκηση 1 (Λύση)



(α)ii. Έχουμε ορθές και διατμητικές τάσεις, $\sigma_x = -50 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -75 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$, άρα:

- Η τρίτη ορθή είναι μηδέν, οπότε έχουμε επίπεδη εντατική κατάσταση
- Πρέπει να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-50 - 75}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-50 + 75}{2} \right)^2 + (-50)^2}$$

$$\sigma_1 = -11 \text{ MPa} \quad \text{και} \quad \sigma_2 = -114 \text{ MPa}$$

Γράφουμε τις κύριες τάσεις σε φθίνουσα σειρά χωρίς να ξεχνάμε την τρίτη που είναι 0!!

$$\sigma_1 = 0 \text{ MPa}, \sigma_2 = -11 \text{ MPa}, \sigma_3 = -114 \text{ MPa}$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

4

4

Άσκηση 1 (Λύση)



(α)ii.

Tresca $\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{S_y}{N} \Rightarrow 0 - (-114) \leq \frac{350}{N} \Rightarrow N \leq 3.07$

Άρα $N = 3.07$

von Mises $\sigma' = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2}$

$$\sigma' = \left[\frac{(0 + 11)^2 + (-11 + 114)^2 + (-114 - 0)^2}{2} \right]^{1/2} \leq \frac{S_y}{N}$$

$108.9 \leq \frac{350}{N} \Rightarrow N \leq 3.21$ Άρα $N = 3.21$

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\sigma' = [\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}]^{1/2}$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

5

5

Άσκηση 1 (Λύση)

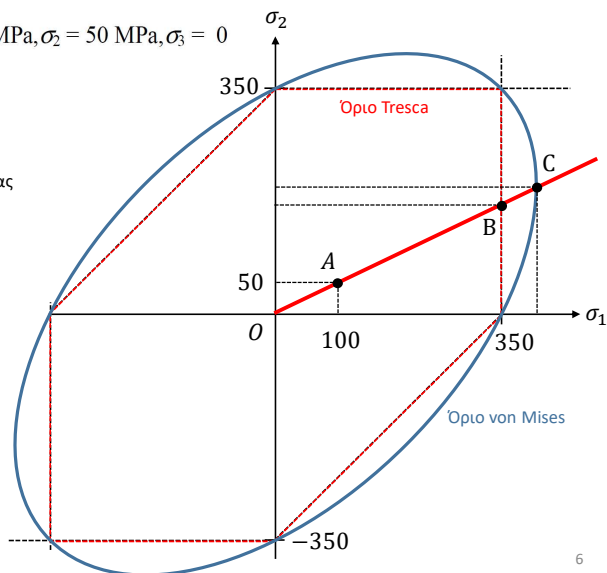


(β)i. $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}, \sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \sigma_3 = 0$

- 1) Εντοπίζουμε τα σημεία S_y στους άξονες
- 2) Ενώνουμε με γραμμές, και σχεδιάζουμε τις συμμετρικές
- 3) Το πολύγωνο που περικλείεται μας δίνει το όριο αστοχίας κατά Tresca
- 4) Σχεδιάζουμε έλλειψη που να περνάει από τις κορυφές του πολυγώνου.
- 5) Η έλλειψη μας δίνει το όριο αστοχίας κατά von Mises.
- 6) Σημειώνουμε το σημείο που αντιστοιχεί στην φόρτιση
- 7) Σχεδιάζουμε γραμμή από το OA έως και τα όρια αστοχίας.

8) $N = \frac{|OB|}{|OA|}$ (Tresca)
 $N = \frac{|OC|}{|OA|}$ (von Mises)

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3



6

6

Άσκηση 2

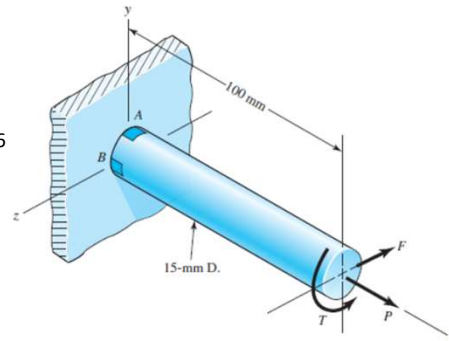


- Υπολογισμός τάσεων υπό κάμψη, στρέψη & διάτμηση
- Εφαρμογή κριτηρίου von Mises
- Υπολογισμός συντελεστή ασφαλείας

Η πακτωμένη δοκός του σχήματος υπόκειται σε στρεπτική ροπή $T=25 \text{ Nm}$, εφελκυστική δύναμη $P=4 \text{ kN}$, και διάτμηση υπό την $F=0.55 \text{ kN}$. Το υλικό της δοκού είναι χάλυβας AISI 1006 με όριο διαρροής $S_y=280 \text{ MPa}$.

Υπολογίστε τον συντελεστή ασφαλείας σύμφωνα με το κριτήριο έργου παραμόρφωσης – von Mises.

TIP: χρησιμοποιήστε τα επιφανειακά στοιχεία A και B για τους υπολογισμούς των τάσεων



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

7

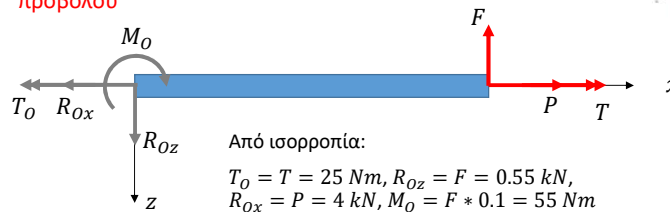
7

Άσκηση 2 (Λύση)



Γιατί τα στοιχεία A και B που επιλέγουμε είναι ακριβώς δίπλα στην πάκτωση?

Γιατί η φόρτιση παίρνει τη μέγιστη τιμή της στη στήριξη του προβόλου



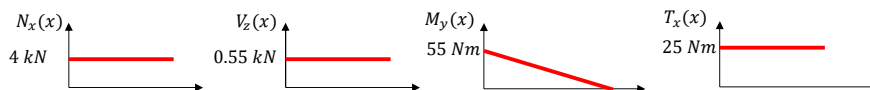
$$N_x(x) = R_{Ox}$$

$$V_z(x) = R_{Oz}$$

$$M_y(x) = M_O - R_{Oz}x$$

$$M_y(x) = 55 - 550x$$

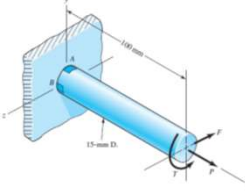
$$T_x(x) = T_O$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

8

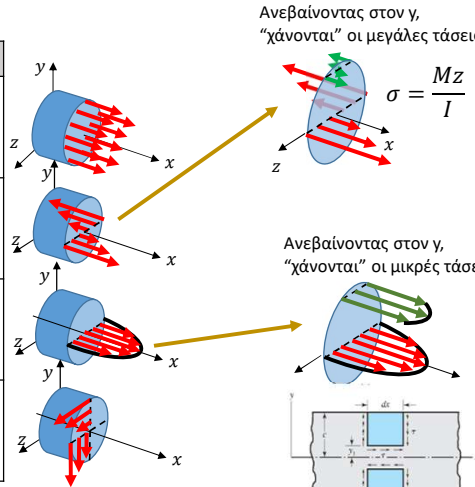
8



Γιατί να χρησιμοποιήσουμε δυο στοιχεία A και B και όχι μόνο ένα πχ το A?

Γιατί έχουμε σύνθετη καταπόνηση σε πολλά επίπεδα!! Αυτό θα εξαρτάται από την εκάστοτε φόρτιση, τα είδη της και τις κατευθύνσεις.

ΦΟΡΤΙΣΗ	ΤΥΠΟΣ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΤΑΣΗΣ
Εφελκυσμός P	Ορθές κατά τον x
Κάμψη F	Ορθές - Επίπεδο xz
Διάτμηση F	Διατμητικές – Επίπεδα xz & yz
Στρέψη T	Διατμητικές - Επίπεδο yz



Ανεβαίνοντας στον y, "χάνονται" οι μεγάλες τάσεις $\sigma = \frac{Mz}{I}$

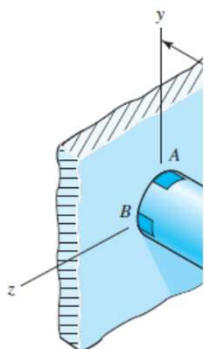
Ανεβαίνοντας στον y, "χάνονται" οι μικρές τάσεις

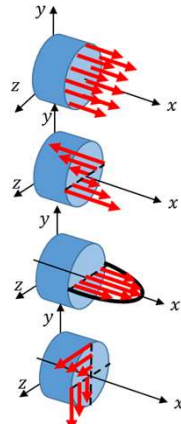
9

Άσκηση 2 (Λύση)



Ψάχνουμε τα σημεία της διατομής που δέχονται την μεγαλύτερη τάση





ΦΟΡΤΙΣΗ	ΣΤΟ Α	ΣΤΟ Β
Εφελκυσμός P	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Κάμψη F	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Διάτμηση F	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Στρέψη T	ΝΑΙ	ΝΑΙ

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

10

10

Άσκηση 2 (Λύση)



Ψάχνουμε τα σημεία της διατομής που δέχονται την μεγαλύτερη τάση

ΦΟΡΤΙΣΗ	ΣΤΟ Α	ΣΤΟ Β
Εφελκυσμός P	ΝΑΙ	ΝΑΙ
Κάμψη F	ΟΧΙ	ΝΑΙ
Διάτμηση F	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Στρέψη T	ΝΑΙ	ΝΑΙ

Για το Α

$$\sigma_x = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 4000}{\pi \cdot 0.015^2} = 22.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} + \frac{4V}{3A} = \frac{16 \cdot 25}{\pi \cdot 0.015^3} + \frac{4 \cdot 550}{3(\pi \cdot 0.015^3/4)} = 41.9 \text{ MPa}$$

Υπολογισμός τάσης von Mises

$$\sigma' = [22.6^2 + 3 \cdot 41.9^2]^{1/2} = 76 \text{ MPa}$$

$$\text{Άρα } N = S_y/\sigma' = 280/76 \Rightarrow N = 3.68$$

Για το Β

$$\sigma_x = \frac{32Fl}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{32 \cdot 550 \cdot 0.1}{\pi \cdot 0.015^3} + \frac{4 \cdot 4000}{\pi \cdot 0.015^2} = 189 \text{ MPa}$$

Υπολογισμός τάσης von Mises

$$\sigma' = [189^2 + 3 \cdot 37.7^2]^{1/2} = 200 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 25}{\pi \cdot 0.015^3} = 37.7 \text{ MPa}$$

$$\text{Άρα } N = S_y/\sigma' = 280/200 \Rightarrow N = 1.4$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

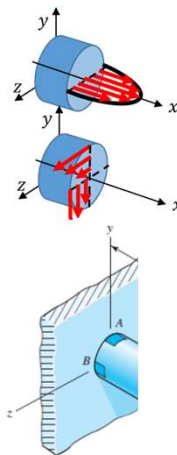
11

11

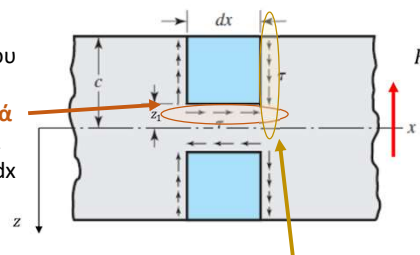
Άσκηση 2 (Λύση)



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1: Γιατί αθροίζουμε τις διατμητικές από τη στρέψη και τη διάτμηση στο Α?



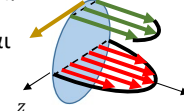
Οι τάσεις από διάτμηση που σχεδιάσαμε εφαρμόζονται στη **κάτω οριζόντια πλευρά** του κομματιού dx και είναι **σταθερές** κατά μήκος του dx



Επίσης, συνυπάρχουν οι τάσεις στην **δεξιά κάθετη πλευρά** του κομματιού dx και **μειώνονται** κατά μήκος του z . Οι οριζόντιες και κάθετες διατμητικές είναι ίσες στις κορυφές όπου $z = z_1$.

σημείο Α

Στο σημείο Α, αυτές οι «**κάθετες**» διατμητικές είναι συγγραμμικές με τις στρεπτικές διατμητικές!!!



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

12

12

Άσκηση 3



- Υπολογισμός τάσεων υπό σύνθετη κάμψη και στρέψη
- Εφαρμογή κριτηρίων von Mises και Tresca.
- Υπολογισμός αντοχής με δεδομένο συντελεστή ασφαλείας

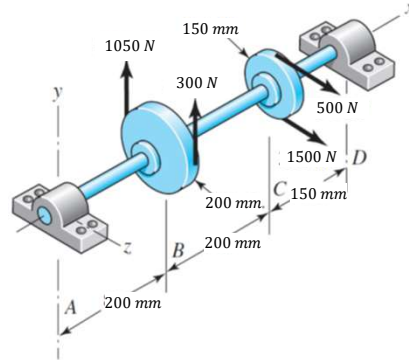
Ο άξονας του σχήματος είναι από AISI 1035 CD χάλυβα, στηρίζεται στα έδρανα A και D και φέρει τροχαλίες στα B και C, με τις δυνάμεις που φαίνονται να ασκούνται από τους ιμάντες.

Υπολογίστε την απαιτούμενη διάμετρο άξονα d , με συντελεστή ασφαλείας 2 σύμφωνα με

(α) το κριτήριο μέγιστης διατμητικής τάσης – Tresca.

(β) το κριτήριο έργου παραμόρφωσης – von Mises.

Θεωρείστε μόνο κάμψη και στρέψη (αγνοήστε την διάτμηση).



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

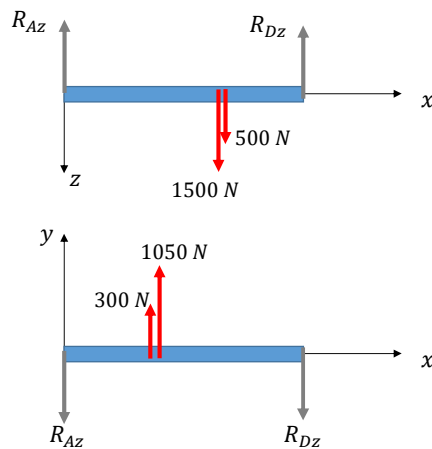
13

13

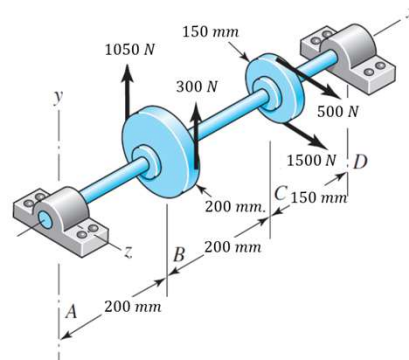
Άσκηση 3 (Λύση)



Πρώτο βήμα ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης. Ποιες δυνάμεις υπάρχουν στις αντιδράσεις των εδράνων A και D?



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3



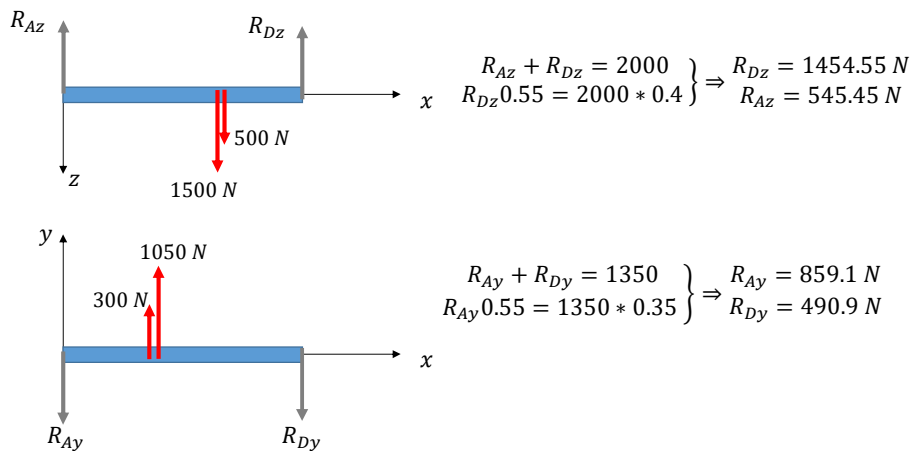
14

14

Άσκηση 3 (Λύση)



Πρώτο βήμα ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης. Ποιες δυνάμεις υπάρχουν στις αντιδράσεις των εδράνων A και D?



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

15

15

Άσκηση 3 (Λύση)



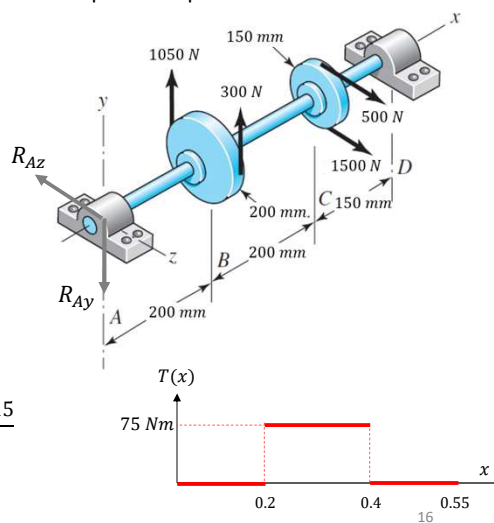
Δεύτερο βήμα τα διαγράμματα καμπτικών και στρεπτικών ροπών.

Ι) ΣΤΡΕΨΗ

Τμήμα AB Κοιτώντας από αριστερά
 $T = 0$

Τμήμα BC $T = (1050 - 300) \frac{0.2}{2}$
 $T = 75 \text{ Nm}$

Τμήμα CD
 $T = (1050 - 300) \frac{0.2}{2} + (500 - 1500) \frac{0.15}{2}$
 $T = 0 \text{ Nm}$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

16

16

Άσκηση 3 (Λύση)



Δεύτερο βήμα τα διαγράμματα καμπτικών και στρεπτικών ροπών.

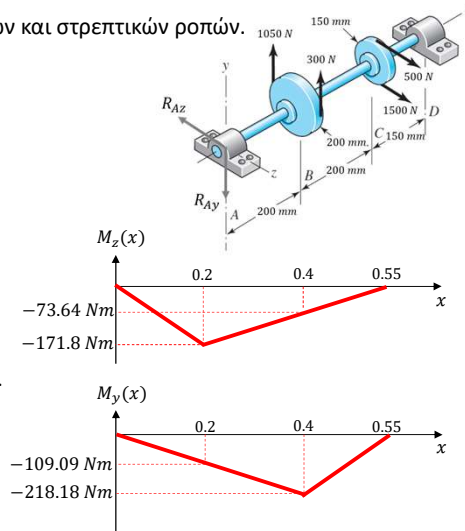
II) Κάμψη **Σε ποιο(α) επίπεδο(α) ασκείται?**

1. Η τροχαλία Β κάμπει τον άξονα στο xy , ροπή κατά τον z .

$$\begin{aligned} AB: M_z(x) &= -R_{Ay} x = -859.1x \\ BC: M_z(x) &= -859.1x + 1350(x - 0.2) \\ CD: M_z(x) &= -859.1x + 1350(x - 0.2) \end{aligned}$$

2. Η τροχαλία C κάμπει στο xz , ροπή κατά τον y .

$$\begin{aligned} AB: M_y(x) &= -R_{Az} x = -545.45x \\ BC: M_y(x) &= -545.45x \\ CD: M_y(x) &= -545.45x + 2000(x - 0.4) \end{aligned}$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

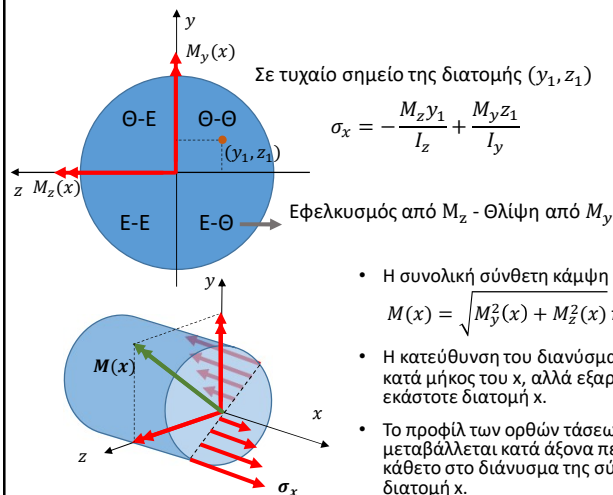
17

17

Άσκηση 3 (Λύση)



Σύνθετη κάμψη διατομής



- Η συνολική σύνθετη κάμψη εφαρμόζεται από ροπή $M(x) = \sqrt{M_y^2(x) + M_z^2(x)}$ που δεν συμπίπτει με τους άξονες y, z .
- Η κατεύθυνση του διανύσματος της ροπής $M(x)$ δεν είναι σταθερή κατά μήκος του x , αλλά εξαρτάται από το μέγεθος των M_y, M_z στην εκάστοτε διατομή x .
- Το προφίλ των ορθών τάσεων είναι ίδιο με της απλής κάμψης, αλλά μεταβάλλεται κατά άξονα περιστραμμένο σε σχέση με τους y, z κάθετο στο διάνυσμα της σύνθετης ροπής $M(x)$ που κάμπει την διατομή x .
- Μέγιστη τάση πάλι στην εξωτερική επιφάνεια του άξονα.

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

18

18

Άσκηση 3 (Λύση)



Δεύτερο βήμα τα διαγράμματα καμπτικών και στρεπτικών ροπών.

II) Κάμψη

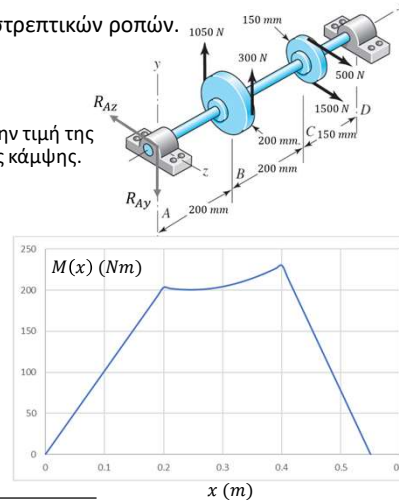
Έχουμε σύνθετη κάμψη από την $M(x)$, πρέπει να βρούμε την τιμή της σε κάθε x , για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα της σύνθετης κάμψης.

$$M(x) = \sqrt{M_y^2(x) + M_z^2(x)}$$

$$\text{AB: } M(x) = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{(-859.1x)^2 + (-545.45x)^2} \cong 1017x$$

$$\text{BC: } M(x) = \sqrt{(-859.1x + 1350(x - 0.2))^2 + (-545.45x)^2}$$

$$\text{CD: } M(x) = \sqrt{(-859.1x + 1350(x - 0.2))^2 + (-545.45x + 2000(x - 0.4))^2}$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

19

19

Άσκηση 3 (Λύση)



Δεύτερο βήμα τα διαγράμματα καμπτικών και στρεπτικών ροπών.

II) Κάμψη

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την ροπή $M(x)$ στα σημεία B και C, αφού εκεί περιμένουμε ότι θα είναι οι μέγιστες ροπές.

$$M(B) = \sqrt{M_y^2(0.2) + M_z^2(0.2)} = \sqrt{109.09^2 + 171.8^2}$$

$$M(0.2) = 203.53 \text{ Nm}$$

$$M(C) = \sqrt{M_y^2(0.4) + M_z^2(0.4)} = \sqrt{218.18^2 + 73.64^2}$$

$$M(0.2) = 230.27 \text{ Nm}$$

Ποιο σημείο θα χρησιμοποιήσουμε για τους υπολογισμούς της αντοχής?

Το C, αφού $M(x = C) > M(x = B)$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

20

20

Άσκηση 3 (Λύση)



Τρίτο βήμα ο υπολογισμός των τάσεων στην ΕΠΙΚΙΝΔΥΝΗ ΔΙΑΤΟΜΗ, η οποία βρίσκεται στο C, $x=0.4\text{m}$

- 1) Ορθές τάσεις από Κάμψη

Μέγιστη τάση στην εξωτερική επιφάνεια του άξονα

$$\sigma_{x,max} = \frac{M(d/2)}{I} = \frac{203.27(d/2)}{(\pi d^4/64)}$$

$$\sigma_{x,max} = 2070.5/d^3$$

- 2) Διατμητικές τάσεις από Στρέψη

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} = \frac{75(d/2)}{(\pi d^4/32)} = 382/d^3$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

Shape	Area, A	Distances c_1 and c_2 to Outer Fibers	Moment of Inertia I About Centroidal Axis 1-1
4. Solid circle	$\frac{\pi D^2}{4}$	$c = \frac{D}{2}$	$\frac{\pi D^4}{64}$

$$\sigma_{x,max} = 2070.5/d^3$$

$$\tau_{max} = 382/d^3$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

21

21

Άσκηση 3 (Λύση)



Τέταρτο βήμα η εφαρμογή των κριτηρίων αστοχίας

- 1) Μέγιστη Διατμητική Τάση – Tresca

$$\tau_{Tresca} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x,max}}{2}\right)^2 + \tau_{max}^2} = \sqrt{\left(\frac{2070.5}{2d^3}\right)^2 + \left(\frac{382}{d^3}\right)^2}$$

$$\tau_{Tresca} = \frac{1103.5}{d^3}$$

$$\tau_{Tresca} \leq \frac{S_y}{2N} \Rightarrow \frac{1103.5}{d^3} \leq \frac{S_y}{2N} \Rightarrow d^3 \geq \frac{2207N}{S_y}$$

Συντελεστής ασφαλείας δίνεται **N=2**

Για AISI 1035 CD χάλυβα, $S_y = 460 \text{ MPa} = 460 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$

$$\text{Άρα } d \geq 21.25 \text{ mm} \text{ κατά Tresca}$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

22

22

Άσκηση 3 (Λύση)



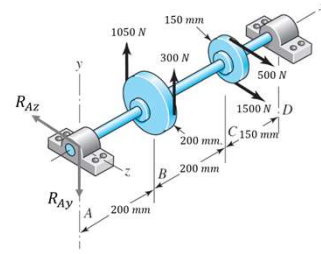
Τέταρτο βήμα η εφαρμογή των κριτηρίων αστοχίας

2) Έργο Παραμόρφωσης – von Mises

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_{x,max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \sqrt{\left(\frac{2070.5}{d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{382}{d^3}\right)^2}$$

$$\sigma' = \frac{2173.6}{d^3}$$

$$\sigma' \leq \frac{S_y}{N} \Rightarrow \frac{2173.6}{d^3} \leq \frac{S_y}{N} \Rightarrow d^3 \geq \frac{2173.6N}{S_y}$$



$$\sigma_{x,max} = 2070.5/d^3$$

$$\tau_{max} = 382/d^3$$

Συντελεστής ασφαλείας δίνεται **N=2**

Για AISI 1035 CD χάλυβα, **$S_y = 460 \text{ MPa} = 460 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$**

Άρα **$d \geq 21.14 \text{ mm}$** κατά von Mises

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

23

23

Άσκηση 4



- Εφαρμογή κριτηρίων Coulomb-Mohr (CM) και Τροποποιημένης Coulomb-Mohr (MCM)

(α) Ένα ψαθυρό υλικό έχει όρια θραύσης $S_{ut}=200 \text{ MPa}$ και $S_{uc}=600 \text{ MPa}$. Χρησιμοποιήστε τα κριτήρια CM και MCM για να προσδιορίσετε τον συντελεστή ασφαλείας για τις παρακάτω εντατικές καταστάσεις

- $\sigma_x = 100 \text{ MPa}, \sigma_y = -100 \text{ MPa}$
- $\sigma_x = -100 \text{ MPa}, \sigma_y = 60 \text{ MPa}, \tau_{xy} = -100 \text{ MPa}$

(β) Σχεδιάστε το όριο αστοχίας σε διάγραμμα κύριων τάσεων και τη γραμμή φόρτισης των παραπάνω περιπτώσεων. Υπολογίστε γραφικά τον συντελεστή ασφαλείας.

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

24

24

Άσκηση 4 (Λύση)



(α)i. Έχουμε μόνο δύο ορθές τάσεις, $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -100 \text{ MPa}$, άρα:

- Η τρίτη ορθή είναι μηδέν, οπότε έχουμε επίπεδη εντατική κατάσταση
- Έχουμε μηδενικές διατμητικές, οπότε οι δοσμένες τάσεις είναι οι κύριες τάσεις

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \sigma_3 = -100 \text{ MPa}$$

CM Σε ποιο τεταρτημόριο είμαστε? **IV**

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{100}{200} + \frac{100}{600} \leq \frac{1}{N} \Rightarrow N \leq 1.5 \quad \text{Άρα } N = 1.5$$

MCM Πάλι ελέγχουμε το τεταρτημόριο... $\lambda = \frac{S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}} = \frac{600}{600 - 200} = 1.5$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc} - S_{ut}} \leq \frac{\lambda}{N} \Rightarrow \frac{100}{200} + \frac{100}{600 - 200} \leq \frac{1.5}{N} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{1.5}{N} \Rightarrow N \leq 2$$

Άρα **$N = 2$**

Άσκηση 4 (Λύση)



(α)ii. Έχουμε ορθές και διατμητικές τάσεις, $\sigma_x = -100 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -60 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -100 \text{ MPa}$, άρα:

- Η τρίτη ορθή είναι μηδέν, οπότε έχουμε επίπεδη εντατική κατάσταση
- Πρέπει να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-100 - 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-100 + 60}{2}\right)^2 + (-100)^2}$$

$$\sigma_1 = 21.98 \text{ MPa} \quad \text{και} \quad \sigma_2 = -181.98 \text{ MPa}$$

Γράφουμε τις κύριες τάσεις σε φθίνουσα σειρά χωρίς να ξεχνάμε την τρίτη που είναι 0!!

$$\sigma_1 = 21.98 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \sigma_3 = -181.98 \text{ MPa}$$

Άσκηση 4 (Λύση)



(α)ii. $\sigma_1 = 21.98 \text{ MPa}, \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \sigma_3 = -181.98 \text{ MPa}$

CM Σε ποιο τεταρτημόριο είμαστε? **IV**

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{21.98}{200} + \frac{181.98}{600} \leq \frac{1}{N} \Rightarrow N \leq 2.42 \text{ Άρα } N = 2.42$$

MCM Πάλι ελέγχουμε το τεταρτημόριο... $\lambda = \frac{S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}} = \frac{600}{600 - 200} = 1.5$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc} - S_{ut}} \leq \frac{\lambda}{N} \Rightarrow \frac{21.98}{200} + \frac{181.98}{600 - 200} \leq \frac{1.5}{N} \Rightarrow N \leq 2.66$$

Άρα **$N = 2.66$**

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

27

27

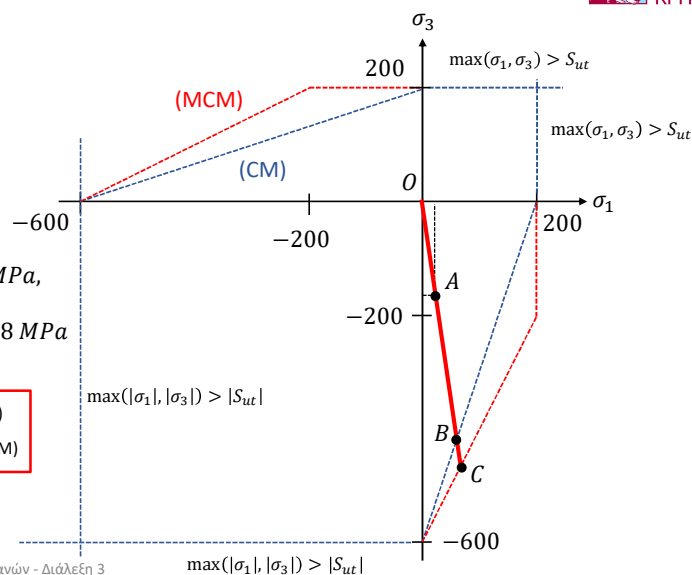
Άσκηση 4 (Λύση)



(β)ii.

$$\sigma_1 = 21.98 \text{ MPa}, \\ \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \\ \sigma_3 = -181.98 \text{ MPa}$$

$$N = \frac{|OB|}{|OA|} \text{ (CM)} \\ N = \frac{|OC|}{|OA|} \text{ (MCM)}$$



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

28

28

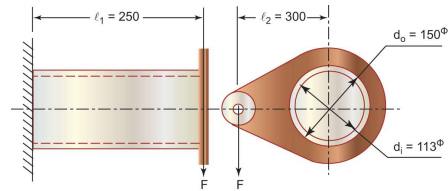
Άσκηση 5



- Εφαρμογή κριτηρίων Coulomb-Mohr (CM) και Τροποποιημένης Coulomb-Mohr (MCM)
- Σύγκριση διαδικασίας για όλκιμα και ψαθυρά υλικά
- Συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων

Ο κύλινδρος του σχήματος είναι πακτωμένος αριστερά και φέρει έκκεντρο φορτίο $F=10 \text{ kN}$. Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων στη πάκτωση είναι 3.

Βρείτε τον συντελεστή ασφαλείας αν το υλικό του σωλήνα είναι χυτοσίδηρος με $S_{ut}=172 \text{ MPa}$ και $S_{uc}=690 \text{ MPa}$ χρησιμοποιώντας την Θεωρία μέγιστης ορθής τάσης, την Coulomb-Mohr και την τροποποιημένη Coulomb-Mohr.



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

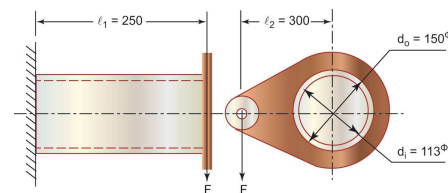
29

29

Άσκηση 5 (Λύση)



Ποιες είναι οι καταπονήσεις που δέχεται ο σωλήνας?



Κάμψη $\sigma_{max} = \frac{Mr}{I}$

$M = Fl_1$

Μέγιστη καμπτική ροπή στην πάκτωση

$r = d_0/2$

Το πιο μακρινό σημείο από τον ουδέτερο άξονα

$I = \frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_1^4)$ Διατομή σωλήνα=δακτύλιος

Στρέψη $\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$

$T = Fl_2$

σταθερή στρεπτική ροπή

$r = d_0/2$

Το πιο μακρινό σημείο από τον ουδέτερο άξονα

$J = \frac{\pi}{32}(d_0^4 - d_1^4)$ Διατομή σωλήνα=δακτύλιος

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

30

30

Άσκηση 5 (Λύση)



Άρα
$$\sigma_{max} = \frac{Mr}{I} = \frac{Fl_1 \frac{d_0}{2}}{\frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_0^4)} = \frac{10000 \times 250}{\frac{\pi}{64}(150^4 - 113^4)} = 11.13 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} = \frac{Fl_2 \frac{d_0}{2}}{\frac{\pi}{32}(d_0^4 - d_0^4)} = \frac{10000 \times 300}{\frac{\pi}{32}(150^4 - 113^4)} = 6.68 \text{ MPa}$$

Όταν δουλεύουμε σε N και mm, οι τάσεις είναι σε MPa

Κύριες τάσεις

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{11.13 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11.13 - 0}{2}\right)^2 + 6.68^2}$$
$$\sigma_1 = 14.26 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -3.13 \text{ MPa}$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

31

31

Άσκηση 5 (Λύση)



$$\sigma_1 = 14.26 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -3.13 \text{ MPa}$$

Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων εκφράζει την απότομη αύξηση των τάσεων σε γεωμετρικές ή άλλες κατασκευαστικές ανομοιομορφίες, συνήθως δίνεται από εμπειρικά δεδομένα.

$$\sigma' = k_t \sigma \quad \tau' = k_t \tau$$

Ουσιαστικά, πολλαπλασιάζουμε τις τάσεις που βρίσκουμε θεωρητικά με τους συντελεστές αυτούς, και χρησιμοποιούμε τις αυξημένες τιμές στον σχεδιασμό. Π.χ. εδώ ο συντελεστής συγκέντρωσης δίνεται ίσος με 3 για την πάκτωση. Άρα:

$$\sigma_1 = 3 * 14.26 = 42.78 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -3 * 3.13 = -9.39 \text{ MPa}$$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

32

32

Άσκηση 5 (Λύση)



Εφαρμογή κριτηρίων αστοχίας

$$\sigma_1 = 42.78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -9.39 \text{ MPa}$$

Μέγιστη ορθή τάση: $\max(\sigma_1, \sigma_3) \leq \frac{S_{ut}}{N} \rightarrow 42.78 = \frac{172}{N} \Rightarrow N_{OT} = 4$

CM: $\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} \leq \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{42.78}{172} - \frac{-9.39}{690} = \frac{1}{N} \rightarrow N_{CM} = 3.81$

MCM: $\lambda = \frac{S_{uc}}{S_{uc} - S_{ut}} = \frac{690}{690 - 172} = 1.33$

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc} - S_{ut}} \leq \frac{\lambda}{N} \Rightarrow \frac{42.78}{172} - \frac{-9.39}{690 - 172} = \frac{1.33}{N} \rightarrow N_{MCM} = 4.98$$

Στην MCM πάντα ελέγχω εάν $N_{OT} < N_{MCM}$. Τότε, $N_{MCM} = N_{OT} = 4$

Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

33

33

Άσκηση 5 (Λύση)

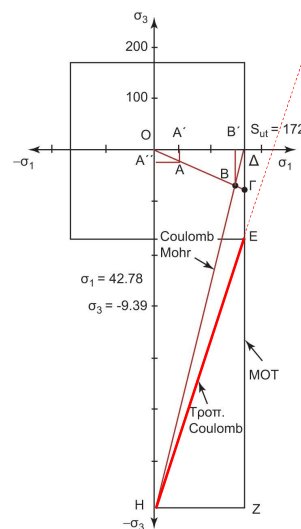


Γιατί κάνουμε αυτόν τον έλεγχο?

Η ανισότητα του MCM ισχύει μόνο μεταξύ των σημείων E και H.

Πρέπει να ελέγχουμε εάν η γραμμή φόρτισης OG τέμνει πρώτα τη γραμμή ΔΕ, που ορίζεται από το κριτήριο μέγιστης ορθής τάσης.

Τότε, ο συντελεστής ασφαλείας δίνεται από το κριτήριο μέγιστης ορθής τάσης.



Στοιχεία Μηχανών - Διάλεξη 3

34

34