

Ρευστομηχανική

Σημειώσεις μαθήματος

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Διδάσκων

Γιώργος Αραμπατζής
Επίκουρος Καθηγητής ΜΠΔ

Τηλ: 28210 3 7365

Email: garampatzis@pem.tuc.gr

Γραφείο: Δ.4 105

Μαθησιακά αποτελέσματα

- Παρουσίαση βασικών αρχών και νόμων της **Μηχανικής Ρευστών**
- Θεωρητικό υπόβαθρο για μαθήματα σχετικά με ανάλυση και σχεδιασμό
- Με την ολοκλήρωση του μαθήματος, ο φοιτητής/τρια θα είναι σε θέση να:
 - Κατανοεί τις βασικές έννοιες που διέπουν τη **Στατική** και **Δυναμική** των ρευστών
 - Διατυπώνει τους βασικούς νόμους που διέπουν τη **ρευστομηχανική** και να τους εφαρμόζει για την επίλυση τεχνικών προβλημάτων
 - Διακρίνει τους **μηχανισμούς μεταφοράς μάζας, ορμής και ενέργειας**
 - Κατανοεί και εφαρμόζει τις θεμελιώδεις **εξισώσεις διατήρησης** σε διαφορική και ολοκληρωτική μορφή
 - Επιλύει προβλήματα **ασυμπίεστων εσωτερικών και εξωτερικών ροών**
 - Εκτιμά τις ενεργειακές απώλειες σε **συστήματα σωληνώσεων**
 - Σχεδιάζει **δίκτυα αγωγών** διακίνησης ρευστών
 - Αναπτύσσει την αναλυτική και κριτική του σκέψη και να την εφαρμόσει σε εφαρμοσμένα προβλήματα μηχανικού.

Συνιστώμενη βιβλιογραφία

- Προτεινόμενη (πλήρης κάλυψη)
 - Α.Θ. Παπαϊωάννου. Μηχανική των Ρευστών, 3^η Έκδοση. Εκδόσεις Σοφία. 2020.
 - Σ.Α. Αυλωνίτης, Δ.Α. Αυλωνίτης. Μηχανική των Ρευστών, 4^η Έκδοση. Εκδόσεις Ίων. 2006.
 - P.H. Gerhart, A.L. Gerhart, J.I. Hochstein. Munson, Young και Okiishi's Μηχανική Ρευστών. 8^η έκδοση. Εκδόσεις Τζιόλα. 2017.
- Συναφής (μερική κάλυψη):
 - R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot. "Transport Phenomena". J. Wiley, 2nd Edition. NY, 2002.
 - R.S. Brodkey and H.C. Hershey. "Transport Phenomena". McGraw – Hill. 1988.

Απαιτήσεις και αξιολόγηση

Απαιτήσεις Μαθήματος

- Σε γνώσεις
 - Γενικά Μαθηματικά
 - Κλασική Μηχανική
 - Θερμοδυναμική
- Σε διάρκεια
 - 13 διδακτικές εβδομάδες
 - 26 διαλέξεις 2 ωρών
- Σε χρόνο
 - 5 ώρες ανά εβδομάδα για μελέτη και ασκήσεις

Αξιολόγηση φοιτητών

- Γραπτή εξέταση σε δύο μέρη:
 1. Ερωτήσεις κρίσεως κατανόησης της θεωρίας
 - χωρίς βοήθεια συγγραμμάτων και προσωπικών σημειώσεων
 - συντελεστής 40%
 2. Επίλυση ασκήσεων
 - με βοήθεια του συγγράμματος και προσωπικών σημειώσεων
 - συντελεστής 60%

Περιεχόμενο μαθήματος

- Εισαγωγή και βασικές έννοιες
- Ιδιότητες ρευστών
- Υδροστατική, πρίσμα υδροστατικής πίεσης
- Απεικόνιση πεδίων ροής κατά Euler και κατά Lagrange, γραμμές ροής, τροχιές
- Ολοκληρωτικές εξισώσεις ροής
- Διαφορικές εξισώσεις ροής
- Ροϊκή συνάρτηση, δυναμικό ταχύτητας.
- Εξίσωση Bernoulli
- Στροβιλιά και αστρόβιλα πεδία ροής
- Εξισώσεις Euler
- Νόμος του Newton για τη συνεκτικότητα
- Εξισώσεις Navier-Stokes
- Στρωτή και τυρβώδης ροή σε αγωγούς, διάγραμμα Moody
- Εντοπισμένες αντιστάσεις σε σωληνώσεις ‘
- Επίλυση προβλημάτων ροής σε δίκτυα αγωγών

Πρόγραμμα διαλέξεων – Εξεταστέα ύλη

Διάλεξη2	Τίτλος διάλεξης	Υλη Βιβλίου
1 ^η Διάλεξη	Εισαγωγή – Ορισμοί	§2.1, §2.2, §2.3
2 ^η Διάλεξη	Βασικές αρχές και νόμοι	§2.3, §2.4, §2.6, §2.7
3 ^η Διάλεξη	Στατική – Μεταβολή πίεσης σε ρευστά	§3.1, §3.2, §3.3, §3.4, §3.5, §3.6
4 ^η Διάλεξη	Στατική – Δυνάμεις σε επιφάνειες	Σημειώσεις Νικολού §2.5, §2.6
5 ^η Διάλεξη	Επαναληπτικές ασκήσεις στη Στατική Ρευστών	
6 ^η Διάλεξη	Κινηματική – Πεδία και μέθοδοι περιγραφής	§4.1, §4.2, §4.3
7 ^η Διάλεξη	Κινηματική – Χρονικές παράγωγοι και επιτάχυνση	§4.4, §4.5
8 ^η Διάλεξη	Κινηματική – Ρυθμός ροής και γραφική απεικόνιση ροής	§4.6, §4.7
9 ^η Διάλεξη	Δυνάμεις σε ρευστά	§5.1, §5.2, §5.3, §5.8, §5.9
10 ^η Διάλεξη	Παραμόρφωση ρευστών και υλική σχέση	§5.10, §6.1, §6.2
11 ^η Διάλεξη	Επαναληπτικές ασκήσεις σε δυνάμεις και παραμόρφωση ρευστών	
12 ^η Διάλεξη	Μακροσκοπική ανάλυση ροής – Εξίσωση συνέχειας	§7.1, §7.2, §7.3
13 ^η Διάλεξη	Μακροσκοπική εξίσωση ορμής	§7.4
14 ^η Διάλεξη	Εφαρμογές της εξίσωσης ορμής	
15 ^η Διάλεξη	Μακροσκοπική εξίσωση ενέργειας	§7.5, §7.6
16 ^η Διάλεξη	Διαφορική ανάλυση ροής	§8.1, §8.2, §8.3, §8.4
17 ^η Διάλεξη	Εξισώσεις Euler και Navier-Stokes	§8.4.1
18 ^η Διάλεξη	Ροή σε σωληνώσεις-Βασικές έννοιες	§13.1
19 ^η Διάλεξη	Ροή σε σωληνώσεις-Απώλειες ενέργειας	§13.2, §13.3, §13.4, §13.7, §13.8, §13.9
20 ^η Διάλεξη	Επαναληπτικές ασκήσεις στη ροή σε σωληνώσεις	
21 ^η Διάλεξη	Επαναληπτικά θέματα και ασκήσεις Α	
22 ^η Διάλεξη	Επαναληπτικά θέματα και ασκήσεις Β	
23 ^η Διάλεξη	Αποτίμηση μαθήματος – Συζήτηση, Προτάσεις	

Ρευστομηχανική

1^η Διάλεξη Εισαγωγή – Ορισμοί

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Αντικείμενο της Μηχανικής Ρευστών

- **Μηχανική**: Η επιστήμη που ασχολείται με τη συμπεριφορά των υλικών σωμάτων όταν αυτά αλληλεπιδρούν με **δυνάμεις**
- **Μηχανική Ρευστών**: Ο κλάδος της μηχανικής που ασχολείται με τη συμπεριφορά **ρευστών** υλικών σωμάτων

Κλασική Μηχανική

Δυνάμεις σε στερεά σώματα



Κίνηση σωμάτων

Μηχανική Ρευστών

Δυνάμεις σε ρευστά σώματα



Ροή ρευστών

Κλάδοι την Μηχανικής Ρευστών

Στατική Ρευστών

- Μελέτη της υδροστατικής **πίεσης** και των δυνάμεων που ασκούν **ακίνητα** ρευστά πάνω σε επιφάνειες

Κινηματική Ρευστών

- Περιγραφή της **κίνησης** των ρευστών και μεγεθών που σχετίζονται με αυτήν (ταχύτητα, επιτάχυνση, παροχή, ...)

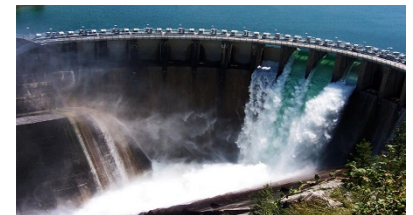
Δυναμική Ρευστών

- Μελέτη των **δυνάμεων** που αναπτύσσονται και των μεταβολών μάζας, ορμής και ενέργειας κατά τη ροή ρευστών

Εφαρμογές της Μηχανικής Ρευστών 1/2

- **Διακίνηση ρευστών**

- Δίκτυα σωληνώσεων μεταφοράς ρευστών σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις
- Αγωγοί μεταφοράς αργού πετρελαίου και φυσικού αερίου
- Συστήματα υδροδότησης, άρδευσης, αποχέτευσης



- **Μηχανολογία**

- Συσκευές διακίνησης ρευστών (αντλίες, ανεμιστήρες, ...)
- Εξαρτήματα που παρεμβάλλονται στη ροή (βάνες, διαφράγματα, γωνίες, ...)

- **Συστήματα μετατροπής ενέργειας**

- Υδροδυναμικές και θερμικές μηχανές
- Ανεμογεννήτριες
- Αντλίες θερμότητας

Εφαρμογές της Μηχανικής Ρευστών 2/2

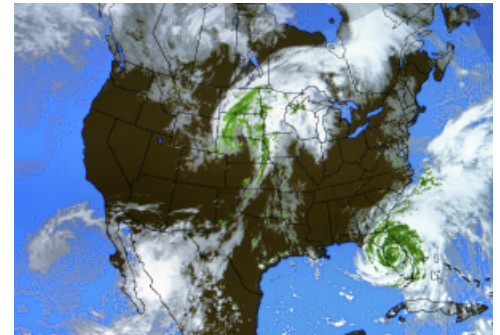
- **Αεροναυπηγική**

- Σχεδίαση αυτοκινήτων, πλοίων, υποβρυχίων, αεροπλάνων, διαστημοπλοίων



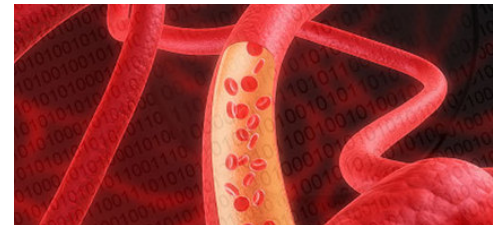
- **Μετεωρολογία και Ωκεανογραφία**

- Κινήσεις ανέμων
- Θαλάσσια ρεύματα
- Πρόβλεψη καιρού



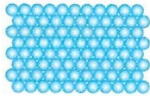
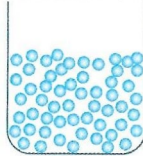
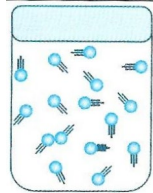
- **Ιατρική**

- Ροή αέρα στο αναπνευστικό σύστημα
- Ροή αίματος στο κυκλοφορικό σύστημα



A Day in the Life of a Fluid Dynamicist

Καταστάσεις της ύλης

	Στερεό	Υγρό	Αέριο
			
Στατική συμπεριφορά	Διατηρούν το σχήμα τους χωρίς να μπουν σε δοχείο	Παίρνουν το σχήμα του δοχείου και διατηρούνται σε ανοιχτό δοχείο	Καταλαμβάνουν όλο το χώρο κλειστού δοχείου
Κινητικότητα μορίων	Μικρή κινητικότητα μορίων – Πολύ ισχυρές διαμοριακές δυνάμεις	Ελεύθερη κίνηση μορίων – Ισχυρές διαμοριακές δυνάμεις	Ελεύθερη κίνηση μορίων – Μικρές διαμοριακές δυνάμεις
Συμπιεστότητα	Πολύ δύσκολο να συμπιεστούν	Δύσκολο να συμπιεστούν	Εύκολο να συμπιεστούν

Η έννοια του ρευστού

Χαρακτηρισμός ενός σώματος ως Στερεό ή Ρευστό

Κριτήριο (τεχνικό)

*Συμπεριφορά υπό την επίδραση διατμητικής τάσης**

Στερεά



Αντιδρούν με **στατική**
παραμόρφωση (κατάσταση
στατικής ισορροπίας)

Ρευστά



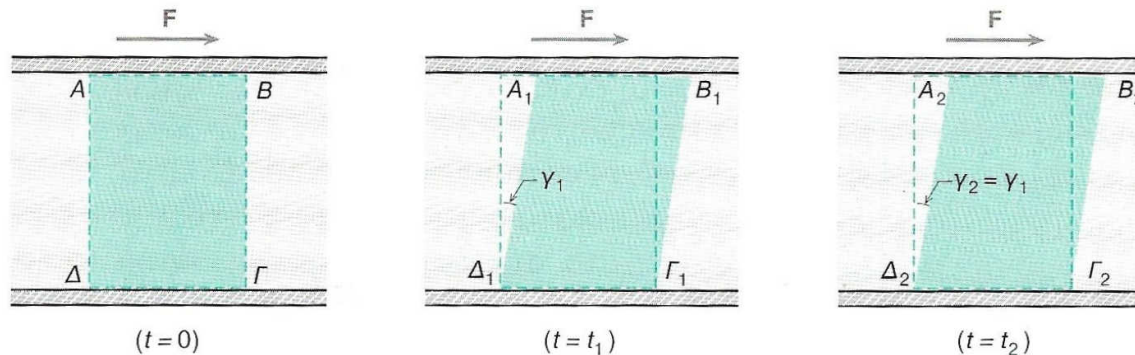
Υφίστανται **συνεχή**
παραμόρφωση (ρέουν)

***Διατμητική τάση:** Πηλίκο μιας εφαπτομενικής δύναμης που ασκείται σε μια επιφάνεια προς το εμβαδό της επιφάνειας

Κάθετη τάση: Πηλίκο μιας κάθετης δύναμης που ασκείται σε μια επιφάνεια προς το εμβαδό της επιφάνειας.

Συμπεριφορά στερεού σε διάτμηση 1/2

Ποσότητα στερεού μεταξύ δύο πλακών (ορθογώνιο στοιχείο ΑΒΓΔ)



Χρονική στιγμή $t=0$

- Στην πάνω πλάκα ασκείται **διατμητική δύναμη** F

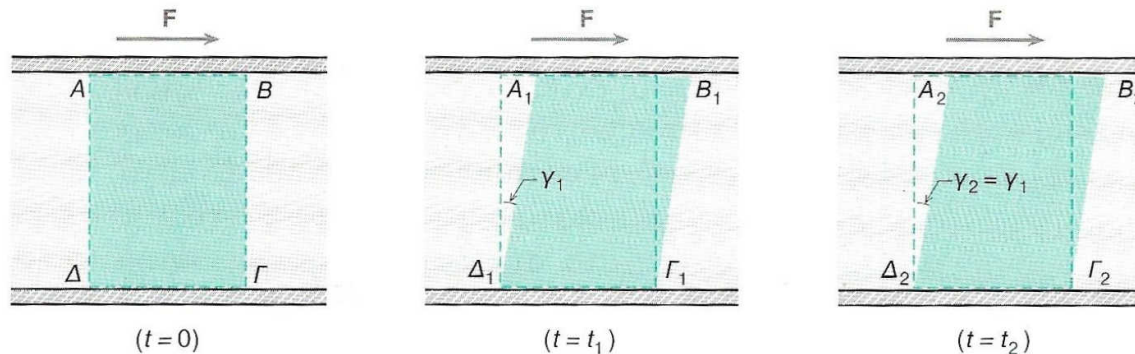
Χρονική στιγμή $t=t_1$

- Το στερεό παραμορφώνεται και γίνεται πλαγιογώνιο
Η γωνία γ_1 παριστάνει την ολική **παραμόρφωση**

Χρονική στιγμή $t=t_2$

- Το στερεό διατηρεί την ίδια παραμόρφωση ($\gamma_2 = \gamma_1$)

Συμπεριφορά στερεού σε διάτμηση 2/2

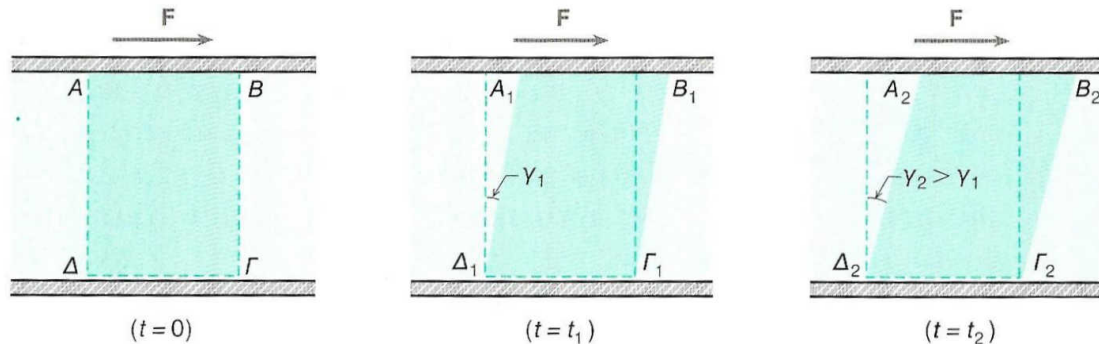


Συμπεράσματα

- Το στερεό υφίσταται μια ορισμένη παραμόρφωση η οποία **παραμένει σταθερή** όσο χρόνο διαρκεί η επίδραση της διατμητικής τάσης (**στατική παραμόρφωση**)
- Το **μέγεθος** της στατικής παραμόρφωσης εξαρτάται από το υλικό του σώματος και το μέγεθος της διατμητικής τάσης
- Όταν η επίδραση της διατμητικής τάσης σταματήσει το στερεό **επανέρχεται στην αρχική του μορφή**

Συμπεριφορά ρευστού σε διάτμηση 1/2

Ποσότητα ακίνητου ρευστού μεταξύ δύο πλακών (ορθογώνιο ΑΒΓΔ)



Χρονική στιγμή $t=0$

- Στην πάνω πλάκα ασκείται **διατμητική δύναμη** F

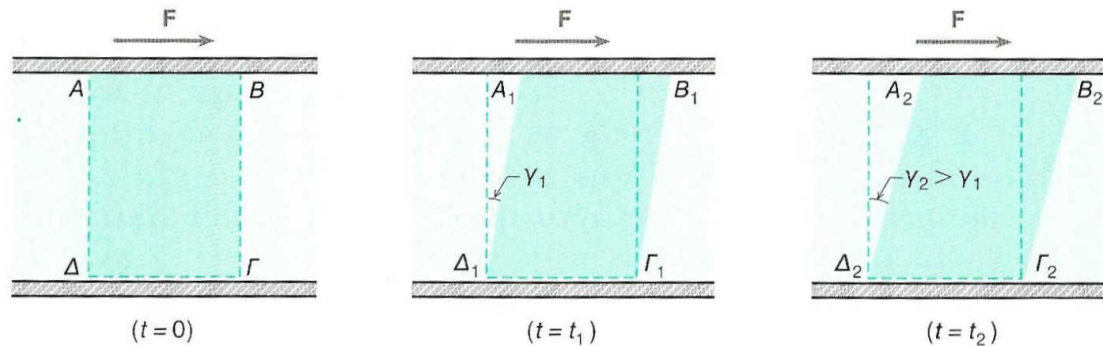
Χρονική στιγμή $t=t_1$

- Το στοιχείο ρευστού παραμορφώνεται και γίνεται πλαγιογώνιο
Η γωνία γ_1 παριστάνει την ολική **παραμόρφωση**

Χρονική στιγμή $t=t_2$

- Η νέα παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη ($\gamma_2 > \gamma_1$)

Συμπεριφορά ρευστού σε διάτμηση 2/2



Συμπεράσματα

- Το ρευστό **συνεχίζει να παραμορφώνεται** όσο χρόνο διαρκεί η επίδραση της διατμητικής τάσης
- Ο **ρυθμός** με τον οποίο το ρευστό παραμορφώνεται εξαρτάται από το υλικό του ρευστού και το μέγεθος της διατμητικής τάσης
- Όταν η επίδραση της διατμητικής τάσης σταματήσει το ρευστό παύει να κινείται και **δεν επανέρχεται στην αρχική του μορφή**

Η υπόθεση του συνεχούς μέσου

Η πραγματικότητα (Μοριακή Σύσταση)

- Τα ρευστά αποτελούνται από **μόρια** τα οποία κινούνται συνεχώς σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις κατευθύνσεις
- Το πλήθος των μορίων που περιέχονται σε κάθε χρονική στιγμή σε έναν ορισμένο όγκο ρευστού μεταβάλλεται συνεχώς

Υπόθεση Συνεχούς Μέσου (Μακροσκοπική Θεώρηση)

- Το ρευστό είναι ένα **συνεχές μέσο**
- Οι ιδιότητες του ρευστού (π.χ. πυκνότητα) και άλλα μεγέθη (π.χ. ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία), σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, **μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο κατά τρόπο συνεχή**

$$\psi = \psi(x, y, z)$$

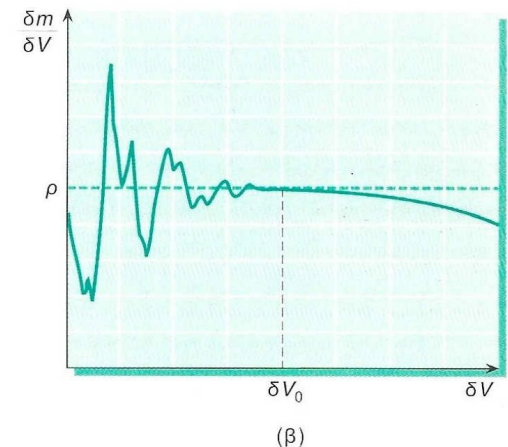
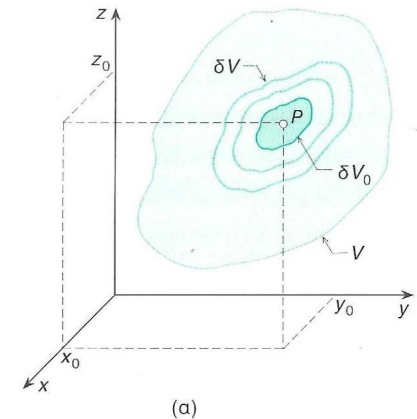
Ορισμός τοπικής πυκνότητας

- Εκτίμησης τοπικής πυκνότητας στο σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V} \neq \bar{\rho} = \frac{m}{V}$$

- Εξάρτηση από το μέγεθος του όγκου δV
 - Μεγάλες τιμές του $\delta V \Rightarrow$ Μεταβολές της ρ λόγω μακροσκοπικής ανομοιομορφίας (**μακροσκοπική απροσδιοριστία**)
 - Μικρές τιμές του $\delta V \Rightarrow$ Τυχαία μεταβολή της ρ λόγω διακύμανσης του αριθμού των μορίων που περιέχονται στον δV (**μικροσκοπική απροσδιοριστία**)
 - δV γύρω από την τιμή $\delta V_0 \Rightarrow$ Σταθεροποίηση της ρ
- Ορισμός πυκνότητας (**συνεχής συνάρτηση**)

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V_0} \left(\frac{\delta m}{\delta V} \right)$$



Σωματίδιο ρευστού

- Ως τιμή μιας ιδιότητας σε ένα δεδομένο σημείο του χώρου θεωρείται η **στατιστική μέση τιμή** της ιδιότητας σε μια περιοχή όγκου δV_0
- Η ποσότητα του ρευστού που περιέχεται στον οριακό όγκο δV_0 αποτελεί ένα **σωματίδιο ρευστού**
- Στην υπόθεση του συνεχούς μέσου ένα σωματίδιο ρευστού καταλαμβάνει, κάθε χρονική στιγμή, ένα **σημείο** στο χώρο

Ο οριακός όγκος είναι περίπου 10^{-9} mm^3 και στον όγκο αυτόν περιέχεται ένας μεγάλος αριθμός μορίων (≈ 30 εκατομμύρια σε αέρα υπό κανονικές συνθήκες)

Συνθήκη ισχύος υπόθεσης συνεχούς μέσου

Οι διαστάσεις του εξεταζόμενου συστήματος πρέπει να είναι **μεγαλύτερες από τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων** του ρευστού

Στον αέρα υπό κ.σ. η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων είναι $6.3 \times 10^{-5} \text{ mm}$

Περιπτώσεις αποτυχίας υπόθεσης συνεχούς μέσου

- Κίνηση διαστημοπλοίων στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας (η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων φτάνει τα 30 cm σε ύψος 100 km)
- Ροή μέσα από τους πόρους ενός στερεού καταλύτη (το μέγεθος του πόρου του καταλύτη μπορεί να είναι συγκρίσιμο με τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων)

Ρευστομηχανική

2^η Διάλεξη

Βασικές αρχές και νόμοι

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Πυκνότητα ρευστών

- **Μέση πυκνότητα** ρευστού

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V}$$

σε kg/m³

Ίση με την τοπική πυκνότητα σε περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής της μάζας

- **Τοπική πυκνότητα**

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V_0} \left(\frac{\delta m}{\delta V} \right)$$

Συνεχής συνάρτηση $\rho(x, y, z, t)$

- **Ειδικός όγκος**

$$\nu = \frac{1}{\rho}$$

σε m³/kg

- **Ειδικό βάρος**

$$\gamma = \rho g$$

σε N/m³

Χρησιμοποιείται ευρέως σε προβλήματα στατικής ρευστών

Μεταβολή πυκνότητας

- **Μέτρο συμπιεστότητας**

$$k = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

σε $\text{Pa}^{-1} = \text{m}^2/\text{N}$

Εκφράζει την εξάρτηση της πυκνότητας από την πίεση

- **Συντελεστής κυβικής διαστολής**

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

σε K^{-1}

Εκφράζει την εξάρτηση της πυκνότητας από τη θερμοκρασία

Το $(-)$ τίθεται γιατί ο λόγος $\partial \rho / \partial T$ είναι συνήθως αρνητικός

- Για τέλεια αέρια

- Καταστατική εξίσωση τελείων αερίων

$$p = \rho R^* T$$



$$k = \frac{1}{p}$$
$$\beta = \frac{1}{T}$$

Ιξώδες (συνεκτικότητα)

Φυσική αίσθηση

- Αύξηση του ιξώδους κάνει το ρευστό πιο παχύρρευστο ενώ μείωσή του το κάνει πιο λεπτόρρευστο

Διαισθητικός ορισμός

- Η ιδιότητα των ρευστών που τους δίνει τη δυνατότητα να αντιστέκονται σε κάθε προσπάθεια αλλαγής της μορφής τους (παραμόρφωση ή διάτμηση)

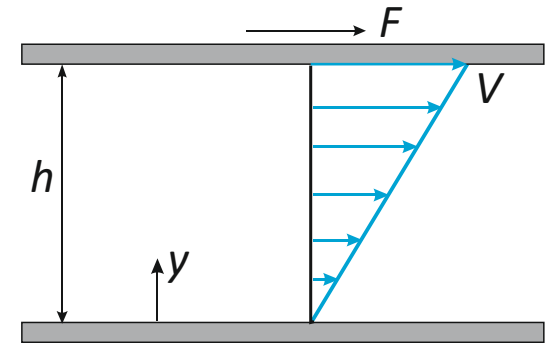
Μαθηματικός ορισμός

$$(\text{Διατμητική Τάση}) = (\text{Ιξώδες}) \times (\text{Ρυθμός Παραμόρφωσης})$$

(Διάτμησης)

Ιξώδες και ρυθμός παραμόρφωσης

- Ρευστό μεταξύ παράλληλων πλακών, σε απόσταση h , όπου στην πάνω πλάκα (εμβαδού A) ασκείται διατμητική δύναμη F
- Το ρευστό σε επαφή με την κάτω πλάκα παραμένει ακίνητο (συνθήκη μη-ολίσθησης)
- Το ρευστό σε επαφή με την πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα V



$$\text{(Διατμητική Τάση)} \quad \tau = \frac{F}{A} \quad \text{(Ρυθμός Παραμόρφωσης)} \quad = \frac{V}{h}$$

$$\tau = \mu \frac{V}{h}$$

εναλλακτικά

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

μ : (δυναμικό) **ιξώδες**

- **Κινηματικό ιξώδες**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Νόμος ιξώδους
του Newton

Ιξώδες – Μονάδες

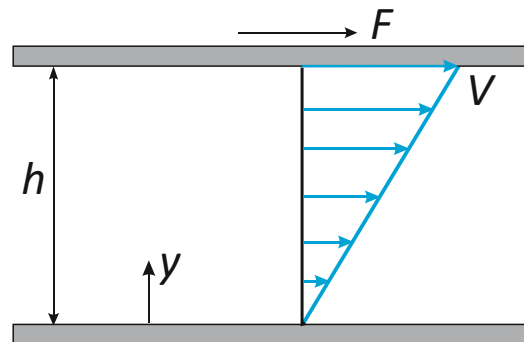
- Δυναμικό ιξώδες σε SI: **Pa·s** ($= \text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2 = \text{kg} / (\text{m} \cdot \text{s})$)
- Εναλλακτική μονάδα για δυναμικό ιξώδες:
(poise) **P** = 0.1 Pa·s και (centipoise) **cp** = 10^{-2} P = 10^{-3} Pa·s
Ιξώδες νερού σε 20°C ≈ 1 cp
- Κινηματικό ιξώδες σε SI: **m²/s**
- Εναλλακτική μονάδα για κινηματικό ιξώδες:
(stokes) St = 1 cm²/s = 10^{-4} m²/s

Παράδειγμα 1

Υπολογισμός ιξώδους Νευτωνικού ρευστού

Ένα ρευστό ρέει μεταξύ δύο παράλληλων πλακών εμβαδού $A = 0.1 \text{ m}^2$ η καθεμιά που απέχουν απόσταση $h = 2 \text{ cm}$, υπό την επίδραση διατμητικής δύναμης $F = 1 \text{ N}$ στην πάνω πλάκα.

Αν η ταχύτητα της πάνω πλάκας μετρηθεί ίση με $V = 2 \text{ m/s}$, να υπολογιστεί το ιξώδες του ρευστού.



Παράδειγμα 1 – Λύση

Ανάλυση

Η διατμητική τάση δίνεται από τη σχέση: $\tau = \mu \frac{V}{h}$

Η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του ιξώδους μ

Λύση

Διατμητική τάση: $\tau = \frac{F}{A} = \frac{1 \text{ N}}{0.1 \text{ m}^2} = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10 \text{ Pa}$

Ιξώδες: $\tau = \mu \frac{V}{h} \Rightarrow \mu = \frac{\tau h}{V} = \frac{10 \text{ Pa} \times 0.02 \text{ m}}{2 \text{ m/s}} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

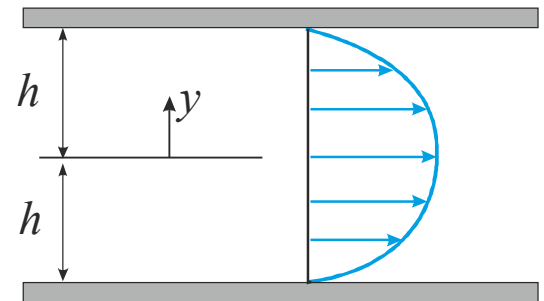
Παράδειγμα 2

Διατμητική τάση σε Νευτωνικά ρευστά

Η κατανομή ταχύτητας της ροής ενός Νευτωνικού ρευστού ανάμεσα σε δύο ακίνητες παράλληλες πλάκες δίνεται από τη σχέση:

$$u(y) = \frac{3V}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

όπου V είναι η μέση ταχύτητα.



Να υπολογιστεί η διατμητική τάση που ασκείται:

- (α) στην κάτω πλάκα,
- (β) σε επίπεδο παράλληλο προς τις δύο πλάκες που διέρχεται από τη μέση απόσταση μεταξύ των πλακών.

Δίνονται: $V = 0.61 \text{ m/s}$, $\mu = 1.915 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ και $h = 5 \text{ mm} (= 0.005 \text{ m})$

Παράδειγμα 2 – Λύση

Ανάλυση

Η διατμητική τάση δίνεται από τη σχέση $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

Με δεδομένο το προφίλ της ταχύτητας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω σχέση για τον υπολογισμό της διατμητικής τάσης στις δύο διαφορετικές θέσεις

Λύση

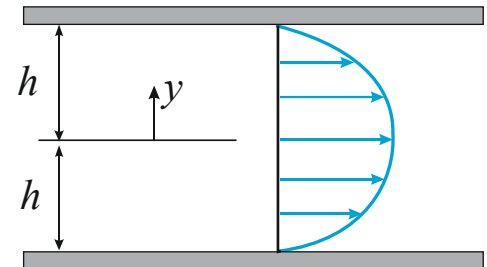
$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{3V}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \right) = -\frac{3V}{h^2} y \quad \Rightarrow$$

(α) Στη θέση $y = -h$

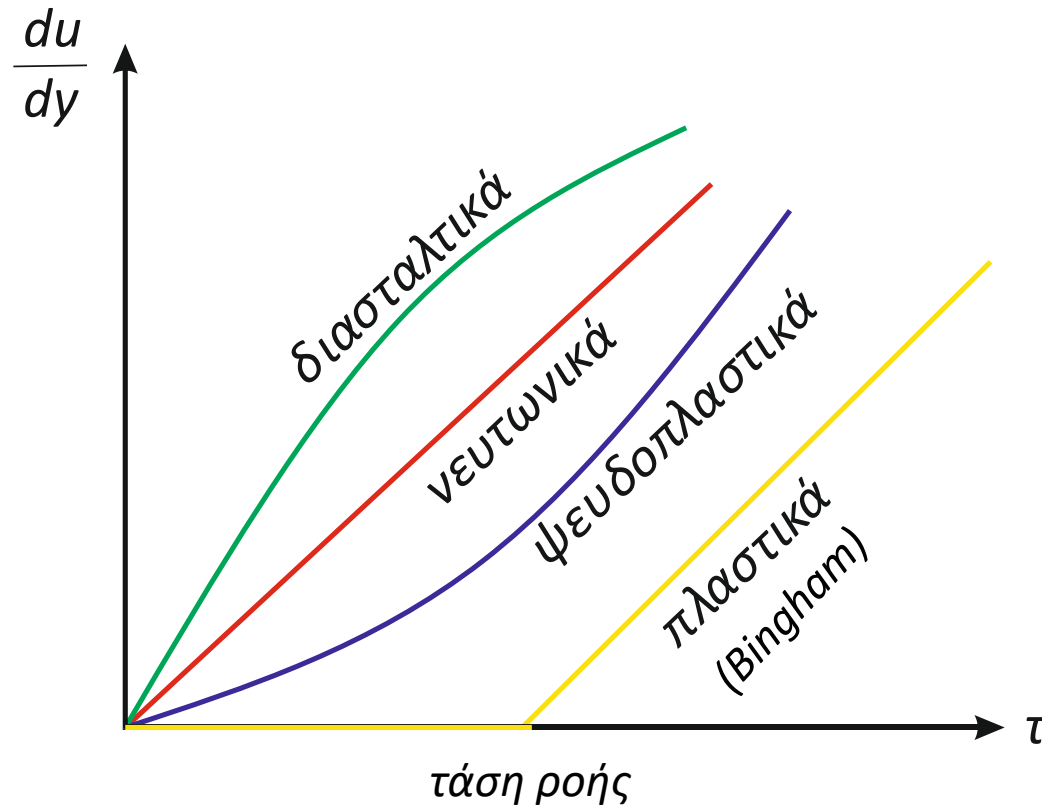
$$\tau_{bottom} = -\mu \frac{3V}{h^2} (-h) = \mu \frac{3V}{h} = 1.915 \times \frac{3 \times 0.61}{0.005} = 700.9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

(β) Στη θέση $y = 0$

$$\tau_{mid} = -\mu \frac{3V}{h^2} (0) = 0 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

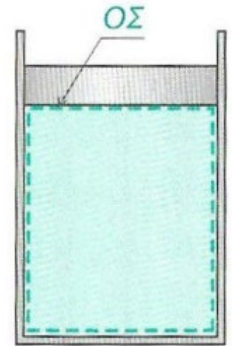


Νευτωνικά και μη-Νευτωνικά ρευστά



Ορισμός και χαρακτηριστικά συστήματος

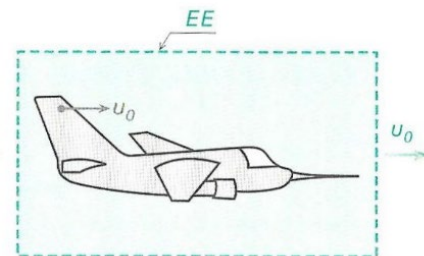
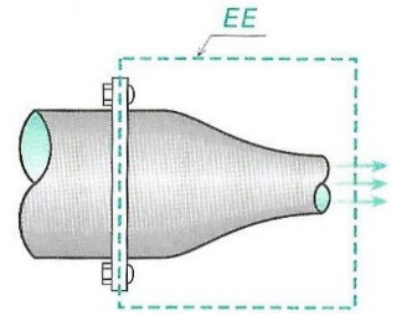
- **Σύστημα (Σ)**: Μια διακεκριμένη ποσότητα ύλης η μάζα της οποίας διατηρείται σταθερή με το χρόνο
 - **Πεπερασμένο** σύστημα (αρκετά μεγάλο)
 - **Απειροστό** σύστημα (π.χ. ένα σωματίδιο ρευστού)
- **Περιβάλλον**: Καθετί που δεν ανήκει στο σύστημα
- **Όρια Συστήματος (ΟΣ)**: Επιφάνεια (πραγματική ή υποθετική) η οποία χωρίζει το σύστημα από το περιβάλλον
 - Αδιαπέραστα από μάζα (ορισμός συστήματος) διαπερατά από ενέργεια (θερμότητα, έργο)
 - **Θερμικά μονωμένο** σύστημα: Αδιαπέραστα από θερμότητα
 - **Απομονωμένο** σύστημα: Αδιαπέραστα από θερμότητα και έργο



Η έννοια του συστήματος είναι πιο κατάλληλη για μελέτη σωμάτων που έχουν σταθερή μάζα και η ταυτοποίησή τους είναι εύκολη. Π.χ. Μηχανική στερεών σωμάτων

Ορισμός και χαρακτηριστικά όγκου ελέγχου

- **Όγκος Ελέγχου (ΟΕ):** Μια ορισμένη περιοχή του χώρου διαμέσου της οποίας συμβαίνει ροή μάζας
 - Πεπερασμένος ΟΕ (αρκετά μεγάλος)
 - Απειροστός ΟΕ ($dV = dx \cdot dy \cdot dz$)
 - Αδρανειακός ΟΕ (ακίνητος)
 - Μη αδρανειακός ΟΕ
- **Περιβάλλον:** Καθετί που βρίσκεται εκτός του ΟΕ
- **Επιφάνεια Ελέγχου (ΕΕ):** Η επιφάνεια (πραγματική ή υποθετική) η οποία περικλείει τον όγκο ελέγχου
 - Διαπερατή από μάζα και ενέργεια
 - Η μάζα είναι φορέας ορμής και ενέργειας



Νόμος διατήρησης της μάζας

Η μάζα ενός συστήματος παραμένει σταθερή στο χρόνο, ανεξάρτητα από το είδος της διεργασίας την οποία υφίσταται το σύστημα

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_\Sigma = 0$$

Ο νόμος διατήρησης της μάζας εκφρασμένος σε έναν όγκο ελέγχου εκφράζει το **ισοζύγιο μάζας**

Δεύτερος νόμος κίνησης του Newton

Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες ασκούνται πάνω σε ένα σύστημα από το περιβάλλον του είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma}$$

- Ορμή συστήματος

$$\mathbf{P} = m\mathbf{u}$$

διανυσματικό μέγεθος με καρτεσιανές συνιστώσες

$$P_x = mu_x, \quad P_y = mu_y, \quad P_z = mu_z$$

Ο δεύτερος νόμος κίνησης του Newton εκφρασμένος σε έναν όγκο ελέγχου εκφράζει το **ισοζύγιο ορμής**

Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

Η διαφορά μεταξύ καθαρού ποσού θερμότητας που προστίθεται σε ένα σύστημα από το περιβάλλον (δQ) και του καθαρού ποσού έργου που αποδίδεται από το σύστημα στο περιβάλλον (δW) κατά τη διάρκεια μιας απειροστής διεργασίας είναι ίση με τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος (dE)

$$\delta Q - \delta W = dE \quad \text{ή} \quad \dot{q} - \dot{w} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_\Sigma$$

Μονάδες $Q, W, E \equiv \text{J}$

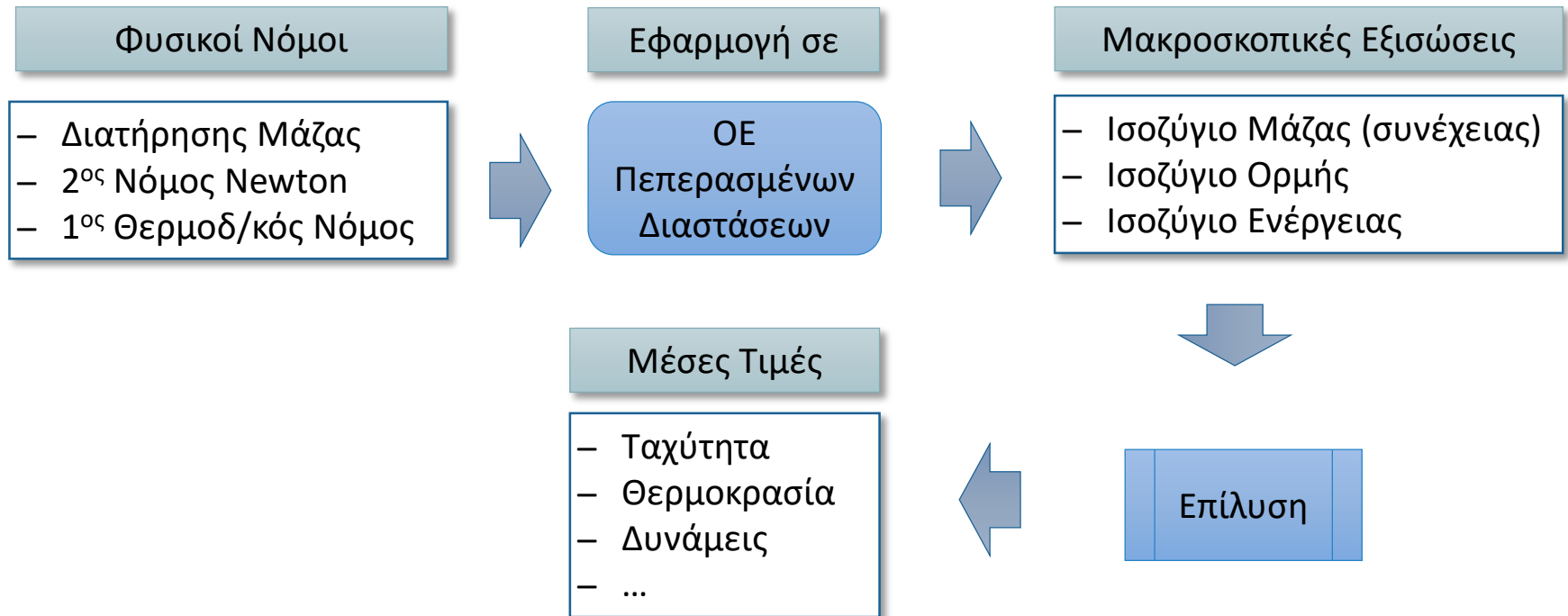
Μονάδες $\dot{q}, \dot{w} \equiv W = \text{J/s}$

- Σύμβαση για το πρόσημο της θερμότητας και του έργου

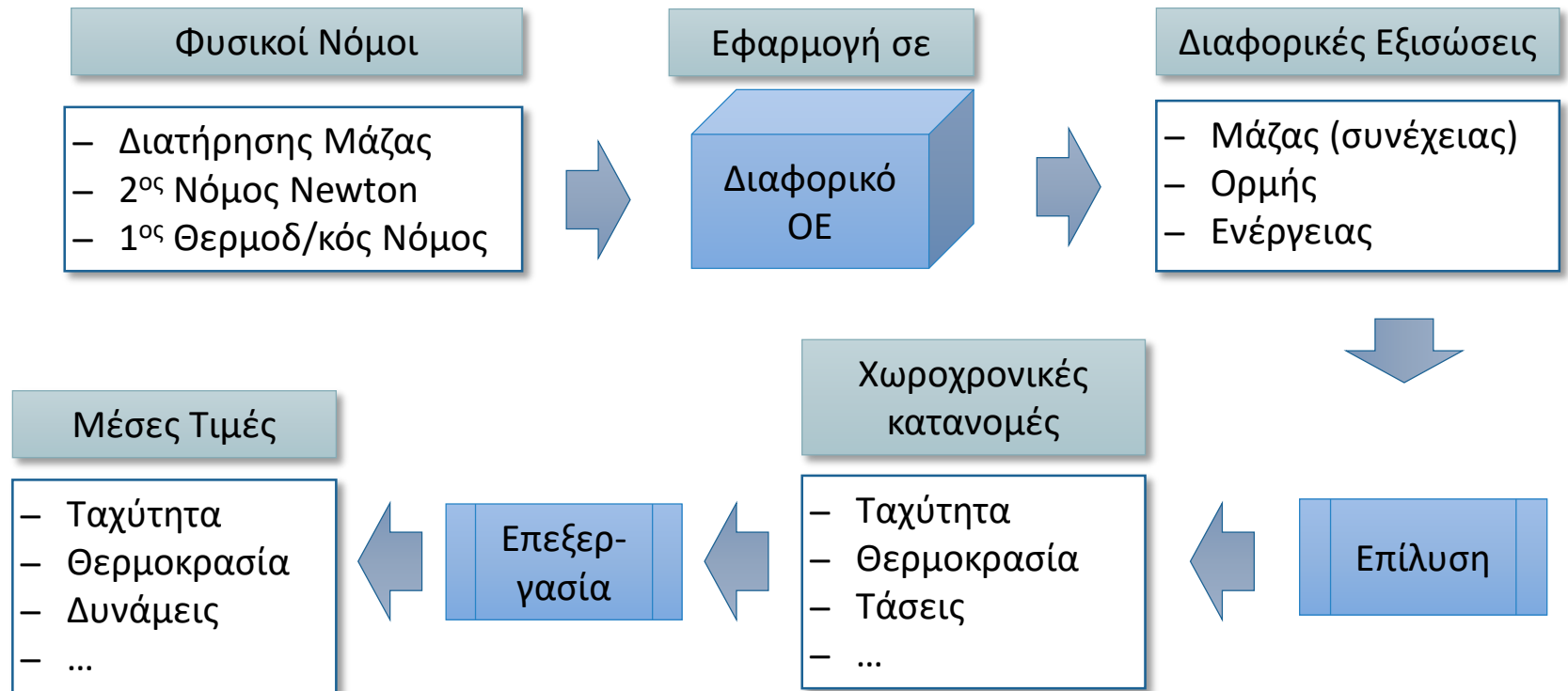


Ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος εκφρασμένος σε έναν όγκο ελέγχου εκφράζει το **ισοζύγιο ενέργειας**

Μακροσκοπική ανάλυση



Διαφορική ανάλυση



Ρευστομηχανική

3^η Διάλεξη

Στατική – Μεταβολή πίεσης σε
ρευστά

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Στατική ρευστών

- Ρευστό σε **ηρεμία**, ή
- Ρευστό που κινείται κατά τρόπο ώστε **να μην υπάρχει σχετική κίνηση** μεταξύ γειτονικών στοιχείων



- **Μηδενικός ρυθμός διάτμησης (παραμόρφωσης)**
- **Απουσία διατμητικών τάσεων**

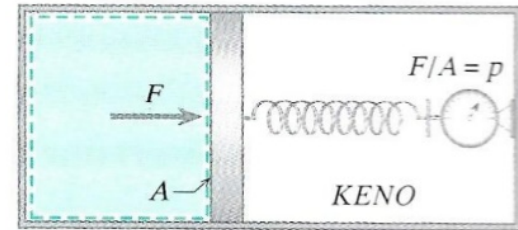


- Η μόνη επιφανειακή δύναμη είναι η **πίεση**
- Ταυτόχρονη παρουσία **σωματικών δυνάμεων** (π.χ. βαρύτητα)

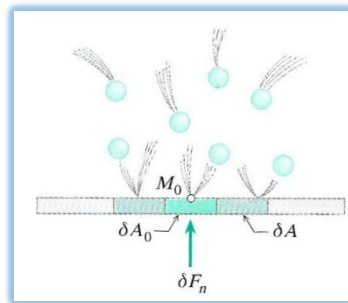
Πίεση

- Ο λόγος της δύναμης που ασκείται από το ρευστό **κάθετα** πάνω σε μια επιφάνεια προς το εμβαδό της επιφάνειας

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{σε Pa} = \text{N/m}^2$$



- Από μοριακή άποψη η πίεση προέρχεται από την πρόσκρουση των μορίων ρευστού στην επιφάνεια και τη μεταβολή της ορμής τους



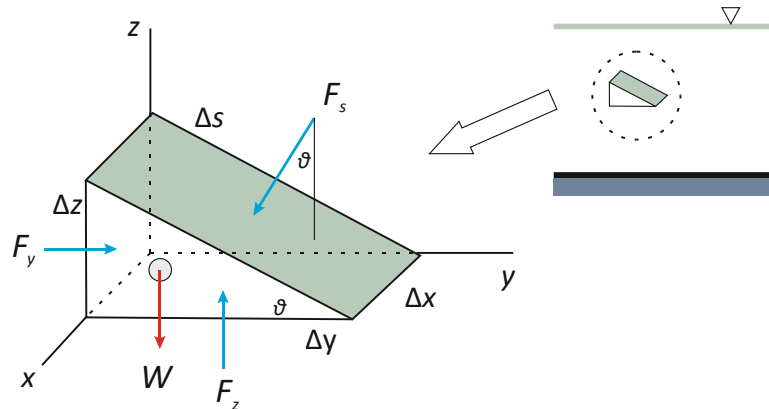
Πίεση σε σημείο 1/4

Ερώτηση

Πως εξαρτάται η πίεση σε ένα σημείο από τον προσανατολισμό της επιφάνειας;

- Στοιχείο ρευστού σχήματος τριγωνικής σφήνας **τυχαίας γωνίας ϑ** και σε τυχαία θέση εντός του ρευστού

Διάγραμμα
ελευθέρου
σώματος



$$F_y = p_y \Delta x \Delta z$$

$$F_z = p_z \Delta x \Delta y$$

$$F_s = p_s \Delta x \Delta s$$

$$W = \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g$$

- Δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό: 
 - Δυνάμεις **πίεσης** F_y, F_z, F_s (επιφανειακές δυνάμεις)
 - Βάρος** του ρευστού W (σωματική δύναμη)

Πίεση σε σημείο 2/4

- 2^{ος} νόμος κίνησης του Newton στη διεύθυνση y

$$(\Sigma F)_y = 0 \Rightarrow F_y - F_s \sin(\vartheta) = 0$$

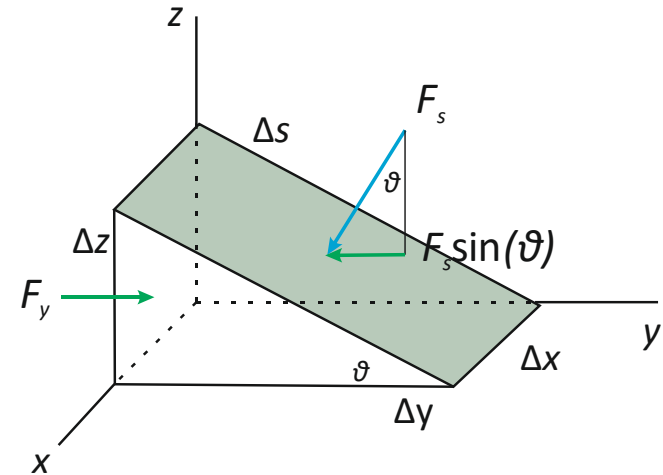
↓ $F_y = p_y \Delta x \Delta z \quad F_s = p_s \Delta x \Delta s$

$$p_y \Delta x \Delta z - p_s \Delta x \Delta s \sin(\vartheta) = 0$$

↓ $\Delta s \sin(\vartheta) = \Delta z$

$$p_y \Delta x \Delta z - p_s \Delta x \Delta z = 0 \Rightarrow p_y = p_s$$

$$\sin(\vartheta) = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_{s,y}}{F_s} = \frac{\Delta z}{\Delta s}$$



Πίεση σε σημείο 3/4

- 2^{ος} νόμος κίνησης του Newton στη διεύθυνση z

$$(\Sigma F)_z = 0 \Rightarrow F_z - F_s \cos(\vartheta) - W = 0$$

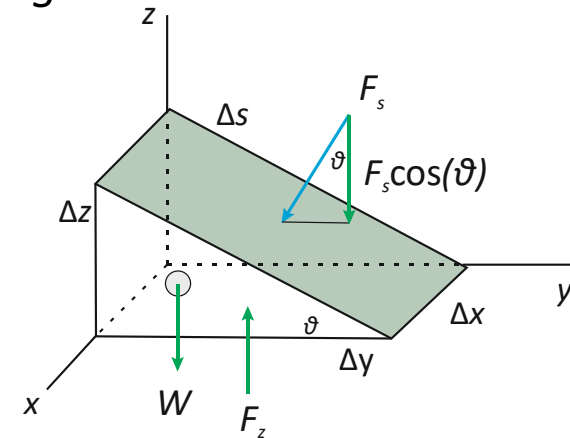
$$\cos(\vartheta) = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_{s,x}}{F_s} = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

↓ $F_z = p_z \Delta x \Delta y \quad F_s = p_s \Delta x \Delta s \quad W = \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g$

$$p_z \Delta x \Delta y - p_s \Delta x \Delta s \cos(\vartheta) - \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g = 0$$

↓ $\Delta s \cos(\vartheta) = \Delta y$

$$p_z \Delta x \Delta y - p_s \Delta x \Delta y - \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g = 0 \Rightarrow p_z = p_s + \frac{1}{2} \rho g \Delta z$$



Πίεση σε σημείο 4/4

- Συμπεράσματα

$p_y = p_s$ Η πίεση δε μεταβάλλεται κατά την y (και x) διεύθυνση

$p_z = p_s + \frac{1}{2}\rho g \Delta z$ Η πίεση μεταβάλλεται κατά τη z διεύθυνση ανάλογα με τα ρ , g και το βάθος

- Όταν το πρίσμα γίνεται σημείο ($\Delta x, \Delta y, \Delta z, \rightarrow 0$)

$$p_y = p_z = p_s = p$$

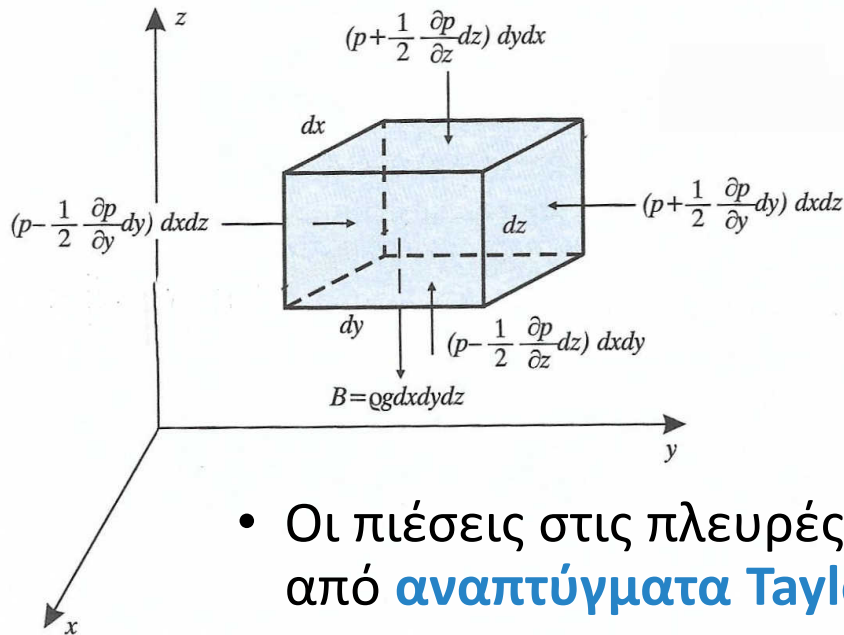
Απάντηση (Νόμος του Pascal)

Σε ένα ρευστό σε στατική ισορροπία, η πίεση σε ένα σημείο είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης της επιφάνειας

Βασική εξίσωση πεδίου πιέσεων 1/3

Ερώτηση

Πως μεταβάλλεται η πίεση από σημείο σε σημείο ενός ακίνητου ρευστού;



- Σωματίδιο ρευστού με διαστάσεις (dx, dy, dz)
- p : πίεση στο κέντρο του σωματιδίου

- Οι πιέσεις στις πλευρές του παραλληλεπιπέδου εκφράζονται από **αναπτύγματα Taylor**, αμελώντας όρους ανώτερης τάξης π.χ. πιέσεις κατά τη διεύθυνση y

$$\text{δεξιά πλευρά: } p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\text{αριστερή πλευρά: } p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

Βασική εξίσωση πεδίου πιέσεων 2/3

- Ισορροπία δυνάμεων (2^{ος} νόμος Newton) στην y -διεύθυνση

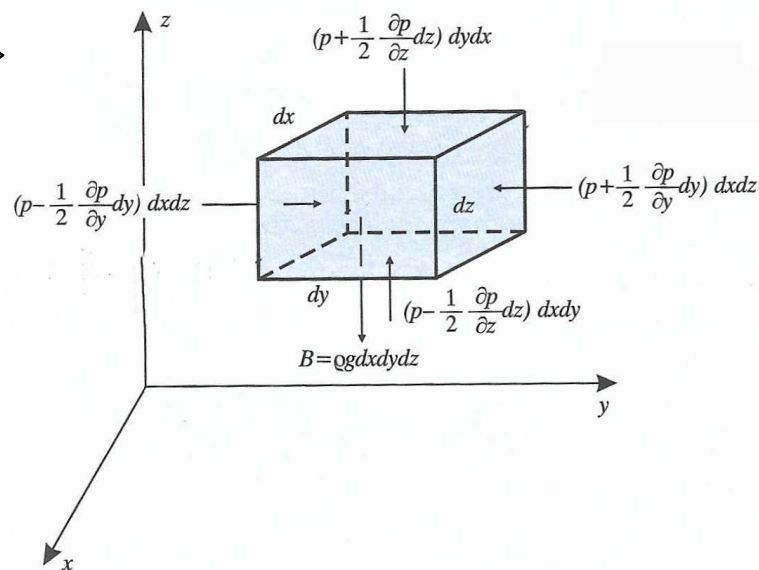
$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

- Ισορροπία δυνάμεων στη z -διεύθυνση

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \rho g dx dy dz = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$



Βασική εξίσωση πεδίου πιέσεων 3/3

- Εξισώσεις μεταβολής της πίεσης

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

εναλλακτικά

$$\nabla p + \rho g \mathbf{k} = 0$$

Απάντηση

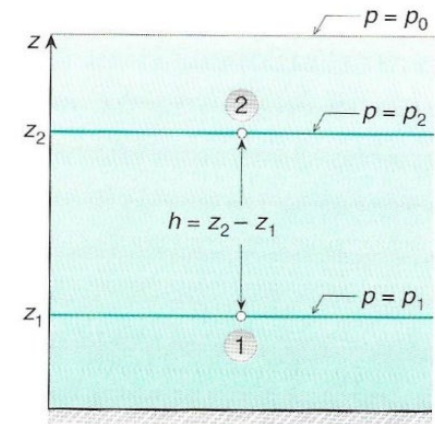
- Σε ένα ρευστό που ηρεμεί η πίεση είναι συνάρτηση μόνο του ύψους (διεύθυνση z)
- Η πίεση ελαττώνεται με αύξηση του z (μεγαλύτερη πίεση στα κατώτερα στρώματα του ρευστού)

Κατανομή πίεσης σε ασυμπίεστα ρευστά

- Ασυμπίεστο ρευστό (**υγρό** σε συνήθεις συνθήκες) $\rho = \text{σταθερή}$
- Ολοκλήρωση της $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ μεταξύ των θέσεων (υψών):
 - $z = z_1, \quad p = p_1$
 - $z = z_2, \quad p = p_2$

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \Rightarrow dp = -\gamma dz \Rightarrow$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \Rightarrow p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$$



Υδροστατική Κατανομή Πίεσης

$$p_1 = p_2 + \gamma(z_2 - z_1) = p_2 + \gamma h$$

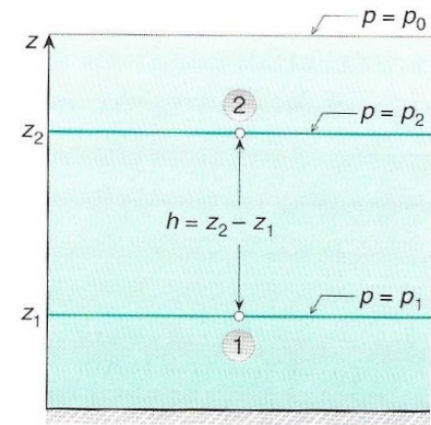
Ύψος πίεσης

- Η διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων μπορεί να υπολογιστεί αν είναι γνωστή η διαφορά στάθμης των δύο σημείων

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

- Ύψος πίεσης (pressure head) h

Το ύψος στήλης υγρού ειδικού βάρους γ που απαιτείται για να προκαλέσει διαφορά πίεσης $\Delta p = p_1 - p_2$



π.χ $\Delta p = 70 \text{ kPa}$ εκφράζεται ως $h = 7 \text{ μέτρα στήλης ύδατος (mH}_2\text{O)}$, ή
 $h = 520 \text{ mm στήλης υδραργύρου (mmHg)}$

Αρχή υδροστατικής

- Κατά τη μελέτη υγρών, χρησιμοποιείται ως επίπεδο αναφοράς η ελεύθερη επιφάνεια
- Η πίεση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (p_0) αποτελεί **πίεση αναφοράς**
- Η πίεση σε βάθος h από ελεύθερη επιφάνεια είναι:

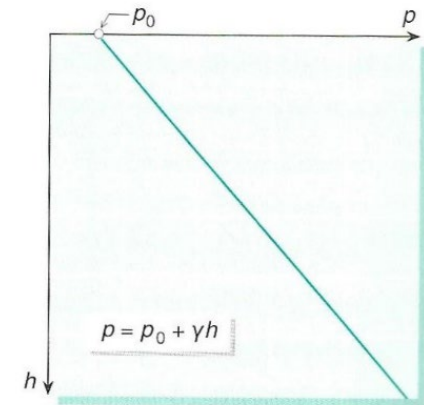
Αρχή Υδροστατικής

Απόλυτη πίεση

$$p = p_0 + \gamma h$$

Σχετική (μανομετρική) πίεση

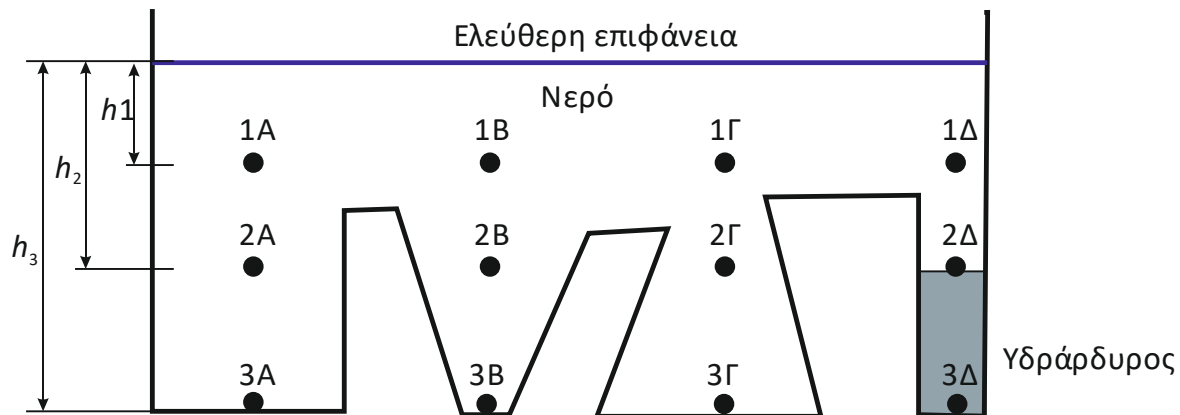
$$p - p_0 = \gamma h$$



Η υδροστατική πίεση εξαρτάται γραμμικά από το βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια και είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος και το σχήμα του δοχείου

Παράδειγμα κατανομής υδροστατικής πίεσης

- Τα σημεία (1Α, 1Β, 1Γ και 1Δ) βρίσκονται στο ίδιο βάθος νερού (h_1) και έχουν την ίδια πίεση
- Τα σημεία (2Α, 2Β, 2Γ και 2Δ) βρίσκονται στο ίδιο βάθος νερού (h_2) και έχουν την ίδια πίεση
- Τα σημεία (3Α, 3Β, και 3Γ) βρίσκονται στο ίδιο βάθος νερού (h_3) και έχουν την ίδια πίεση
- Το σημείο 3Δ αν και βρίσκεται στο ίδιο βάθος με τα 3Α, 3Β, 3Γ δεν έχει τη ίδια πίεση γιατί βρίσκεται σε διαφορετικό ρευστό

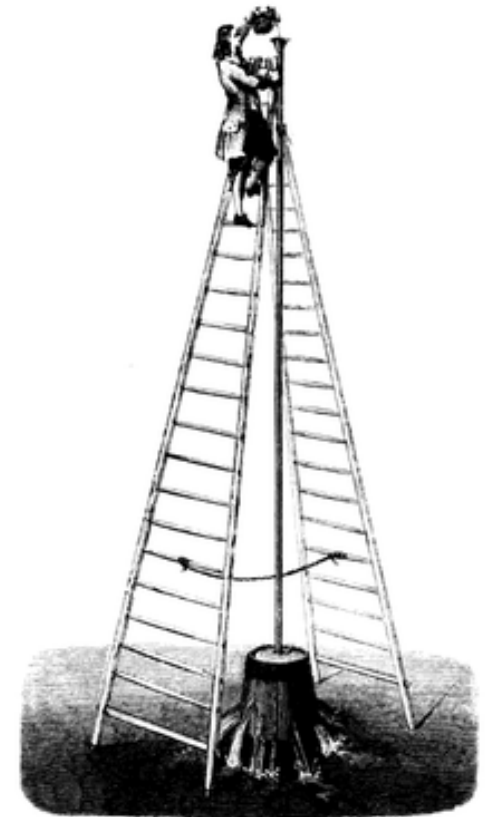


Το βαρέλι του Pascal

Το 1646 ο Blaise Pascal (1623-1662) έκανε ένα εντυπωσιακό για την εποχή πείραμα που χαρακτηρίστηκε ως υδροστατικό παράδοξο:

- Στην πάνω επιφάνεια ενός βαρελιού που περιείχε νερό όγκου 1000 L, άνοιξε μια μικρή τρύπα και προσάρμοσε σε αυτήν ένα λεπτό κατακόρυφο σωλήνα αρκετών μέτρων.
- Όταν γέμισε τον κατακόρυφο σωλήνα με νερό, τα τοιχώματα του βαρελιού άνοιξαν και το νερό χύθηκε έξω.

Το φαινόμενο αυτό λαμβάνοντας υπόψη την αύξηση της πίεσης που προκαλείται σε ένα σημείο της πλευρικής επιφάνειας του βαρελιού λόγω του μεγάλου ύψους του σωλήνα



Υδραυλικές μηχανές

- Η πίεση στα δύο άκρα (έμβολα) είναι ίση

$$p_1 = p_2 = p$$

- Η δύναμη F_1 «μεταβιβάζεται» ως:

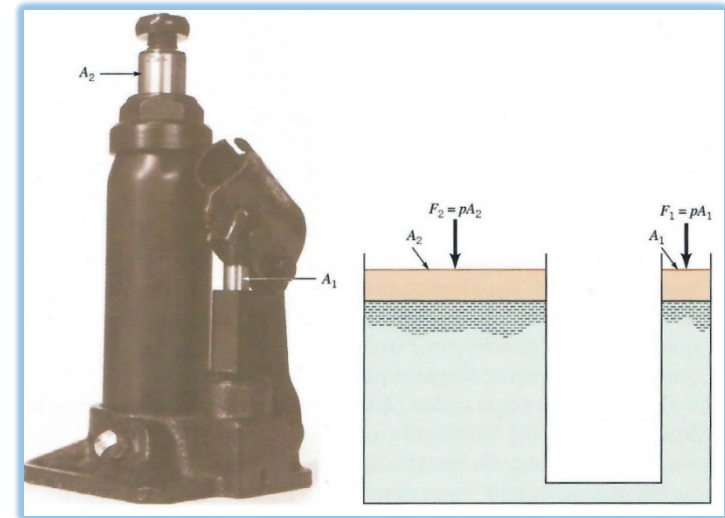
$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

- Παράδειγμα

Αν οι ακτίνες των δύο εμβόλων είναι $r_1 = 2 \text{ cm}$ και $r_2 = 20 \text{ cm}$, πόση δύναμη F_1 απαιτείται για την ανύψωση οχήματος μάζας $m = 1500 \text{ kg}$

$$F_2 = mg, \quad A_1 = \pi r_1^2, \quad A_2 = \pi r_2^2$$

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} = mg \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 1500 \times 9.807 \times \left(\frac{0.02}{0.2} \right)^2 = 147.1 \text{ N} = 15 \text{ kg}_f$$

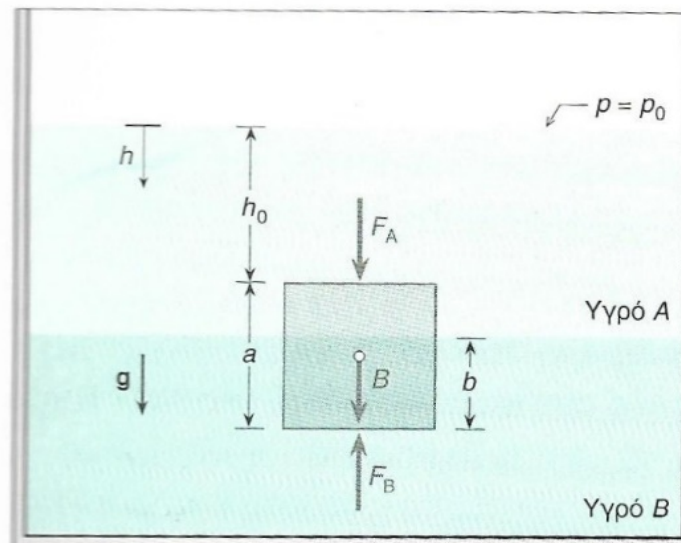


Παράδειγμα 1

Εφαρμογή θεμελιώδους αρχής Υδροστατικής

Ένα στερεό σώμα σε σχήμα κύβου, πλευράς $a = 25 \text{ cm}$ και πυκνότητας $\rho = 1225 \text{ kg/m}^3$, ισορροπεί μεταξύ δύο μη αναμείξιμων υγρών A και B. Οι πυκνότητες των δύο υγρών είναι $\rho_A = 680 \text{ kg/m}^3$ και $\rho_B = 1600 \text{ kg/m}^3$.

Να υπολογιστεί το ύψος b του στερεού σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό B.



Παράδειγμα 1 – Λύση 1/2

Ανάλυση

Το στερεό ισορροπεί κάτω από την επίδραση των δυνάμεων:

- i) Βάρος σώματος B (κατακόρυφη δύναμη)
- ii) Δυνάμεις πίεσης στην πάνω F_A και κάτω πλευρά F_B (κατακόρυφες δυνάμεις)
- iii) Δυνάμεις πίεσης στην αριστερή και δεξιά πλευρά (οριζόντιες δυνάμεις)

Λύση

Εξετάζεται η συνισταμένη των κατακόρυφων δυνάμεων, η οποία πρέπει να είναι 0

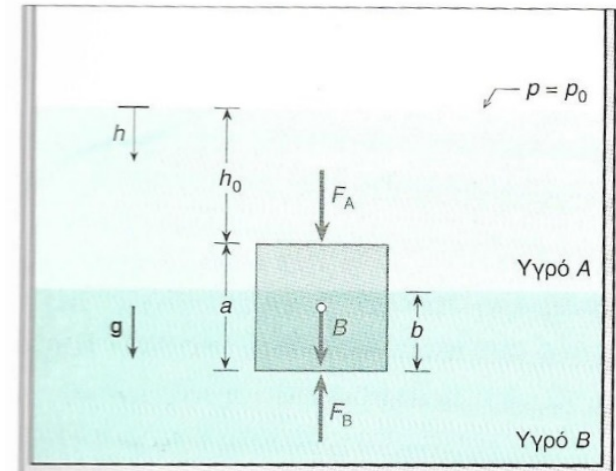
$$F_A + B - F_B = 0$$

Όπου:

$$B = \rho g a^3$$

$$F_A = p_A a^2 = (p_0 + \rho_A g h_0) a^2$$

$$F_B = p_B a^2 = (p_0 + \rho_A g (h_0 + a - b) + \rho_B g b) a^2$$



Παράδειγμα 1 – Λύση 2/2

Αντικαθιστώντας τις επιμέρους δυνάμεις στην έκφραση ισορροπίας και επιλύοντας ως προς b προκύπτει:

$$b = \frac{\rho - \rho_A}{\rho_B - \rho_A} a$$

Με αριθμητική αντικατάσταση

$$b = \frac{1225 - 680}{1600 - 680} \times 0.25 = 0.148 \text{ m}$$

Κατανομή πίεσης σε συμπιεστά ρευστά 1/2

- Συμπιεστά ρευστά (**κυρίως αέρια**), $\rho = f(p, T)$
- Για μικρές τιμές της πυκνότητας (και ειδικού βάρους) η μεταβολή της πίεσης είναι μικρή και για μικρές μεταβολές του ύψους η πίεση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή
- Τέλεια αέρια: $p = \rho R^* T \Rightarrow \rho = \frac{p}{R^* T}$
- Ολοκλήρωση της $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ μεταξύ των θέσεων (υψών):
 - $z = z_1, \quad p = p_1$
 - $z = z_2, \quad p = p_2$
$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g}{R^*} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}\right)$$
- Πρέπει να καθοριστεί ο **τρόπος μεταβολής της θερμοκρασίας με το ύψος**

Κατανομή πίεσης σε συμπιεστά ρευστά 2/2

- Περίπτωση 1: **Σταθερή τιμή της θερμοκρασίας σε όλο το ύψος** ($T = T_0$)

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g(z_2 - z_1)}{R^* T_0}\right)$$

- Περίπτωση 2: **Γραμμική κατανομή** $T = T_0 - az$
 - Ισχύει με μεγάλη ακρίβεια στην **τροπόσφαιρα** (κατώτερο τμήμα ατμόσφαιρας πάχους ≈ 11 km)
 - T_0 : θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας ($z = 0$)
 - a : Ρυθμός μεταβολής θερμοκρασίας με το ύψος (σε K/m)

$$p = p_0 \left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{g/aR^*}$$

- p_0 : Πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας ($z = 0$)
- p : πίεση σε ύψος z

Τυπική ατμόσφαιρα

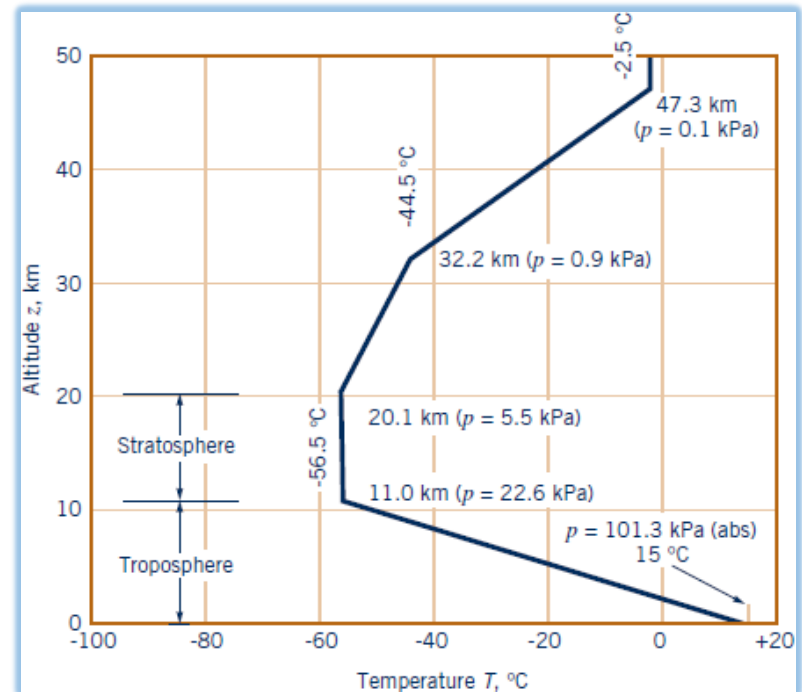
- Οι συνθήκες της ατμόσφαιρας είναι διαφορετικές σε κάθε περιοχή και χρονική περίοδο

Τυπική Ατμόσφαιρα

Ιδεατή αναπαράσταση των συνθηκών στη γήινη ατμόσφαιρα σε ένα μέσο υψόμετρο και όλη τη διάρκεια του έτους

Ιδιότητες τυπικής ατμόσφαιρας στην επιφάνεια της θάλασσας

Μέγεθος	Τιμή
Θερμοκρασία (T_0)	288.15 K (15°C)
Πίεση (p_0)	101.33 kPa (1 atm)
Πυκνότητα (ρ_0)	1.225 kg/m ³
Ιξώδες (μ_0)	1.789×10 ⁻⁵ Pa·s



$$\alpha = 0.0065 \text{ K/m}$$

$$g = 9.807 \text{ m/s}^2$$

$$R^* = 286.9 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$$

Παράδειγμα 2

Πίεση ατμόσφαιρας σε υψόμετρο

- (α) Να υπολογιστεί η θερμοκρασία και η πίεση του ατμοσφαιρικού αέρα σε υψόμετρο $z = 4000 \text{ m}$.
- (β) Ο ανθρώπινος οργανισμός, προκειμένου να υποστηρίξει τις διεργασίες μεταβολισμού, χρειάζεται σταθερή ποσότητα (μάζα) αέρα ανά μονάδα χρόνου. Αν ένας άνθρωπος εισπνέει 16 φορές το λεπτό στην επιφάνεια της θάλασσας, πόσος πρέπει να είναι ο ρυθμός αναπνοής όταν βρίσκεται σε υψόμετρο 4000 m .

Παράδειγμα 2 – Λύση 1/2

(α) Θερμοκρασία και πίεση σε υψόμετρο

Η θερμοκρασία σε υψόμετρο z δίνεται από:

$$T_z = T_0 - \alpha z \quad \begin{array}{l} T_0 = 288.15 \text{ K} \\ \alpha = 0.0065 \text{ K/m} \end{array}$$

Με αντικατάσταση:

$$T_z = 288.15 - 0.0065 \times 4000 = 262.15 \text{ K} \quad (= -11^\circ\text{C})$$

Η πίεση σε υψόμετρο z δίνεται από:

$$p_z = p_0 \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0} \right)^{g/\alpha R^*} \quad \begin{array}{l} p_0 = 101.33 \text{ kPa} \\ g = 9.807 \text{ m/s}^2 \\ R^* = 286.9 \text{ J/kg}\cdot\text{K} \end{array}$$

Με αντικατάσταση:

$$p_z = 101.33 \times \left(1 - \frac{0.0065 \times 4000}{288.15} \right)^{9.807/0.0065 \times 286.9} = 61.64 \text{ kPa} \quad (= 0.608 \text{ atm})$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 2/2

(β) Ρυθμός αναπνοής σε υψόμετρο

Ρυθμός εισπνοής μάζας αέρα (kg/min):

$$\dot{m}_a = b V \rho$$

b = ρυθμός αναπνοής (αναπνοές/min)
 V = όγκος αέρα ανά αναπνοή ($\text{m}^3/\text{αναπνοή}$)
 ρ = πυκνότητα αέρα (kg/m^3)

- Ο όγκος του αέρα ανά αναπνοή παραμένει σταθερός (V)
- Η πυκνότητα του αέρα μεταβάλλεται με το ύψος ($\rho_0 \rightarrow \rho_z$)
- Για να παραμένει σταθερός ο ρυθμός εισπνοής μάζας αέρα πρέπει να αλλάζει ο ρυθμός αναπνοής ($b_0 \rightarrow b_z$)

$$b_0 V \rho_0 = b_z V \rho_z \Rightarrow b_z = b_0 \frac{\rho_0}{\rho_z}$$

$0 \rightarrow$ επιφάνεια θάλασσας
 $z \rightarrow$ υψόμετρο

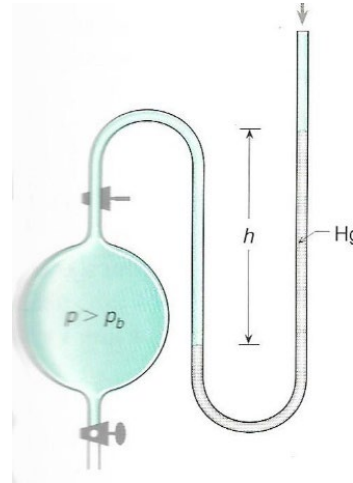
$$b_z = b_0 \frac{\rho_0 / R^* T_0}{\rho_z / R^* T_z} = b_0 \frac{\rho_0}{\rho_z} \frac{T_z}{T_0} = 16 \times \frac{101.33}{61.64} \times \frac{262.15}{288.15} = 23.9 \approx 24 \text{ αναπνοές / min}$$

Όργανα μέτρησης στατικής πίεσης

- Ανοιχτό Μανόμετρο

Μέτρηση **σχετική πίεσης**

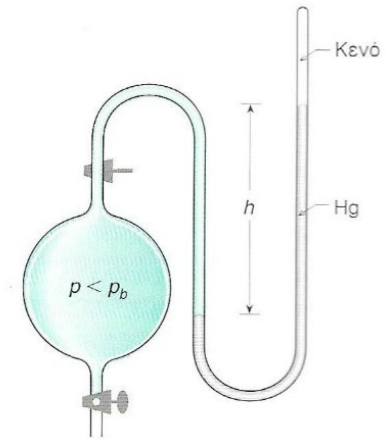
$$p - p_0 = \rho g h = \gamma h$$



- Κλειστό Μανόμετρο

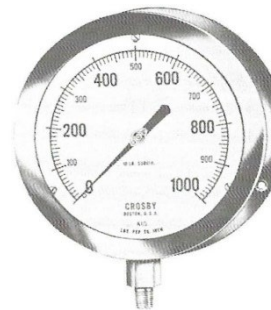
Μέτρηση **απόλυτης πίεσης**

$$p = \rho g h = \gamma h$$



- Ηλεκτρονικοί Μετρητές

«Έξυπνοι μετρητές» με αυτόματη αποθήκευση μετρήσεων

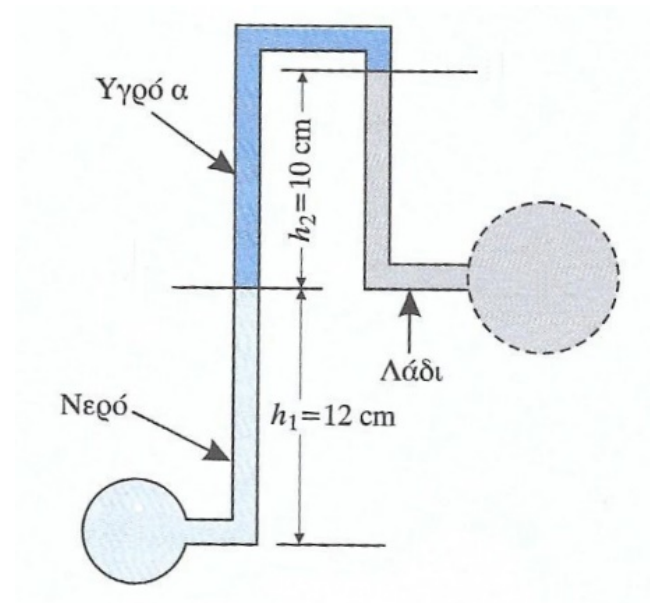


Παράδειγμα 3

Πίεση σωλήνα

Να υπολογιστεί η πίεση στο σωλήνα λαδιού όταν η πίεση στο δοχείο νερού είναι 10 kPa.

Δίνονται: $\gamma_{\text{νερού}} = 9810 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{\text{λαδιού}} = 8436 \text{ N/m}^3$, $\gamma_a = 6670 \text{ N/m}^3$

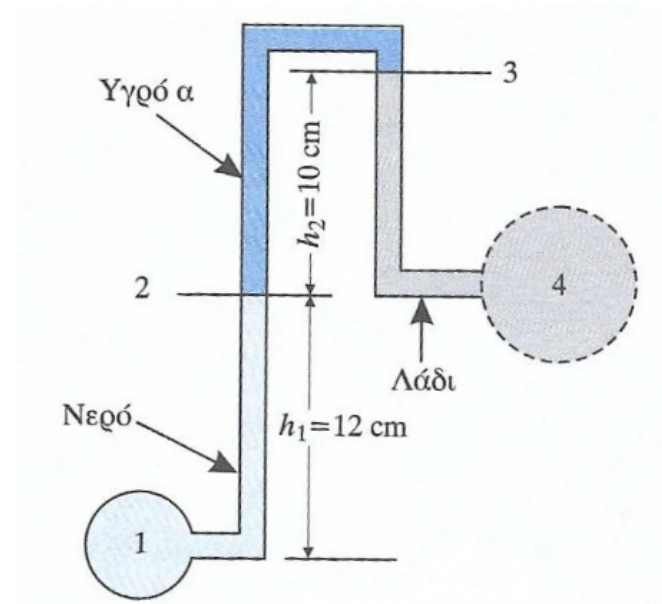


Παράδειγμα 3 – Λύση 1/3

Βήμα 1 – Ορισμός σημείων

Ορίζονται σημεία όπου

- (i) ζητείται ή είναι γνωστή η πίεση (1, 4) ($p_1 = 10 \text{ kPa}$, $p_4 = ?$)
- (ii) υπάρχει διαχωριστική επιφάνεια ρευστών (2, 3)



Παράδειγμα 3 – Λύση 2/3

Βήμα 2 – Υπολογισμός πίεσης (Α τρόπος)

Υπολογίζουμε τη διαφορά πίεσης διαδοχικών σημείων, ξεκινώντας από τη γνωστή και τελειώνοντας στην άγνωστη, και αθροίζουμε

$$p_1 - p_2 = \gamma_{\text{νερού}} h_1$$

$$p_2 - p_3 = \gamma_a h_2$$

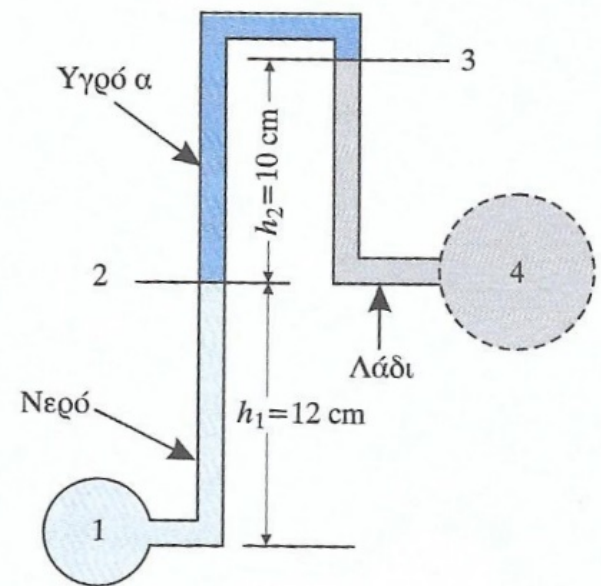
$$p_3 - p_4 = -\gamma_{\text{λαδιού}} h_2 \quad (+)$$

$$p_1 - p_4 = \gamma_{\text{νερού}} h_1 + \gamma_a h_2 - \gamma_{\text{λαδιού}} h_2 \Rightarrow$$

$$p_4 = p_1 - \gamma_{\text{νερού}} h_1 - \gamma_a h_2 + \gamma_{\text{λαδιού}} h_2$$



$$p_4 = 10000 \text{ Pa} - 9810 \times 0.12 - 6670 \times 0.1 + 84436 \times 0.1 = 9000 \text{ Pa} = 9 \text{ kPa}$$



Παράδειγμα 3 – Λύση 3/3

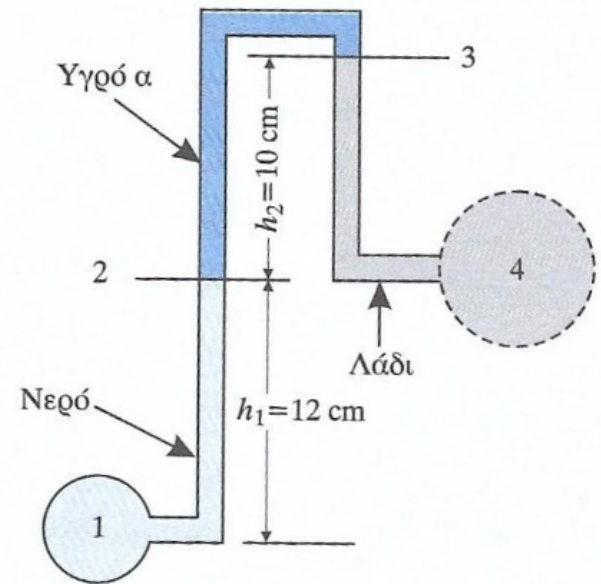
Βήμα 2 – Υπολογισμός πίεσης (B τρόπος)

Αρχίζουμε από τη γνωστή πίεση και

- προσθέτουμε πίεση όταν η στήλη είναι προς τα κάτω
- αφαιρούμε πίεση όταν η στήλη είναι προς τα πάνω

μέχρι να φτάσουμε στην άγνωστη πίεση

$$p_1 - \gamma_{\text{νερού}} h_1 - \gamma_a h_2 + \gamma_{\text{λαδιού}} h_2 = p_4$$



Ρευστομηχανική

4^η Διάλεξη

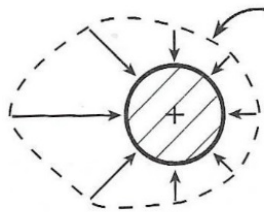
Στατική – Δυνάμεις σε επιφάνειες

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Κατανομή πίεσης και δύναμη σε επιφάνεια

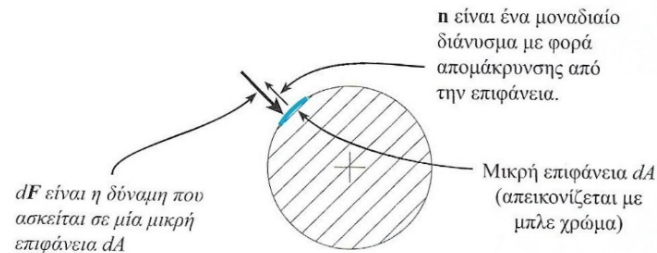
- **Κατανομή πίεσης**: ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η πίεση, από σημείο σε σημείο, κατά μήκος μιας επιφάνειας



Κατανομή πίεσης: Περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η πίεση από σημείο σε σημείο κατά μήκος μιας επιφάνειας (σε αυτό το παράδειγμα η πίεση είναι μεγάλη στο μπροστινό μέρος και μικρή στο πίσω μέρος)

- **Δύναμη** που ασκείται σε **στοιχειώδες τμήμα** της επιφάνειας dA

$$d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dA$$



- **Συνολική δύναμη** που ασκείται στην επιφάνεια A

$$\mathbf{F}_R = \int_A d\mathbf{F} = - \int_A p\mathbf{n}dA$$

Η δύναμη ασκείται σε ένα σημείο που ονομάζεται **κέντρο πίεσης**

Δύναμη σε οριζόντια επίπεδη επιφάνεια

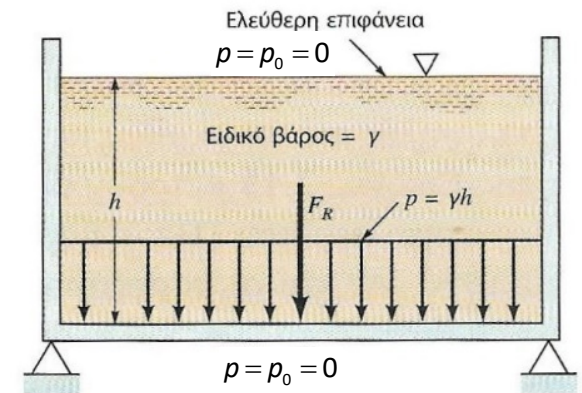
- Σε οριζόντιες επιφάνειες η κατανομή της υδροστατικής πίεσης είναι **ομοιόμορφη**
- Η δύναμη είναι **κατακόρυφη** με φορά προς την επιφάνεια
- **Μέτρο** της δύναμης:

$$F_R = \int_A p dA = p \int_A dA \Rightarrow F_R = p A$$

όπου: $p = p_0 + \gamma h$ ή $p = \gamma h$

- Η δύναμη **ασκείται στο κέντρο βάρους** της επιφάνειας

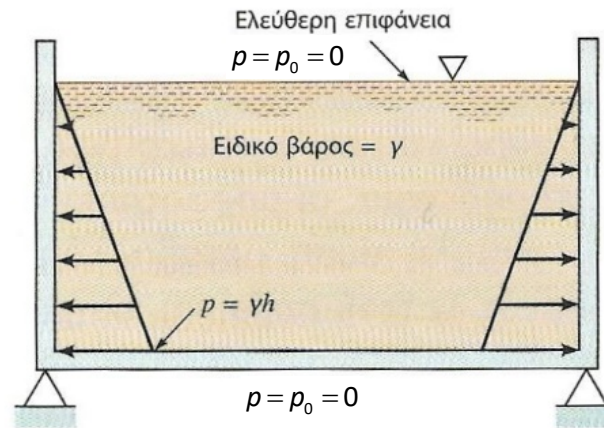
(κέντρο πίεσης = κέντρο βάρους)



Συνήθως η επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης δε λαμβάνεται υπόψη ($p_0 = 0$) καθώς η ίδια πίεση επενεργεί και στην άλλη όψη της επιφάνειας

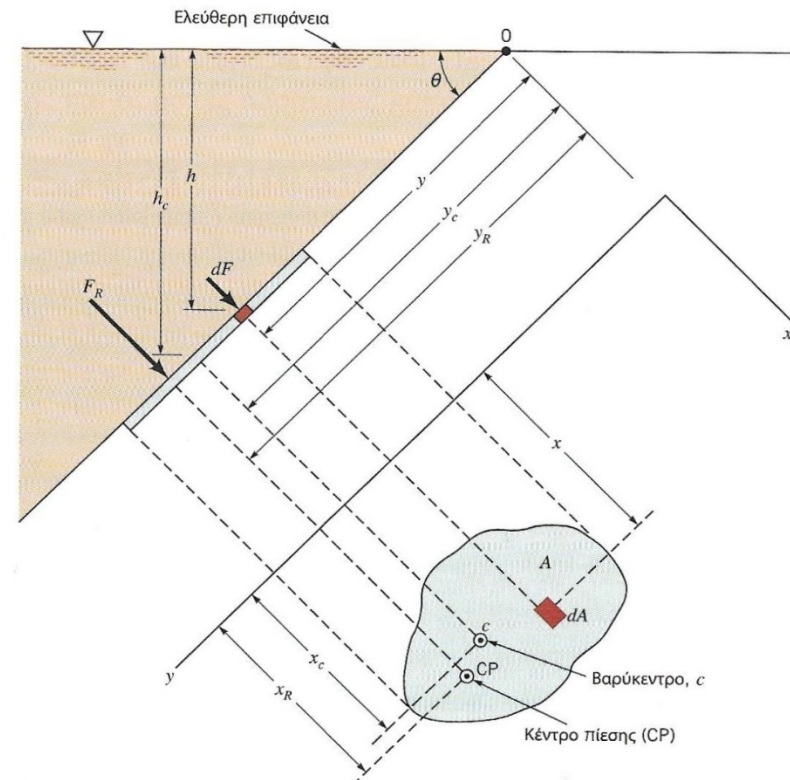
Κατανομή πίεσης σε κατακόρυφη ή πλάγια επιφάνεια

- Η κατανομή της υδροστατικής πίεσης **δεν είναι ομοιόμορφη** (γραμμική με το βάθος h)
- Η δύναμη ασκείται στο κέντρο πίεσης που στη γενική περίπτωση είναι **διαφορετικό** από το κέντρο βάρους της επιφάνειας



Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια – 1

- Επίπεδη επιφάνεια **οποιασδήποτε μορφής και οποιασδήποτε διεύθυνσης** (γωνίας θ)
- Η δύναμη έχει **διεύθυνση κάθετη προς την επιφάνεια και φορά προς την επιφάνεια**
- Το μέτρο της δύναμης εξαρτάται μόνο από το βάθος και είναι ίσο με **την πίεση που ασκείται στο κέντρο βάρους της επιφάνειας επί το εμβαδόν αυτής**



$$F_R = (p_0 + \gamma h_c) A \quad \text{ή} \quad F_R = \gamma h_c A \quad \text{για} \quad p_0 = 0$$

h_c Το βάθος του κέντρου βάρους της επιφάνειας

Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια – 2

- Για τον υπολογισμό του σημείου που ασκείται η δύναμη (κέντρο πίεσης) εφαρμόζεται το θεώρημα των ροπών:

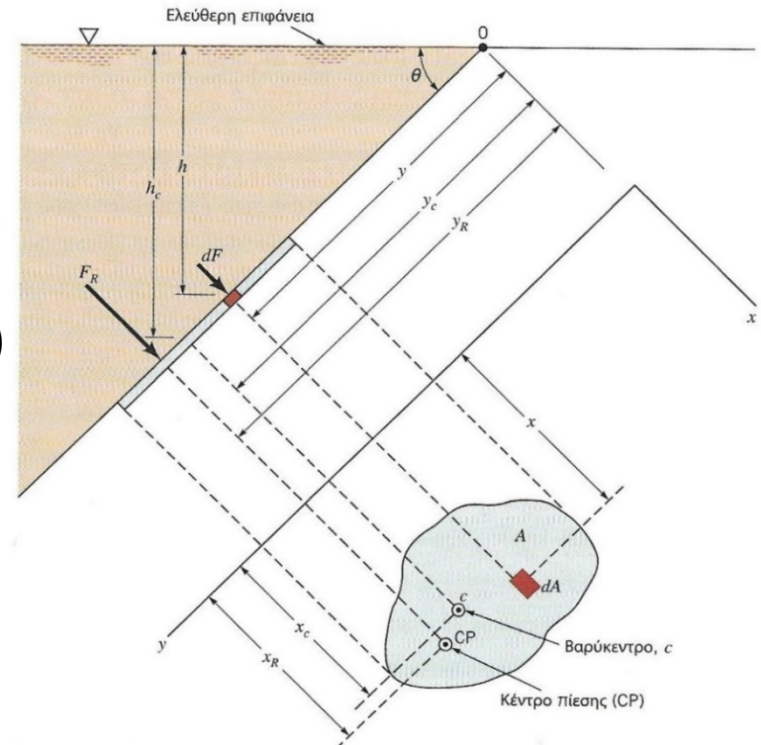
Η ροπή της συνισταμένης δύναμης πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα (ολοκλήρωμα) των ροπών των συνιστωσών (κατανεμημένης πίεσης)

- Συντεταγμένες κέντρου πίεσης

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c A}$$

$$x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c A}$$

για $p_0 = 0$

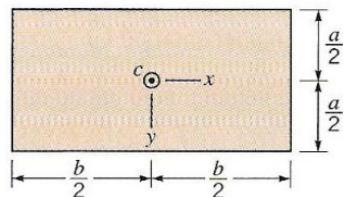


I_{xc} Ροπή αδράνειας ως προς άξονα παράλληλο στον x που περνά από το κ.β.

I_{xyc} Γινόμενο ροπών ως προς άξονες που περνούν από το κ.β.

x_c, y_c Συντεταγμένες κέντρου βάρους επιφάνειας

Γεωμετρικές ιδιότητες συνηθισμένων σχημάτων



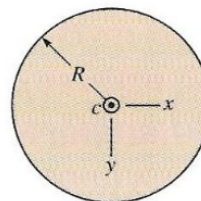
(a) Ορθογώνιο

$$A = ba$$

$$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xyc} = 0$$

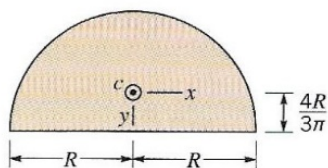


(b) Κύκλος

$$A = \pi R^2$$

$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyc} = 0$$



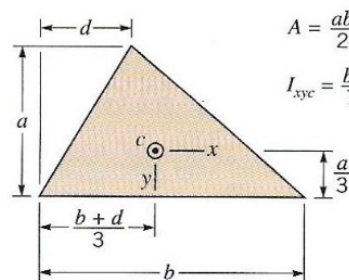
(c) Ημικύκλιο

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xc} = 0.1098R^4$$

$$I_{yc} = 0.3927R^4$$

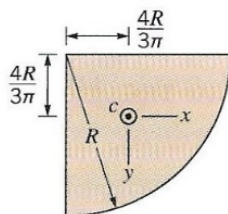
$$I_{xyc} = 0$$



(d) Τρίγωνο

$$A = \frac{ab}{2} \quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$$



(e) Τεταρτοκύκλιο

$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$$

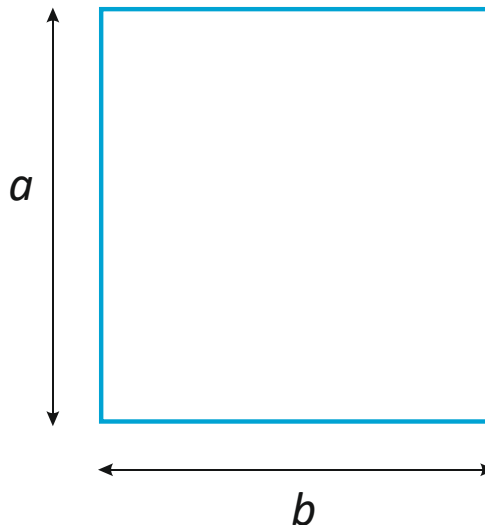
$$I_{xyc} = -0.01647R^4$$

Παράδειγμα 1

Υδροστατική πίεση σε καλούπι

(α) Να υπολογιστεί η υδροστατική δύναμη που ασκείται στη μια πλευρά ενός καλουπιού ύψους $a = 2.44$ m και πλάτους $b = 1.22$ m, στο οποίο εισέρχεται υγρό τσιμέντο για την κατασκευή ενός τοίχου. Το ειδικό βάρος του τσιμέντου είναι $\gamma = 23.6$ kN/m³

(β) Να υπολογιστεί το σημείο εφαρμογής της υδροστατικής δύναμης.



Παράδειγμα 1 – Λύση 1/1

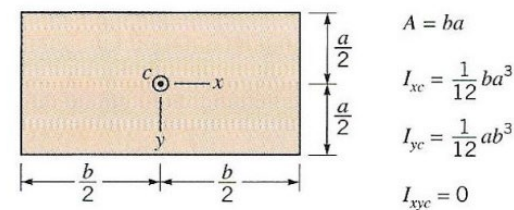
(α) Υπολογισμός δύναμης

$$F = \gamma h_c A$$

$$A = ba = 1.22 \times 2.44 = 2.997 \text{ m}^2$$

$$h_c = \frac{a}{2} = \frac{2.44}{2} = 1.22 \text{ m}$$

$$F = 23.6 \times 1.22 \times 2.997 = 85.7 \text{ kN}$$



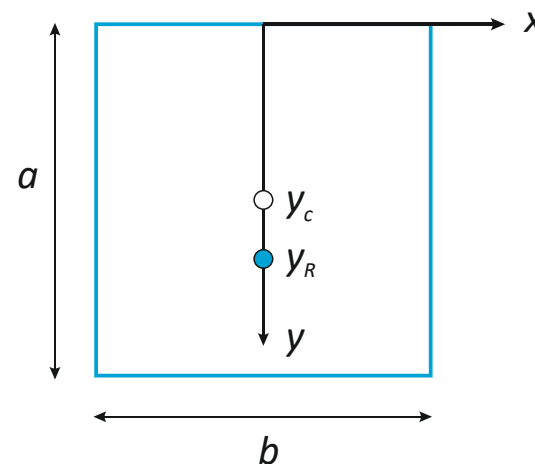
(α) Ορθογώνιο

(β) Υπολογισμός κέντρου πίεσης

$$x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c A} \Rightarrow x_R = x_c = 0 \quad (I_{xyc} = 0)$$

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c A} \Rightarrow \quad (y_c = a/2)$$
$$(I_{xc} = (1/12) ba^3)$$

$$y_R = \frac{2}{3} a = \frac{2}{3} \times 2.44 = 1.627 \text{ m}$$



Πρίσμα πίεσης – 1

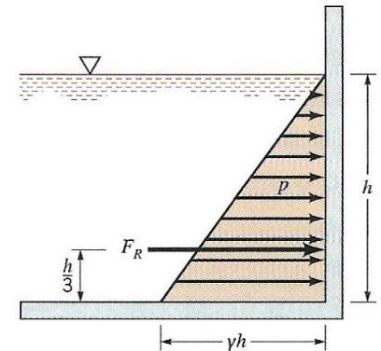
- Δύναμη σε **κατακόρυφη, επίπεδη, ορθογωνική** επιφάνεια

$$F_R = \gamma h_c A = \gamma \left(\frac{h}{2} \right) (b h)$$



$$F_R = \frac{1}{2} (\gamma h) (b h)$$

Το μέτρο της δύναμης είναι ίσο με τον όγκο του πρίσματος πίεσης



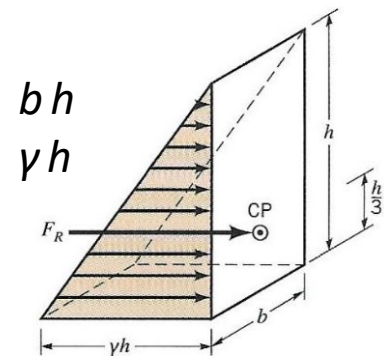
Αποδεικνύεται ότι

Το σημείο επαφής της δύναμης είναι το βαρύκεντρο του πρίσματος (απόσταση $h/3$ από το κάτω μέρος)

Πρίσμα πίεσης

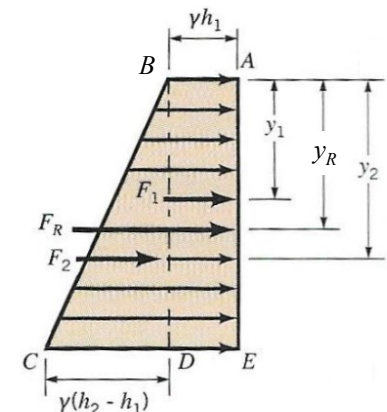
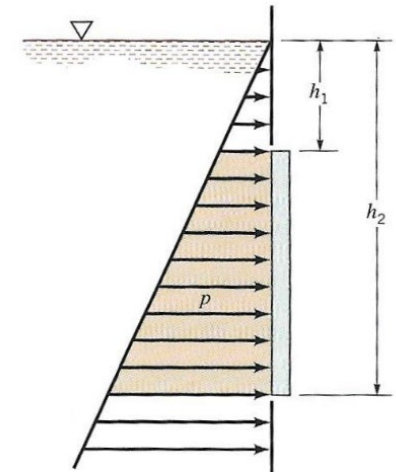
Εμβαδό βάσης: $b h$

Ύψος:



Πρίσμα πίεσης – 2

- Δύναμη σε **βυθισμένη κατακόρυφη, επίπεδη, ορθογωνική** επιφάνεια
- Η συνολική δύναμη είναι ίση με τον όγκο του πρίσματος πίεσης τραπεζοειδούς διατομής
- Το πρίσμα πίεσης «σπάει» σε ένα **ορθογωνικό** (ABDE) και ένα **τριγωνικό** (BCD) τμήμα
- Η συνολική δύναμη είναι ίση με το άθροισμα των όγκων των δύο πρισμάτων



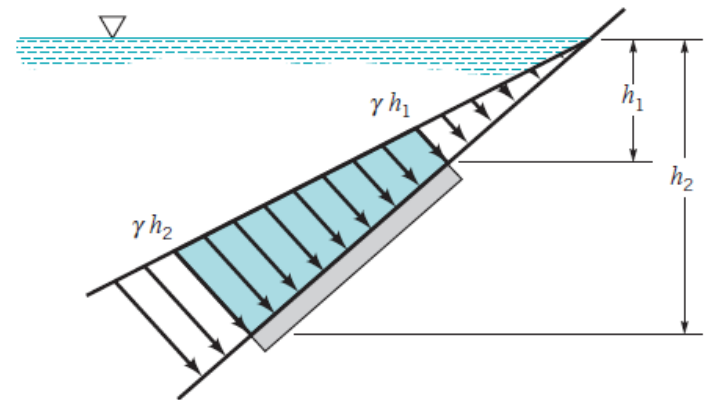
$$F_R = F_1 + F_2$$

- Το σημείο επαφής της δύναμης προσδιορίζεται από το ισοζύγιο ροπών γύρω από κάποιο σημείο (π.χ. A)

$$F_R y_R = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

Πρίσμα πίεσης – 3

- Δύναμη σε **κεκλιμένη, επίπεδη, ορθογωνική** επιφάνεια
- Η συνολική δύναμη είναι ίση με τον όγκο του πρίσματος πίεσης τραπεζοειδούς διατομής
- Οι αναπτυσσόμενες πιέσεις εξαρτώνται από τις **κατακόρυφες αποστάσεις** (και όχι από τις αποστάσεις κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας)



Ρευστομηχανική

5^η Διάλεξη

Επαναληπτικές ασκήσεις στη Στατική Ρευστών

Γεώργιος Αραμπατζής

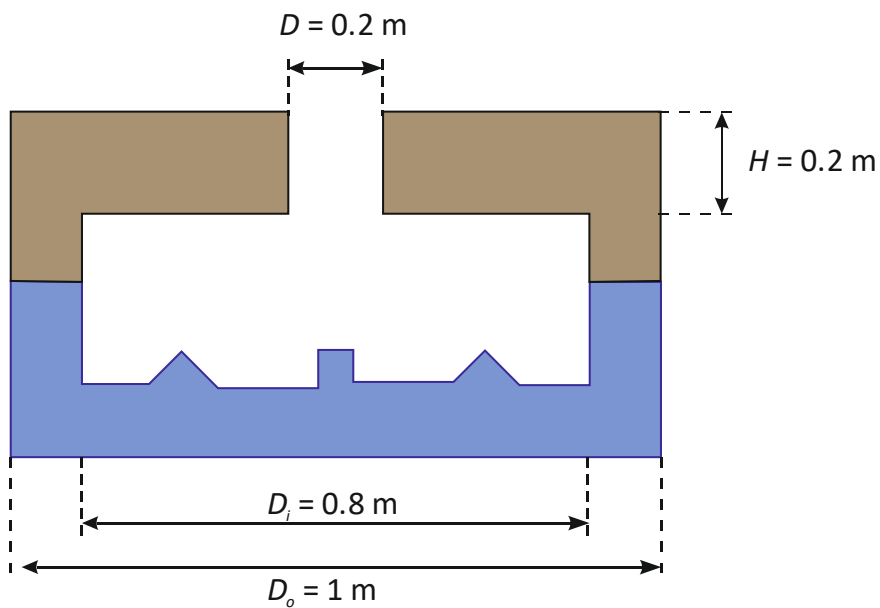
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2019

Δυνάμεις σε καλούπι χύτευσης μετάλλου

Στο κυλινδρικό καλούπι του σχήματος χυτεύεται υγρό μέταλλο πυκνότητας 6500 kg/m^3 . Η μάζα του άνω τμήματος του καλουπιού είναι 50 kg . Επαρκεί η ασκούμενη δύναμη λόγω βαρύτητας του καλουπιού για να μην ανοίξει το καλούπι και υπάρξει διαρροή του υγρού μετάλλου; (Το καλούπι γεμίζει μέχρι πάνω με υγρό μέταλλο).



Δεδομένα

Εξωτερική διάμετρος καλουπιού:

$$D_o := 1 \cdot \text{m}$$

Εσωτερική διάμετρος καλουπιού:

$$D_i := 0.8 \cdot \text{m}$$

Διάμετρος οπής:

$$D := 0.2 \text{ m}$$

Ύψος τοιχώματος άνω τμήματος καλουπιού:

$$H := 0.2 \cdot \text{m}$$

Πυκνότητα μετάλλου:

$$\rho := 6500 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Μάζα άνω τμήματος καλουπιού:

$$M := 50 \cdot \text{kg}$$

Ατμοσφαιρική πίεση:

$$p_{\text{atm}} := 101325 \cdot \text{Pa}$$

Επιτάχυνση βαρύτητας:

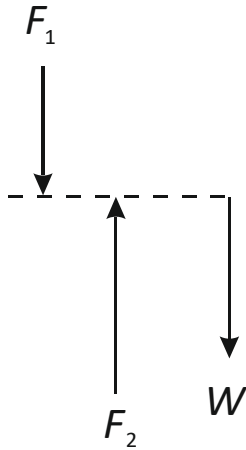
$$g = 9.807 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Λύση

Ανάλυση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο πάνω τμήμα του καλουπιού είναι:

1. Η δύναμη λόγω της ατμοσφαιρικής πίεσης στην εξωτερική επιφάνεια (F_1)
2. Η δύναμη λόγω υδροστατικής πίεσης στην εσωτερική επιφάνεια (F_2)
3. Το βάρος του τμήματος του καλουπιού (W)



Για να μην ανοίξει το καλούπι πρέπει η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο πάνω τμήμα του καλουπιού να έχει φορά προς τα κάτω. Δηλαδή, η δύναμη

$$F = F_1 - F_2 + W$$

να είναι θετική.

Υπολογισμός δυνάμεων

$$F_1 := p_{\text{atm}} \cdot \left(\frac{\pi \cdot D_o^2}{4} - \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right) = 76397.3 \cdot \text{N}$$

$$F_2 := (p_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot H) \cdot \left(\frac{\pi \cdot D_i^2}{4} - \frac{\pi \cdot D^2}{4} \right) = 53755.9 \cdot \text{N}$$

$$W := M \cdot g = 490.3 \cdot \text{N}$$

Υπολογισμός δυνάμεων

$$F := F_1 - F_2 + W = 23131.6 \cdot \text{N}$$

Επομένως, το καλούπι δεν θα σηκωθεί

**ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

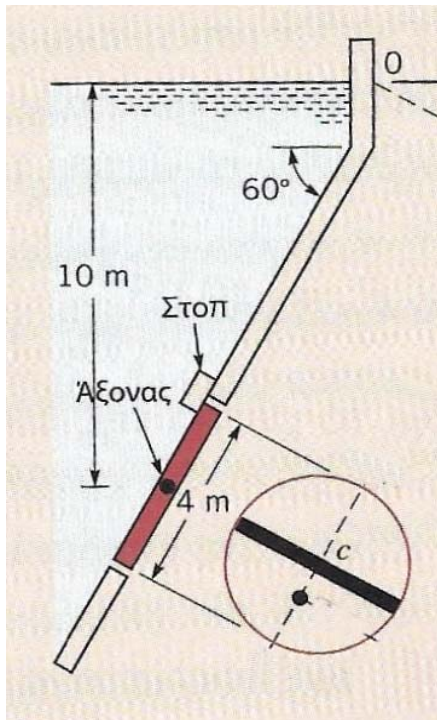
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2019

Υδροστατική φόρτιση επίπεδης κυκλικής πλάκας

Κυκλικός υδατοφράκτης διαμέτρου 4 m βρίσκεται σε κεκλιμένο τοίχο (γωνίας 60°) μεγάλης δεξαμενής που περιέχει νερό (ειδικό βάρος 9.8 kN/m^3). Ο υδατοφράκτης φέρεται από άξονα που διέρχεται από την οριζόντια διάμετρό του και βρίσκεται σε βάθος 10 m.

Ζητούνται

- (α) Η διεύθυνση, η φορά και το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το νερό στον υδατοφράκτη.
- (β) Το σημείο εφαρμογής της παραπάνω δύναμης.
- (γ) Η δύναμη που απαιτείται να εφαρμοστεί στο κάτω μέρος του υδατοφράκτη για το άνοιγμά του.



Δεδομένα

Διάμετρος υδατοφράκτη:

$$D := 4\text{m}$$

Βάθος υδατοφράκτη:

$$h_c := 10\cdot\text{m}$$

Γωνία τοίχου:

$$\theta := 60^\circ$$

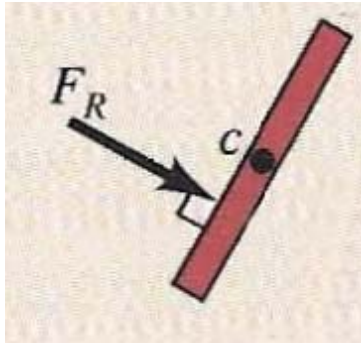
Ειδικό βάρος νερού:

$$\gamma := 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Λύση

(α) Διεύθυνση, φορά και μέτρο δύναμης

Η δύναμη που ασκείται από το νερό στον υδατοφράκτη είναι κάθετη στο επίπεδο του υδατοφράκτη με φορά από το νερό προς τον υδατοφράκτη.



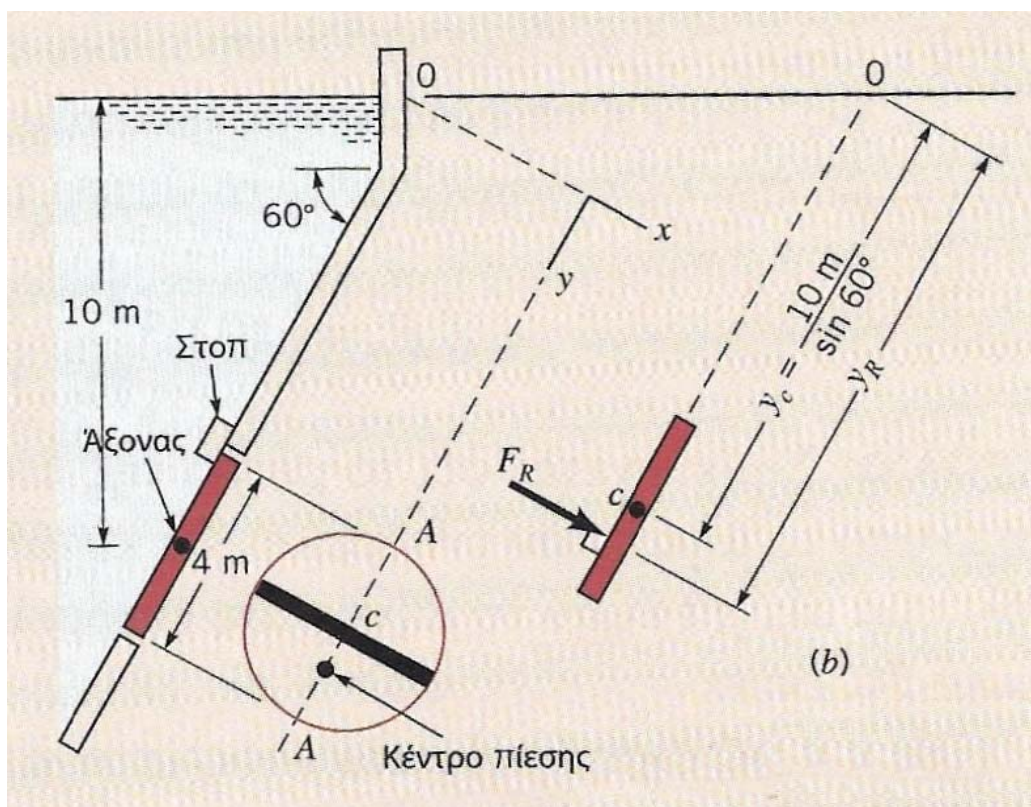
Το μέτρο της δύναμης δίνεται από τη σχέση:

$$F_R = \gamma \cdot h_c \cdot A \quad \text{όπου} \quad A := \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 12.566 \text{ m}^2$$

Επομένως

$$F_R := \gamma \cdot h_c \cdot A = 1231504 \text{ N}$$

(β) Σημείο εφαρμογής της δύναμης



Το σημείο εφαρμογής της δύναμης δίνεται από τις σχέσεις:

$$x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c \cdot A} \quad \text{και} \quad y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A}$$

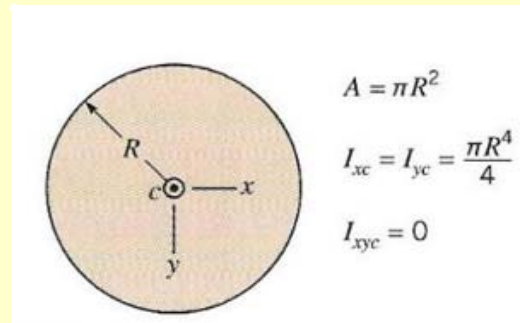
όπου:

$$x_c := 0$$

$$y_c := \frac{h_c}{\sin(\theta)} = 11.547 \text{ m}$$

$$I_{xyc} := 0$$

$$I_{xc} := \frac{\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^4}{4} = 12.566 \text{ m}^4$$



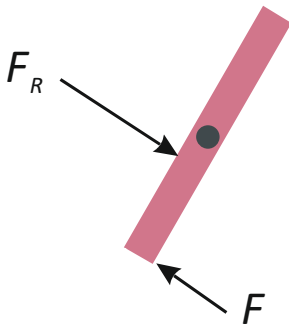
Επομένως:

$$x_R := x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c \cdot A} = 0$$

$$y_R := y_c + \frac{I_{xc}}{y_c \cdot A} = 11.634 \text{ m}$$

(γ) Απαιτούμενη δύναμη για άνοιγμα του υδατοφράκτη

Για τον υπολογισμό της απαιτούμενης δύναμης εφαρμόζεται το ισοζύγιο των ροπών γύρω από τον άξονα του υδατοφράκτη:



$$F_R \cdot (y_R - y_c) = F \cdot \frac{D}{2}$$

Επομένως:

$$F := \frac{F_R \cdot (y_R - y_c)}{\frac{D}{2}} = 53326 \cdot \text{N}$$

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

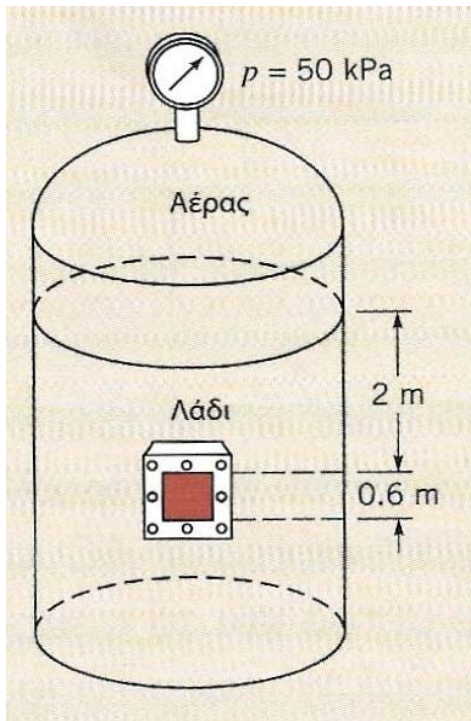
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2019

Εφαρμογή πρίσματος πίεσης

Σε μια φιάλη υπό πίεση περιέχεται λάδι ειδικού βάρους 8.82 kN/m^3 . Η φιάλη φέρει βιδωμένη τετράγωνη πλάκα διαστάσεων $60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ σε βάθος 2 m από την επιφάνεια του λαδιού. Η μανομετρική (σχετική) πίεση που μετρείται στην κορυφή της φιάλης είναι ίση με 50 kPa .

Ζητείται

Το μέτρο και το σημείο εφαρμογής της δύναμης επί της τετράγωνης επιφάνειας.



Δεδομένα

Μήκος πλευράς πλάκας:

$$a := 60 \text{ cm} = 0.6 \text{ m}$$

Βάθος πλάκας:

$$h_1 := 2 \cdot \text{m}$$

Μανομετρική πίεση:

$$p_s := 50 \cdot \text{kPa} = 50000 \cdot \text{Pa}$$

Ειδικό βάρος λαδιού:

$$\gamma := 8.82 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} = 8820 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

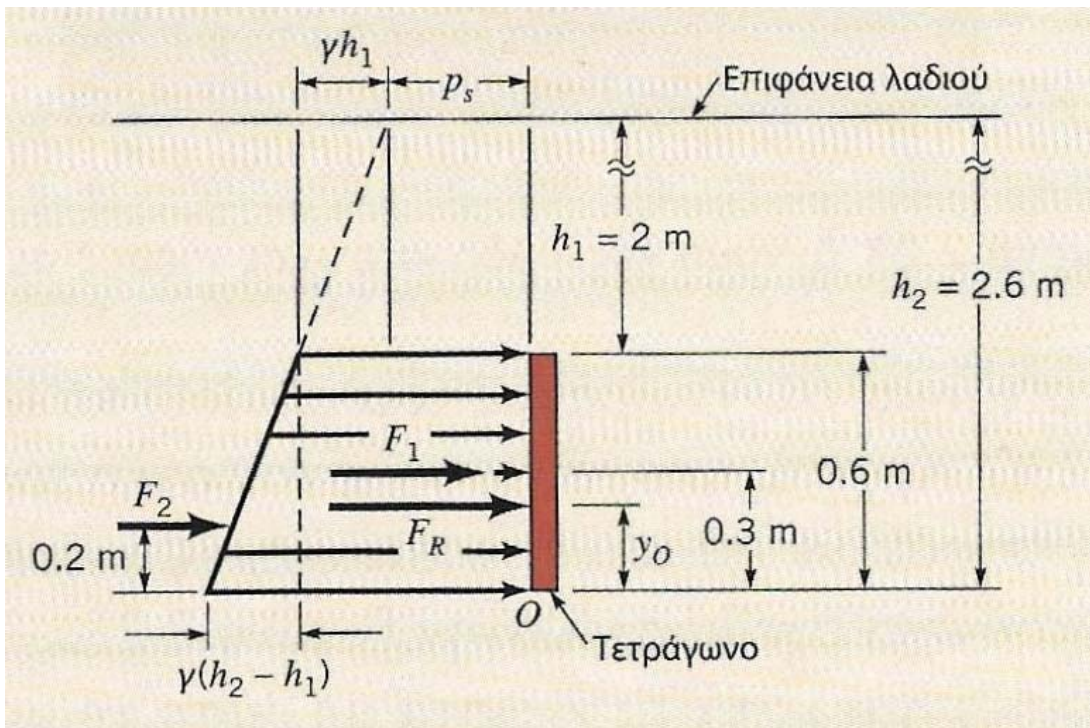
Λύση

Η πίεση που ασκείται σε κάθε σημείο της πλάκας οφείλεται:

1. Στην πίεση που επενεργεί στην επιφάνεια (p_s).
2. Στην υδροστατική πίεση του λαδιού (γh) η οποία μεταβάλλεται γραμμικά με το βάθος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το πρίσμα της πίεσης, το οποίο αποτελείται από:

1. Ένα ορθογωνικό τμήμα με ύψος $p_s + \gamma \cdot h_1$
2. Ένα τριγωνικό τμήμα με ύψος $\gamma(h_2 - h_1) = \gamma \cdot a$



Η συνισταμένη δύναμη είναι το άθροισμα των δυνάμεων που αντιστοιχούν στους όγκους των δύο πρισμάτων:

$$F_1 := (p_s + \gamma \cdot h_1) \cdot a^2 = 24350 \cdot \text{N}$$

$$F_2 := \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot a \cdot a^2 = 953 \cdot \text{N}$$

και

$$F_R := F_1 + F_2 = 25303 \cdot \text{N}$$

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γενική σχέση για επίπεδες επιφάνειες:

$$F_R = (p_s + \gamma h_c) \cdot A \quad \text{ή} \quad F_R := \left[p_s + \gamma \cdot \left(h_1 + \frac{a}{2} \right) \right] \cdot a^2 = 25303 \cdot \text{N}$$

Οι αποστάσεις των σημείων επαφής των δυο δυνάμεων από το ψηλότερο σημείο της πλάκας (πάνω πλευρά) είναι:

$$y_1 := \frac{a}{2} = 0.3 \text{ m}$$

$$y_2 := \frac{2a}{3} = 0.4 \text{ m}$$

Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης δύναμης (απόσταση από την πάνω πλευρά της πλάκας) υπολογίζεται από το ισοζύγιο των ροπών γύρω από το ψηλότερο σημείο της πλάκας *(η ροπή της συνισταμένης είναι ίση με το άθροισμα των ροπών των επιμέρους δυνάμεων):*

$$F_R \cdot y_R = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$$

Επομένως:

$$y_R := \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_R} = 0.304 \text{ m}$$

Ρευστομηχανική

6^η Διάλεξη

Κινηματική – Πεδία και μέθοδοι περιγραφής

Γεώργιος Αραμπατζής

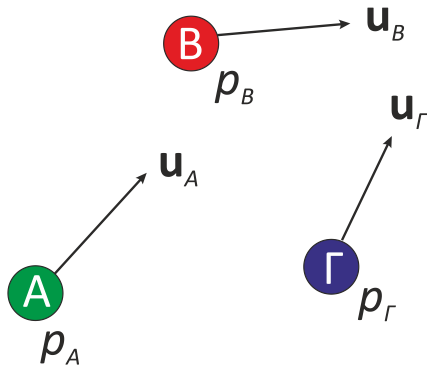
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Κινηματική ρευστών

- Η κινηματική ασχολείται με τη μελέτη της **κίνησης των ρευστών χωρίς να λαμβάνει υπόψη τις αιτίες που την προκαλούν** (δυνάμεις)
- Η κινηματική των ρευστών ασχολείται με την περιγραφή των μεγεθών που αφορούν στην κίνησή τους
 - **Θέση**
 - **Ταχύτητα**
 - **Επιτάχυνση**
 - **Παραμόρφωση**

Μέθοδοι περιγραφής πεδίων ροής

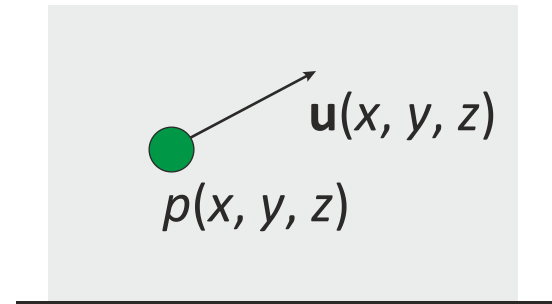
Μέθοδος Lagrange



Κινούμενος παρατηρητής

Ο παρατηρητής παρακολουθεί την κίνηση και τις μεταβολές των ιδιοτήτων συγκεκριμένου σωματιδίου ρευστού

Μέθοδος Euler



Ακίνητος παρατηρητής

Ο παρατηρητής εστιάζει σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου και παρακολουθεί τις μεταβολές ιδιοτήτων του ρευστού στο σημείο

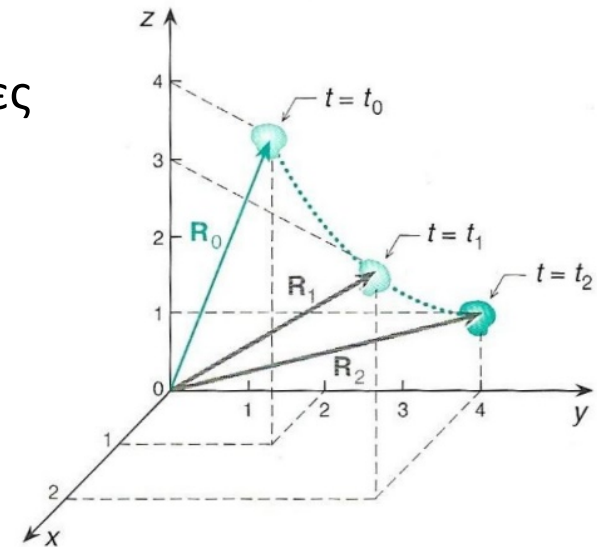
Μέθοδος Lagrange – 1

- Κάθε σωματίδιο ταυτοποιείται από τη θέση που έχει μια χρονική στιγμή t_0 ($=0$)

- Υλικές συντεταγμένες** x_0, y_0, z_0 : συντεταγμένες της αρχικής θέσης του σωματιδίου
- Υλικό διάνυσμα** θέσης: $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$



- Κάθε σωματίδιο ταυτοποιείται από το υλικό διάνυσμα θέσης του



- Η θέση του σωματιδίου μια δεδομένη χρονική στιγμή t καθορίζεται από τις συντεταγμένες x, y, z του σημείου του χώρου στο οποίο βρίσκεται (**χωρικές συντεταγμένες**)
- Χωρικό διάνυσμα** θέσης: $\mathbf{R} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

Μέθοδος Lagrange – 2

Παράδειγμα: Περιγραφή θερμοκρασίας ενός σωματιδίου

- Θερμοκρασία ενός σωματιδίου που τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}$ (χωρικό διάνυσμα)

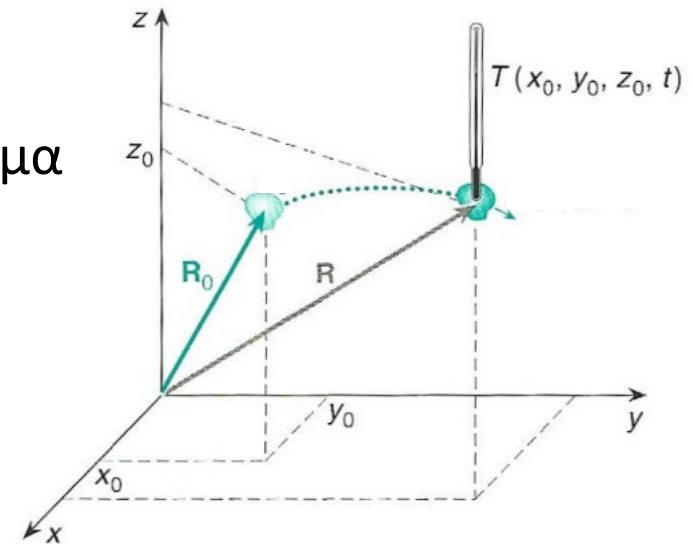
$$T = T(\mathbf{R}, t)$$

- Η θέση $\mathbf{R}$ εξαρτάται από το υλικό διάνυσμα $\mathbf{R}_0$ (το ίδιο το σωματίδιο) και το χρόνο

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t)$$



$$T = T(\mathbf{R}_0, t) = T(x_0, y_0, z_0, t)$$



Στη μέθοδο Lagrange, η θερμοκρασία (όπως και κάθε άλλο μέγεθος) ενός σωματιδίου είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου

Μέθοδος Lagrange – 3

- Αποτελεί την κύρια μέθοδο περιγραφής της κίνησης στερεών σωμάτων
- Δυσχερής η εφαρμογή της σε προβλήματα Ρευστομηχανικής:
 - Δυσκολία ταυτοποίησης και ταυτόχρονης παρακολούθησης του συνόλου των σωματιδίων του ρευστού
 - Οδηγεί σε πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις, η επίλυση των οποίων είναι δύσκολη
- Η εφαρμογή της μεθόδου Lagrange περιορίζεται σε ορισμένα ειδικά προβλήματα:
 - κίνηση σταγόνων υγρού
 - κίνηση φυσαλίδων αερίων σε ετερογενή μίγματα ρευστών

Στα περισσότερα προβλήματα ροής δεν ενδιαφέρει η συμπεριφορά καθενός σωματιδίου ρευστού αλλά τα μεγέθη (παράμετροι ροής, ιδιότητες, κλπ.) σε διάφορα σημεία του ρευστού και οι μεταβολές τους με το χρόνο

Μέθοδος Euler

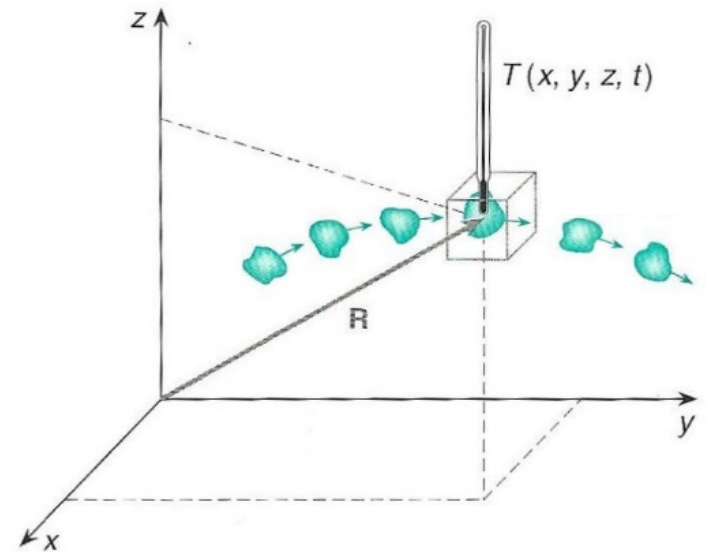
Παράδειγμα: Περιγραφή θερμοκρασίας σε ένα σημείο του χώρου

- Η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή t είναι ίση με τη θερμοκρασία του σωματιδίου που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}$
- Η θέση $\mathbf{R}$ είναι ανεξάρτητη μεταβλητή



Πεδίο Θερμοκρασίας

$$T = T(\mathbf{R}, t) = T(x, y, z, t)$$



Στη μέθοδο Euler, η θερμοκρασία (όπως και κάθε άλλο μέγεθος) ενός σωματιδίου είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου

Επιλογή μεθόδου

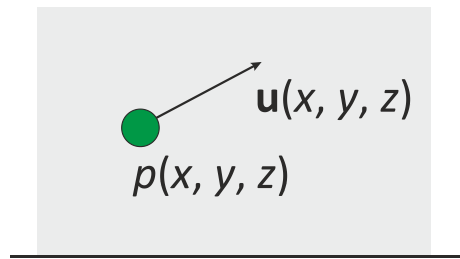
Είδος πληροφορίας

Η τιμή ενός φυσικού μεγέθους σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ροής

π.χ. η ταχύτητα των σωματιδίων ρευστού στην έξοδο ακροφυσίου



Μέθοδος Euler

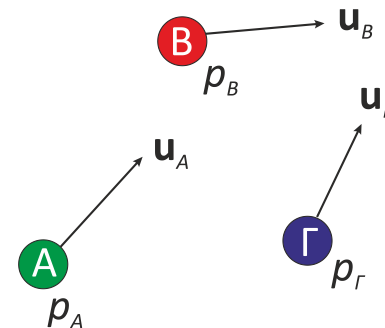


Πως μεταβάλλονται οι ιδιότητες ενός σωματιδίου ρευστού καθώς αυτό κινείται μέσα στο πεδίο ροής

π.χ. η ταχύτητα μιας φουσαλίδας αέρα που ανέρχεται σε ρευστό που βράζει.



Μέθοδος Lagrange



Η έννοια του πεδίου

- Περιοχή του χώρου, σε κάθε σημείο της οποίας, ένα δεδομένο φυσικό μέγεθος έχει μια ορισμένη τιμή, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

- **Βαθμωτό** ή μονόμετρο μέγεθος (π.χ. θερμοκρασία)

$$T = T(x, y, z, t)$$

- **Διανυσματικό** ή ανυσματικό μέγεθος (π.χ. ταχύτητα)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$$

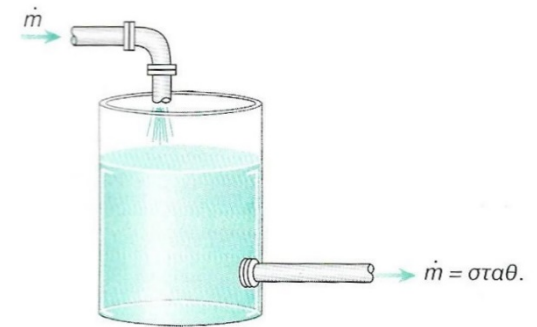
- **Δυναμικό** μέγεθος ή τανυστής (π.χ. ιξώδεις τάσεις)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y, z, t)$$

Μόνιμη και μη-μόνιμη ροή

- **Μόνιμη ροή** (steady flow): Η ταχύτητα σε ένα δεδομένο σημείο του χώρου δε μεταβάλλεται με το χρόνο

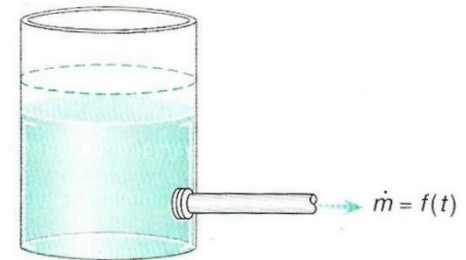
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$$



!! Μόνιμη ροή δε σημαίνει ότι η ταχύτητα είναι ομοιόμορφη. Μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο μέσα στο χώρο

- **Μη-μόνιμη ροή** (unsteady flow):

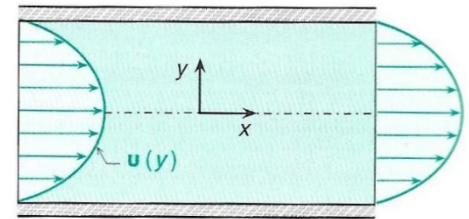
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$$



1Δ, 2Δ και 3Δ ροή

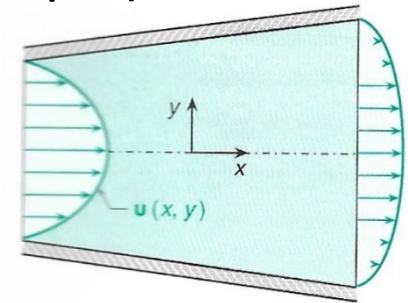
- **Μονοδιάστατη ροή:** Η ταχύτητα μεταβάλλεται μόνο ως προς μια χωρική συντεταγμένη (π.χ. y)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(y, t) \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(y)$$



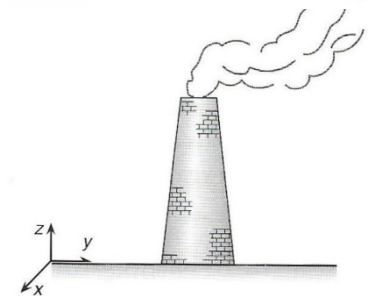
- **Διδιάστατη ροή:** Η ταχύτητα μεταβάλλεται ως προς δύο χωρικές συντεταγμένες (π.χ. x, y)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$$



- **Τριδιάστατη ροή**

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$$



Παράδειγμα 1

- Για τα παρακάτω πεδία ταχύτητας, να καθοριστεί το είδος του αντίστοιχου πεδίου ροής (μόνιμο ή μη-μόνιμο, μόνο- ή δι- ή τριδιάστατο)

$$(\alpha) \quad \mathbf{u} = (ax^2b^{-bt})\mathbf{i} + cx\mathbf{j}$$

$$(\beta) \quad \mathbf{u} = ay^2\mathbf{i} + byz\mathbf{j}$$

$$(\gamma) \quad \mathbf{u} = (ax + t)\mathbf{i} + by^2\mathbf{j}$$

$$(\delta) \quad \mathbf{u} = ax\mathbf{i} + by^2\mathbf{j} + cxz\mathbf{k}$$

Παράδειγμα 1 – Λύση

(α) $\mathbf{u} = (ax^2b^{-bt})\mathbf{i} + cx\mathbf{j}$

- Μη-μόνιμο (εξαρτάται από τον χρόνο t)
- Μονοδιάστατο (εξαρτάται μόνο από τη x συντεταγμένη)

(β) $\mathbf{u} = ay^2\mathbf{i} + byz\mathbf{j}$

- Μόνιμο (δεν εξαρτάται από τον χρόνο)
- Διδιάστατο (εξαρτάται από y και z)

(γ) $\mathbf{u} = (ax + t)\mathbf{i} + by^2\mathbf{j}$

- Μη-μόνιμο (εξαρτάται από τον χρόνο t)
- Διδιάστατο (εξαρτάται από x και y)

(δ) $\mathbf{u} = ax\mathbf{i} + by^2\mathbf{j} + cxz\mathbf{k}$

- Μόνιμο (δεν εξαρτάται από τον χρόνο)
- Τριδιάστατο (εξαρτάται από x , y και z)

Ρευστομηχανική

7^η Διάλεξη

Κινηματική – Χρονικές παράγωγοι και επιτάχυνση

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Χρονικές παράγωγοι

Η χρονική παράγωγος ενός μεγέθους εκφράζει μαθηματικά το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους

Μέθοδος Euler

Ρυθμός μεταβολής
ως προς **ακίνητο**
παρατηρητή



Τοπική παράγωγος

Μέθοδος Lagrange

Ρυθμός μεταβολής
ως προς παρατηρητή
που **κινείται μαζί με
το ρευστό**



Υλική παράγωγος

Γενικευμένη Μέθοδος

Ρυθμός μεταβολής
ως προς παρατηρητή
που **κινείται ανεξάρτητα
από το ρευστό**



Ολική παράγωγος

Τοπική παράγωγος

- Εξετάζεται
 - Μεταβλητή: Θερμοκρασία T
 - Πεδίο θερμοκρασίας κατά Euler: $T(\mathbf{R}, t) = T(x, y, z, t)$
- Τοπική παράγωγος
 - Τοπικός ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ως προς παρατηρητή που παραμένει ακίνητος στο πεδίο ροής (σταθερό χωρικό διάνυσμα $\mathbf{R}$)

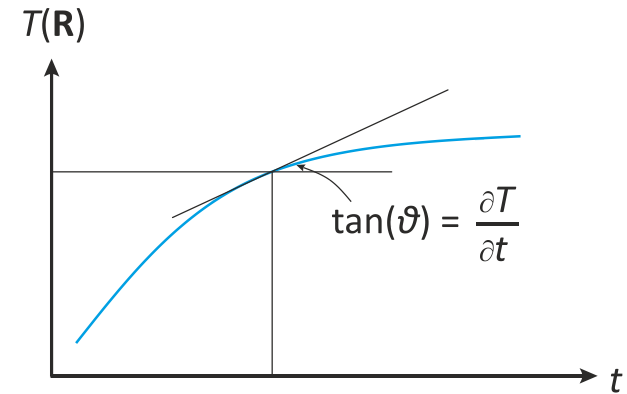
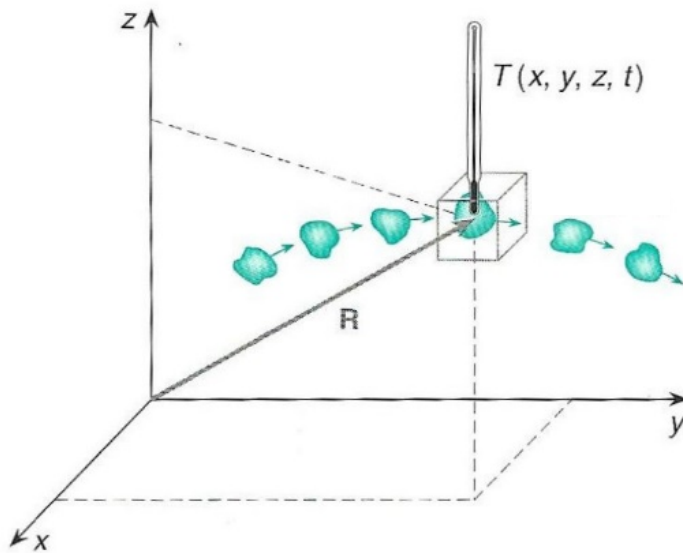
$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{\mathbf{R}} = \left(\frac{dT}{dt} \right)_{x,y,z} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Εκφράζεται από τη **μερική παράγωγο** της θερμοκρασίας $T(x, y, z)$ ως προς το χρόνο t

Πειραματικός προσδιορισμός

Τοπική Παράγωγος

Καταγράφεται η θερμοκρασία στο σταθερό σημείο x, y, z συναρτήσει του χρόνου και προσδιορίζεται η κλίση της καμπύλης $T - t$



Υλική παράγωγος

- Εξετάζεται

- Μεταβλητή: Θερμοκρασία T

- Σωματίδιο ρευστού: $\mathbf{R}_0$

- Θερμοκρασία κατά Lagrange: $T(\mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t), t)$ ή

$$T(x(\mathbf{R}_0, t), y(\mathbf{R}_0, t), z(\mathbf{R}_0, t), t)$$

- **Υλική (ή ουσιαστική) παράγωγος**

- Ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας ως προς παρατηρητή που κινείται μαζί με το ρευστό (σταθερό υλικό διάνυσμα $\mathbf{R}_0$)

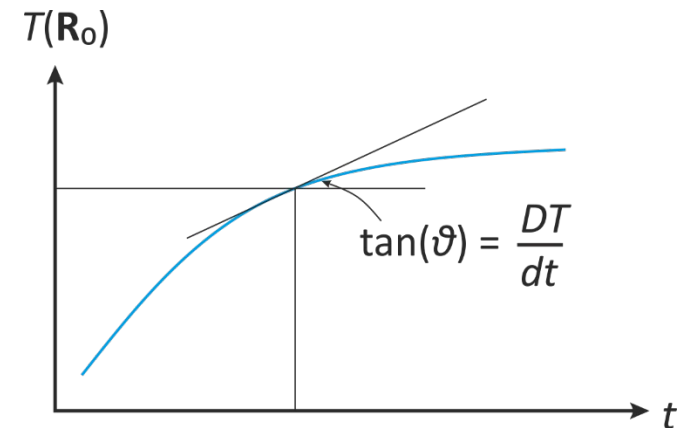
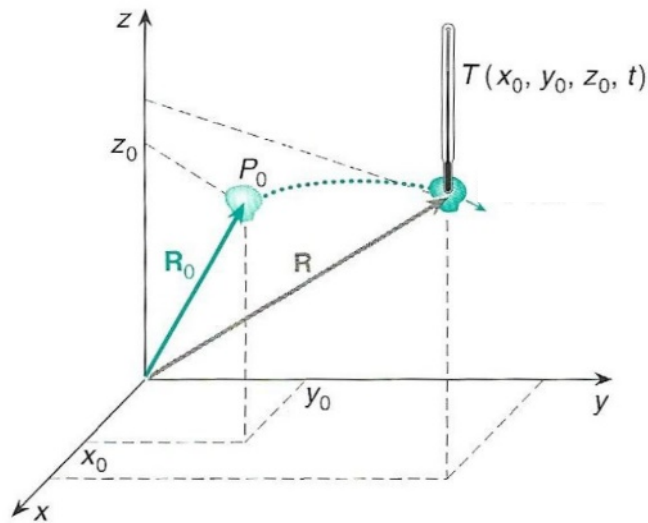
$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\mathbf{R}_0} = \left(\frac{dT}{dt}\right)_{\mathbf{R}} + \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\mathbf{R}_0}}_{u_x} + \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\mathbf{R}_0}}_{u_y} + \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)_{\mathbf{R}_0}}_{u_z}$$

$\frac{DT}{Dt}$ $\frac{\partial T}{\partial t}$ u_x u_y u_z

Πειραματικός προσδιορισμός

Υλική Παράγωγος

Καταγράφεται η θερμοκρασία ενός σωματιδίου ρευστού $\mathbf{R}_0/(x_0, y_0, z_0)$ συναρτήσει του χρόνου και προσδιορίζεται η κλίση της καμπύλης $T - t$



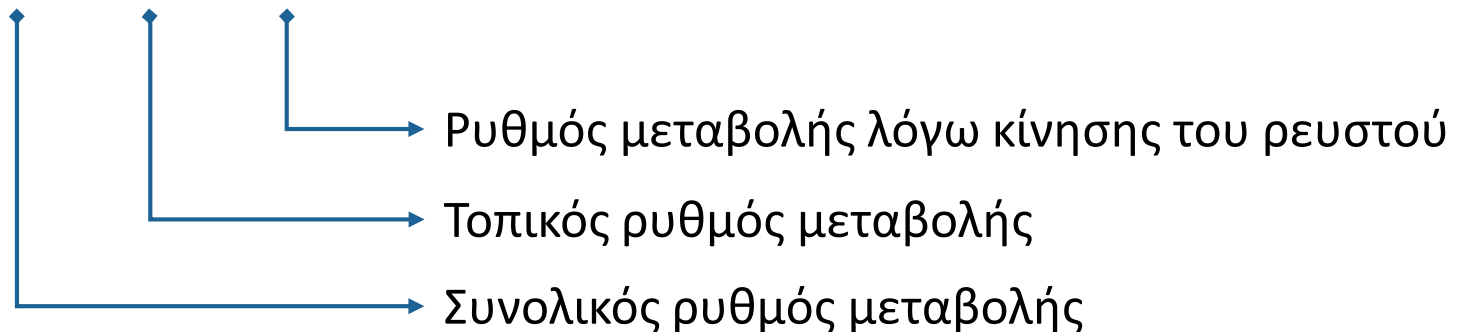
Αναλυτική έκφραση υλικής παραγώγου

- Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

- Σε διανυσματικό συμβολισμό

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad \text{όπου} \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$



Ταχύτητα

- Ταχύτητα σε ένα σημείο = ταχύτητα του σωματιδίου ρευστού που διέρχεται μια δεδομένη χρονική στιγμή από το σημείο αυτό
- Δίνεται από την πρώτη παράγωγο του διανύσματος θέσης του σωματιδίου ($\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t)$ περιγραφή κατά Lagrange)

$$\mathbf{u} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} \quad \text{ή απλούστερα} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

- Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z \quad \text{με} \quad u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

Επιτάχυνση

- Επιτάχυνση σε ένα σημείο = επιτάχυνση του σωματιδίου ρευστού που διέρχεται μια δεδομένη χρονική στιγμή από το σημείο αυτό

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} = \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right)_{\mathbf{R}_0}$$



σταθερό $\mathbf{R}_0$ άρα υλική παράγωγος

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

επιτάχυνση μεταφοράς (ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας λόγω κίνησης του ρευστού στο χώρο)

τοπική επιτάχυνση (ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας σε ορισμένο σημείο στο χώρο)

ολική επιτάχυνση (ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας παρατηρητή που κινείται στο πεδίο ροής με τη ταχύτητα του ρευστού)

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης

- Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} \alpha_x + \mathbf{j} \alpha_y + \mathbf{k} \alpha_z$$

- Συνιστώσες επιτάχυνσης ($i = x, y, z$)

$$\alpha_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_i}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_i}{\partial z}$$



$$\alpha_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$\alpha_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\alpha_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

γραμμικοί
όροι

μη-γραμμικοί
όροι

Παράδειγμα 1

Επιτάχυνση ροής

Η ταχύτητα του ρευστού κατά μήκος του άξονα του ακροφυσίου του σχήματος δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = \frac{2t}{(1 - x/2l)^2} \mathbf{i}$$

Όπου x απόσταση από την είσοδο του ακροφυσίου, $l = 1 \text{ m}$ το μήκος του ακροφυσίου και t ο χρόνος.

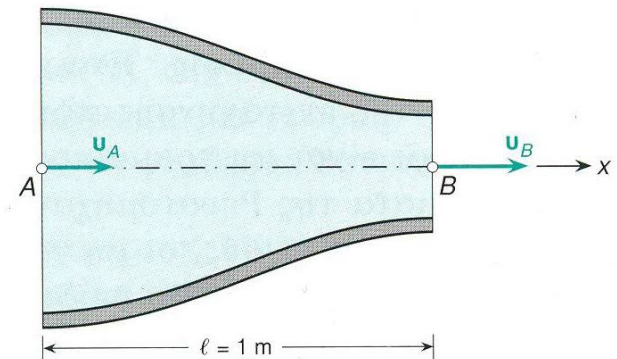
Να προσδιοριστεί το είδος της ροής:

- (α) Μόνιμη ή μη μόνιμη;
- (β) Μονοδιάστατη, διδιάστατη ή τρισδιάστατη;

Να υπολογιστούν

- (γ) Η ταχύτητα
- (δ) Η τοπική επιτάχυνση
- (ε) Η επιτάχυνση μεταφοράς
- (στ) Η ολική επιτάχυνση

στα σημεία A και B του άξονα του ακροφυσίου, τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$



Παράδειγμα 1 – Λύση 1/4

(α, β) Χαρακτηρισμός ροής

Η ροή είναι:

- Μη-μόνιμη γιατί η ταχύτητα μεταβάλλεται με το χρόνο (είναι συνάρτηση του t)
- Μονοδιάστατη γιατί η ταχύτητα μεταβάλλεται μόνο ως προς μια χωρική συντεταγμένη (τη x)

(γ) Υπολογισμός ταχύτητας

Το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Επομένως η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι:

$$\mathbf{u}_A = \frac{2 \times 2}{(1 - 0/2)^2} \mathbf{i} = 4 \mathbf{i} \text{ m/s} \quad \text{με συνιστώσες} \quad u_x = 4 \text{ m/s}, u_y = 0, u_z = 0$$

Το σημείο Β βρίσκεται στη θέση $x = 1$. Επομένως:

$$\mathbf{u}_B = \frac{2 \times 2}{(1 - 1/2)^2} \mathbf{i} = 16 \mathbf{i} \text{ m/s} \quad \text{με συνιστώσες} \quad u_x = 16 \text{ m/s}, u_y = 0, u_z = 0$$

Παράδειγμα 1 – Λύση 2/4

(δ) Υπολογισμός τοπικής επιτάχυνσης

Η τοπική επιτάχυνση δίνεται από την τοπική παράγωγο της ταχύτητας:

$$\mathbf{a}_I = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2t}{(1 - x/2l)^2} \right) \mathbf{i} = \frac{2}{(1 - x/2l)^2} \mathbf{i}$$

** Το πεδίο της τοπικής επιτάχυνσης δε μεταβάλλεται με το χρόνο*

Επομένως, στα σημεία A και B η τοπική επιτάχυνση είναι:

$$\mathbf{a}_{I,A} = \frac{2}{(1 - 0/2l)^2} \mathbf{i} = 2\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad \text{με συνιστώσες} \quad a_{I,A,x} = 2 \text{ m/s}^2, a_{I,A,y} = 0, a_{I,A,z} = 0$$

$$\mathbf{a}_{I,B} = \frac{2}{(1 - l/2l)^2} \mathbf{i} = 8\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad \text{με συνιστώσες} \quad a_{I,B,x} = 8 \text{ m/s}^2, a_{I,B,y} = 0, a_{I,B,z} = 0$$

Παράδειγμα 1 – Λύση 3/4

(ε) Υπολογισμός επιτάχυνσης μεταφοράς

Η επιτάχυνση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$$

με συνιστώσες:

$$\alpha_{c,x} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = \left(\frac{2t}{(1-x/2l)^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2t}{(1-x/2l)^2} \right) = \frac{4t^2}{(1-x/2l)^5 l}$$

$$\alpha_{c,y} = u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

$$\alpha_{c,z} = u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

** Το πεδίο της επιτάχυνσης μεταφοράς μεταβάλλεται με το χρόνο*

$$\mathbf{a}_c = \frac{4t^2}{(1-x/2l)^5 l} \mathbf{i}$$

Επομένως στα σημεία A και B η επιτάχυνση μεταφοράς τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι:

$$\alpha_{c,A} = \frac{4 \times 2^2}{(1-0/2l)^5 l} \mathbf{i} = 16 \mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad \alpha_{c,B} = \frac{4 \times 2^2}{(1-l/2l)^5 l} \mathbf{i} = 512 \mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

Παράδειγμα 1 – Λύση 4/4

(στ) Υπολογισμός ολικής επιτάχυνσης

Η ολική επιτάχυνση είναι το άθροισμα της τοπικής επιτάχυνσης και της επιτάχυνσης μεταφοράς:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_c$$

Επομένως στα σημεία A και B η ολική επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ είναι:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{l,A} + \mathbf{a}_{c,A} = 18 \text{ i m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{l,B} + \mathbf{a}_{c,B} = 520 \text{ i m/s}^2$$

Ρευστομηχανική

8^η Διάλεξη

Κινηματική – Ρυθμός ροής και
γραφική απεικόνιση ροής

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Ρυθμός ροής μάζας – Ορισμός

- **Ρυθμός ροής μάζας (παροχή)**

Η ποσότητα του ρευστού που διέρχεται από μια ορισμένη επιφάνεια του πεδίου ροής στη μονάδα του χρόνου

$$\dot{m} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta t} = \frac{dm}{dt} \quad \text{σε} \quad \text{kg/s}$$

- Για τον υπολογισμό του ρυθμού ροής μάζας απαιτείται
 - Η αναλυτική έκφραση **του πεδίου ταχύτητας**
 - Το σχήμα, το μέγεθος και ο προσανατολισμός της **επιφάνειας**

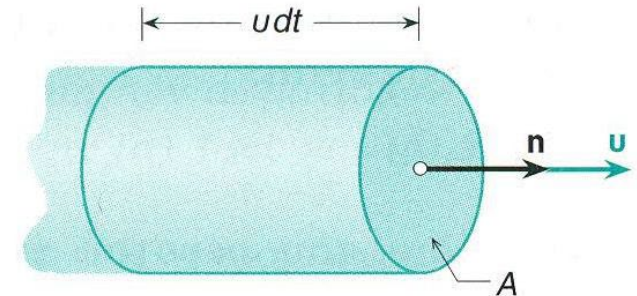
Ρυθμός ροής μάζας – Υπολογισμός 1

- **Ομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας** ($\mathbf{u}$ = σταθερή)
 - Σταθερό μέτρο
 - Σταθερή διεύθυνση
- **Επίπεδη επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση ροής**
 - $\mathbf{n} \equiv$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια
 - $\mathbf{n} \parallel \mathbf{u}$ (παράλληλα διανύσματα)

$$dm = \rho dV = \rho (u dt) A$$



$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho u A$$



Ρυθμός ροής μάζας – Υπολογισμός 2

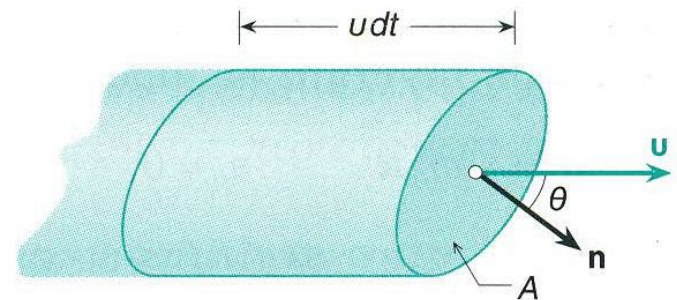
- Ομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας ($\mathbf{u} = \text{σταθερή}$)
- Επίπεδη επιφάνεια σε κλίση ως προς τη διεύθυνση ροής
 - Γωνία μεταξύ $\mathbf{u}$ και $\mathbf{n} = \vartheta$

$$dm = \rho dV = \rho(u dt) A \cos \vartheta$$

$$u \cos \vartheta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n$$



$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho u \cos \vartheta A = \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) A = \rho u_n A$$



- Για $\vartheta = 0^\circ$ $\cos \vartheta = 1 \Rightarrow \dot{m} = \rho u A$
- Για $\vartheta = 90^\circ$ $\cos \vartheta = 0 \Rightarrow \dot{m} = 0$

Ρυθμός ροής μάζας – Υπολογισμός 3

- Ανομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας ($\mathbf{u}$ = μεταβλητή)
- Τυχαία επιφάνεια

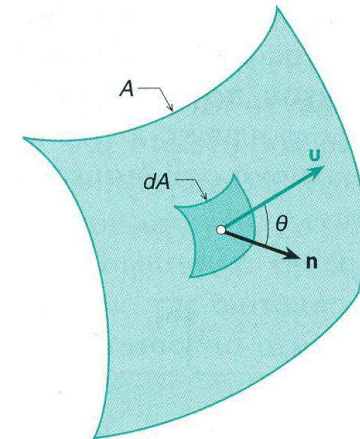
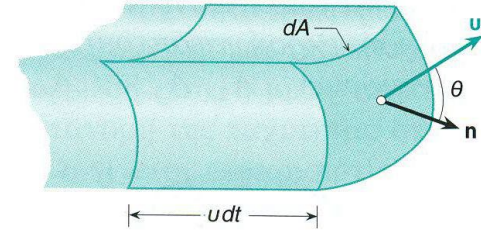
- Στοιχειώδη επιφάνεια dA με κλίση $\mathbf{n}$

$$d\dot{m} = \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dA$$

- Ολοκλήρωση (άθροισμα) σε όλη την επιφάνεια

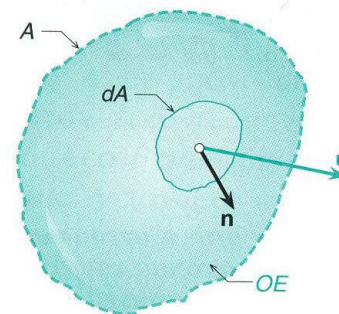
$$\dot{m} = \int_A d\dot{m} = \int_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dA$$

Ποσότητα ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου



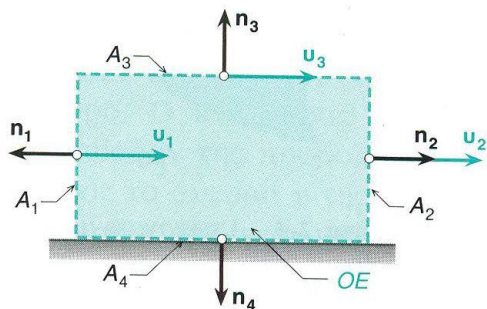
Ρυθμός ροής μάζας σε όγκο ελέγχου (ΟΕ)

- Στοιχειώδη επιφάνεια dA με κλίση $\mathbf{n}$
- Σύμβαση: **Θετική φορά** του $\mathbf{n}$ από το εσωτερικό του ΟΕ προς το περιβάλλον
 - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0 \Rightarrow$ εκροή από τον ΟΕ
 - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0 \Rightarrow$ εισροή στον ΟΕ



$$\dot{m} = \oint_A d\dot{m} = \oint_A \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ποσότητα καθαρής εκροής μάζας ρευστού από έναν όγκο ελέγχου διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου



- $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 < 0 \Rightarrow$ εισροή στον ΟΕ
- $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 > 0 \Rightarrow$ εκροή από τον ΟΕ
- $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$ ($\mathbf{u}_3$ καθ. $\mathbf{n}_3$)
- $\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{n}_4 = 0$ ($\mathbf{u}_4 = 0$)

Ρυθμός ροής όγκου και μέση ταχύτητα

- **Ρυθμός ροής όγκου** (ογκομετρική παροχή)

$$\dot{V} = \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA \quad \text{σε} \quad \text{m}^3/\text{s}$$

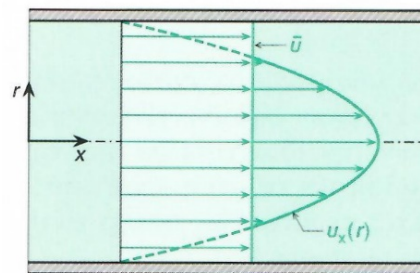
Όγκος ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου

- Για ασυμπίεστη ροή ($\rho = \text{σταθερή}$)

$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

- **Μέση ταχύτητα** σε επιφάνεια

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$



Αν είναι γνωστή η μέση ταχύτητα τότε

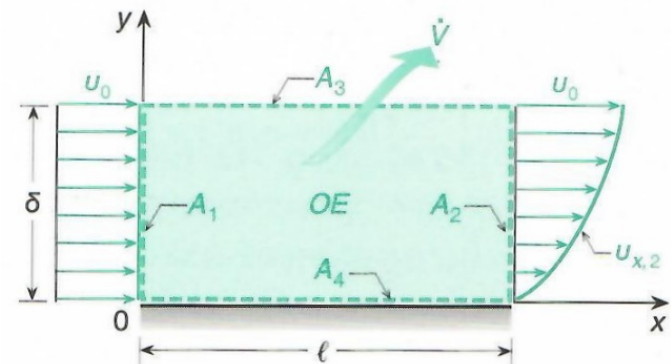
- Ογκομετρική παροχή: $\dot{V} = \bar{u} A$
- Μαζική παροχή (για $\rho = \text{ct}$): $\dot{m} = \rho \bar{u} A$

Παράδειγμα 1

Υπολογισμός ρυθμού ροής σε ΟΕ

Ένα ασυμπίεστο ρευστό ρέει πάνω από οριζόντια πλάκα, μήκους l και πλάτους b . Το ρευστό φτάνει στην πλάκα με ομοιόμορφη ταχύτητα $u_0 (= u_{x,1})$ και την εγκαταλείπει με ταχύτητα $u_{x,2}$, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$u_{x,2} = u_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$



όπου δ το πάχος του οριακού στρώματος στη θέση 2 και y η απόσταση από την επιφάνεια της πλάκας

Αν ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας από τον εικονιζόμενο όγκο ελέγχου είναι μηδέν, να υπολογιστεί ο ανά μονάδα βάθους (b) ογκομετρικός ρυθμός ροής του ρευστού διαμέσου της επίπεδης επιφάνειας στη θέση $y = \delta$ (επιφάνεια 3) ως συνάρτηση των u_0 και δ .

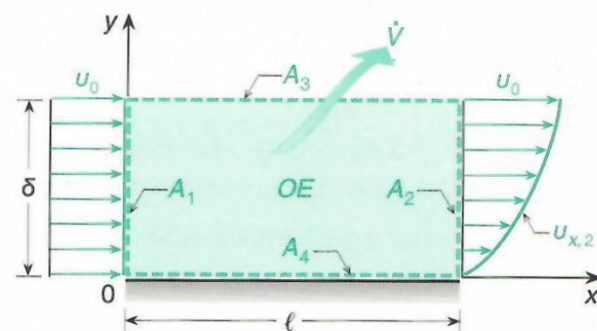
Παράδειγμα 1 – Λύση 1/2

Ανάλυση

Ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας από τον ΟΕ (που είναι ίσος με μηδέν) δίνεται από:

$$\dot{m} = \oint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να αναλυθεί σε κάθε μια από τις τέσσερις επιφάνειες του ΟΕ:



$$\int_{A_1} \rho(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 + \int_{A_2} \rho(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 + \int_{A_3} \rho(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA_4 + \int_{A_4} \rho(\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{n}_4) dA_4 = 0$$

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο ($\rho = \text{σταθερό}$) η παραπάνω γίνεται:

$$\underbrace{\int_{A_1} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1}_{\dot{V}_1} + \underbrace{\int_{A_2} (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2}_{\dot{V}_2} + \underbrace{\int_{A_3} (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA_3}_{\dot{V}_3} + \underbrace{\int_{A_4} (\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{n}_4) dA_4}_{\dot{V}_4} = 0$$

Παράδειγμα 1 – Λύση 2/2

Υπολογισμός γνωστών ρυθμών ροής

Επιφάνεια 4 – μηδενική ταχύτητα:

$$u_4 = 0 \Rightarrow \dot{V}_4 = 0$$

Επιφάνεια 1 – ομοιόμορφη ταχύτητα:

$$u_1 = u_0 \Rightarrow \dot{V}_1 = -u_0 b \delta$$

Επιφάνεια 2 – ανομοιόμορφη ταχύτητα:

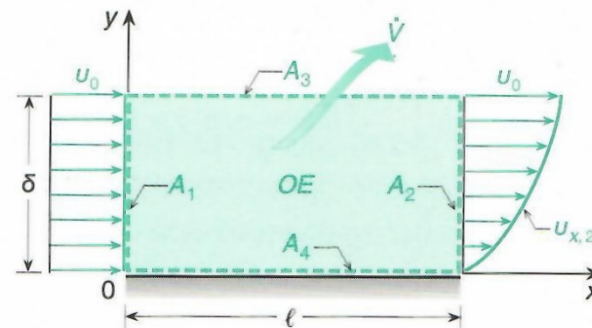
$$\dot{V}_2 = \int_{A_2} (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 = \int_{A_2} u_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) dA_2 = \int_0^\delta u_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) b dy = \frac{2u_0 b \delta}{\pi}$$

Επομένως:

$$\dot{V}_3 = -\dot{V}_1 - \dot{V}_2 - \dot{V}_4 = u_0 b \delta - \frac{2u_0 b \delta}{\pi} = u_0 b \delta \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

και:

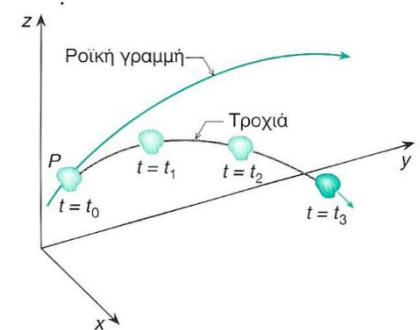
$$\frac{\dot{V}_3}{b} = u_0 \delta \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$



Γραφική παράσταση πεδίων ροής

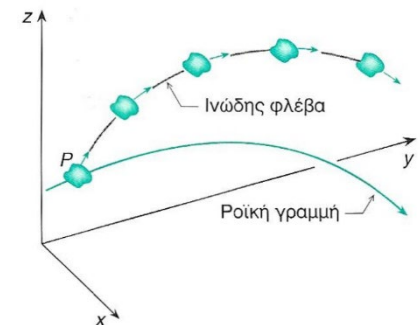
- **Τροχιά:** η διαδρομή που διανύει σωματίδιο του ρευστού στο χώρο για δεδομένο χρονικό διάστημα

Για τον πειραματικό προσδιορισμό χρωματίζεται ένα σωματίδιο ρευστού και αποτυπώνεται (π.χ. με διαδοχικές φωτογραφίες) η θέση του σε διαφορετικές χρονικές στιγμές



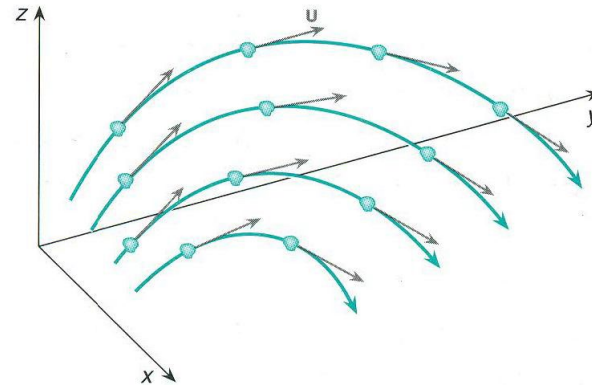
- **Ινώδης φλέβα:** Η νοητή γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται όλα τα σωματίδια που πέρασαν πριν από μία δεδομένη στιγμή από ένα σημείο του πεδίου ροής

Για τον πειραματικό προσδιορισμό εισάγονται χρωματισμένα σωματίδια (π.χ. μια χρωστική ουσία) σε προκαθορισμένο σημείο



Ροϊκές γραμμές

- **Ροϊκή γραμμή:** Η καμπύλη σε κάθε σημείο της οποίας εφάπτεται το διάνυσμα της ταχύτητας σε μια δεδομένη χρονική στιγμή

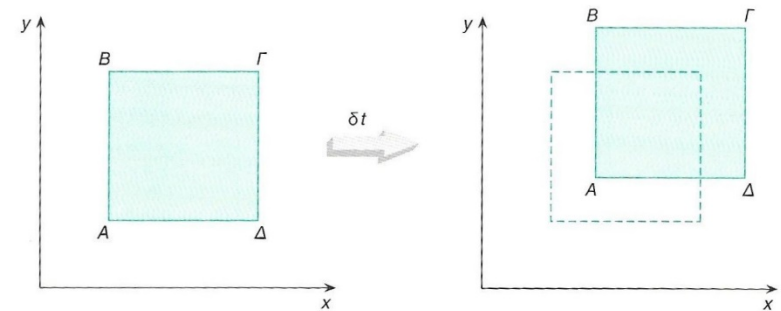


- Είναι «στιγμιαίες» (διαφοροποιούνται σε κάθε χρονική στιγμή)
- Σε μόνιμη ροή μια ροϊκή γραμμή είναι τροχιά και ινώδης φλέβα

Συνιστώσες κίνησης σωματιδίων 1/2

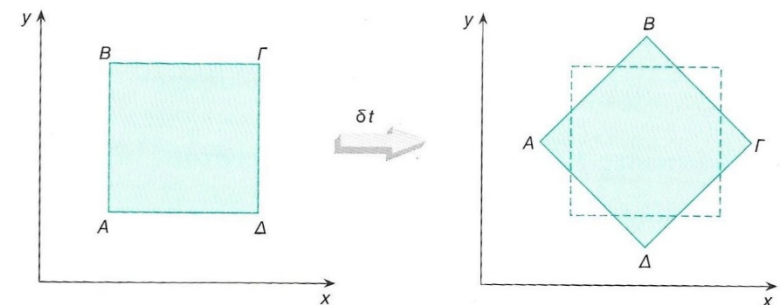
- **Μετάθεση** σωματιδίου

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε το σχήμα και ο προσανατολισμός του να παραμένουν σταθερά



- **Περιστροφή** σωματιδίου

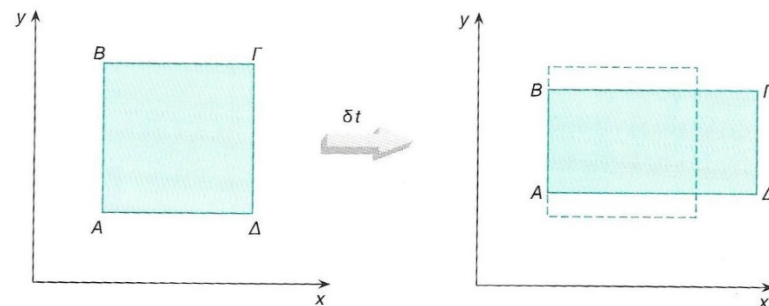
Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε το σχήμα του να παραμένει σταθερό όχι όμως ο προσανατολισμός του



Συνιστώσες κίνησης σωματιδίων 2/2

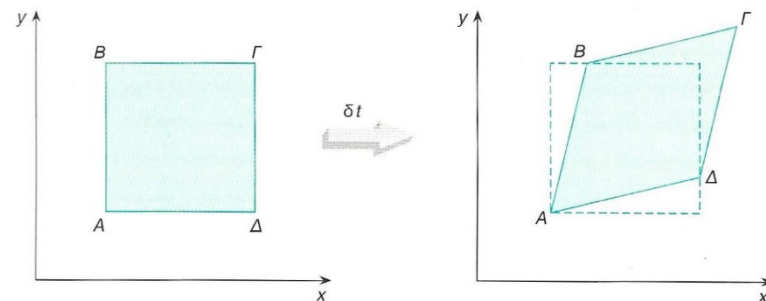
- Γραμμική παραμόρφωση

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε ο προσανατολισμός του να παραμένει ίδιος όχι όμως το σχήμα του



- Γωνιακή παραμόρφωση

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε να μεταβάλλονται ταυτόχρονα και το σχήμα του και ο προσανατολισμός του



Ρευστομηχανική

9^η Διάλεξη

Δυνάμεις σε ρευστά

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

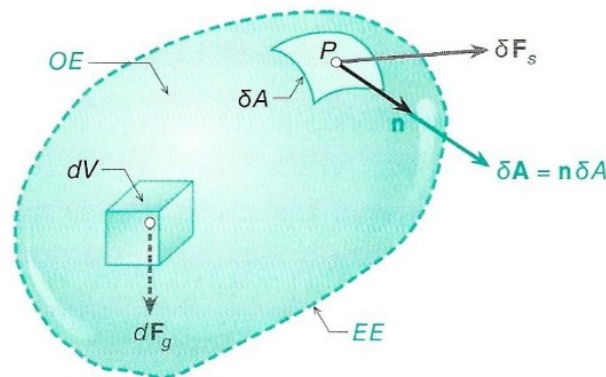
Είδη δυνάμεων

Σωματικές Δυνάμεις

- Ασκούνται σε όλο το «**σώμα**» του όγκου ελέγχου
- Προέρχονται από την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με εξωτερικά **πεδία δυνάμεων**

Επιφανειακές Δυνάμεις

- Ασκούνται στην **επιφάνεια** του όγκου ελέγχου
- Προέρχονται από την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με το **άμεσο περιβάλλον του**



Σωματικές δυνάμεις

- Καθορίζονται από το διάνυσμα της **ανά μονάδα μάζας σωματικής δύναμης** σε κάθε σημείο **$\mathbf{f}$** (σε $\text{N/kg} = \text{m/s}^2$)
- Δυνάμεις βαρύτητας** – Συνηθέστερος τύπος σωματικών δυνάμεων

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{g} = \mathbf{i}g_x + \mathbf{j}g_y + \mathbf{k}g_z$$

- Δύναμη σε σωματίδιο ρευστού του όγκου ελέγχου μάζας dm

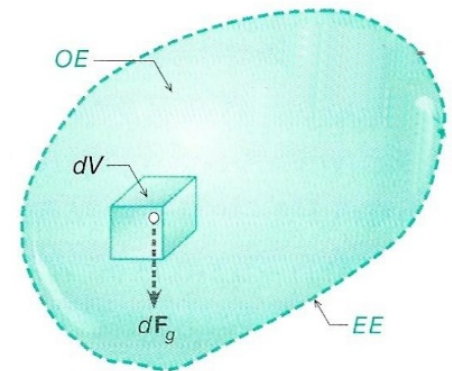
$$d\mathbf{F}_g = \mathbf{g} dm = \mathbf{g} \rho dV$$

- Συνισταμένη δυνάμεων που ασκούνται στον όγκο ελέγχου από το πεδίο βαρύτητας (ασκείται στο κέντρο μάζας του ΟΕ)

$$\mathbf{F}_g = \int_{\text{OE}} d\mathbf{F}_g = \int_{\text{OE}} \mathbf{g} \rho dV$$

* Για $\mathbf{g}$ και ρ σταθερά

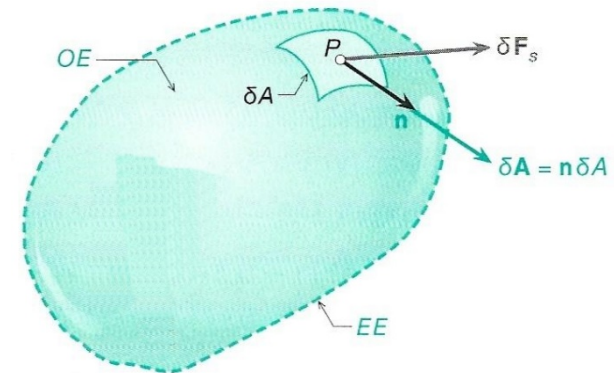
$$\mathbf{F}_g = \int_{\text{OE}} \mathbf{g} \rho dV = \mathbf{g} \rho \int_{\text{OE}} dV = \mathbf{g} \rho V = \mathbf{g} m$$



Επιφανειακές δυνάμεις

- Επιφανειακές δυνάμεις
 - **Κάθετες** (στην επιφάνεια)
 - **Εφελκυσμού** (επιμήκυνση)
 - **Θλίψης** (συμπίεση)
 - **Εφαπτομενικές** (στην επιφάνεια)
 - **Διατμητικές**
 - **Τυχαίας διεύθυνσης**
- Τάση σε σημείο της επιφάνειας ελέγχου

$$\text{τάση} = \lim_{\delta A \rightarrow \delta A_0} \frac{\delta F_s}{\delta A}$$



Συνιστώσες τάσης

- Η (επιφανειακή) δύναμη και η επιφάνεια είναι διανυσματικά μεγέθη

$$\delta \mathbf{F}_s = \mathbf{i} \delta F_x + \mathbf{j} \delta F_y + \mathbf{k} \delta F_z$$

$$\delta \mathbf{A} = \mathbf{i} \delta A_x + \mathbf{j} \delta A_y + \mathbf{k} \delta A_z$$

- Η τάση (πηλίκο $\delta \mathbf{F}_s / \delta \mathbf{A}$) έχει **9 συνιστώσες**:

$$\sigma_{xx} = \frac{\delta F_x}{\delta A_x} \quad \sigma_{xy} = \frac{\delta F_y}{\delta A_x} \quad \sigma_{xz} = \frac{\delta F_z}{\delta A_x}$$

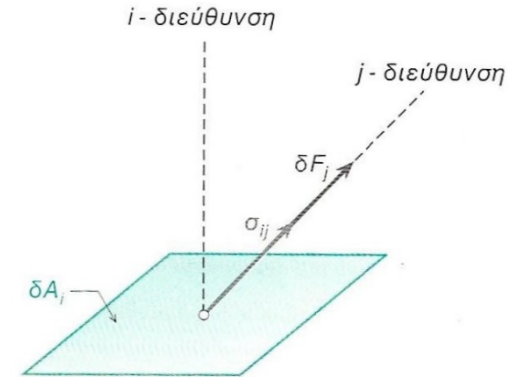
$$\sigma_{yx} = \frac{\delta F_x}{\delta A_y} \quad \sigma_{yy} = \frac{\delta F_y}{\delta A_y} \quad \sigma_{yz} = \frac{\delta F_z}{\delta A_y}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\delta F_x}{\delta A_z} \quad \sigma_{zy} = \frac{\delta F_y}{\delta A_z} \quad \sigma_{zz} = \frac{\delta F_z}{\delta A_z}$$

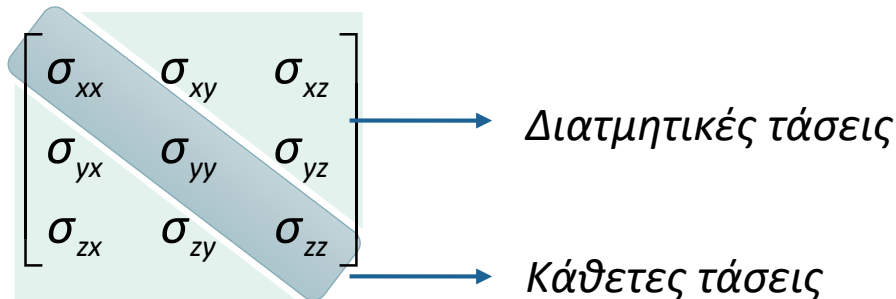
Δυαδικός (τανυστής) τάσης

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A \rightarrow A_0} \frac{\delta F_j}{\delta A_i}$$

Δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας η οποία ασκείται σε μια i -επιφάνεια κατά τη διεύθυνση j του χώρου

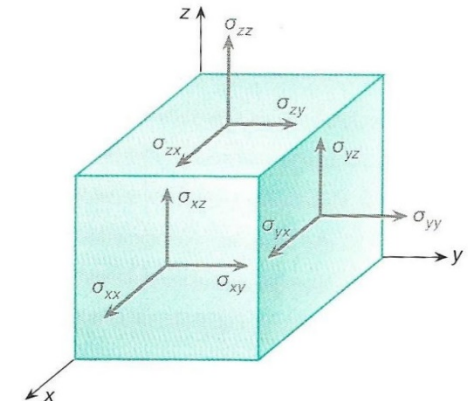


- **Καρτεσιανές συνιστώσες** δυαδικού τάσης



- Ο δυαδικός τάσης είναι **συμμετρικός**

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \Rightarrow \quad \text{Έξι ανεξάρτητες συνιστώσες}$$

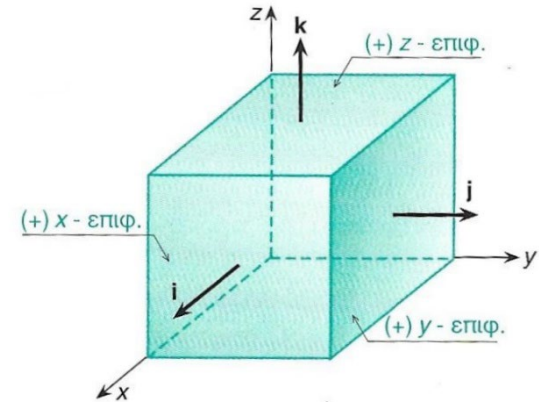


Πρόσημο επιφάνειας

Θετική επιφάνεια



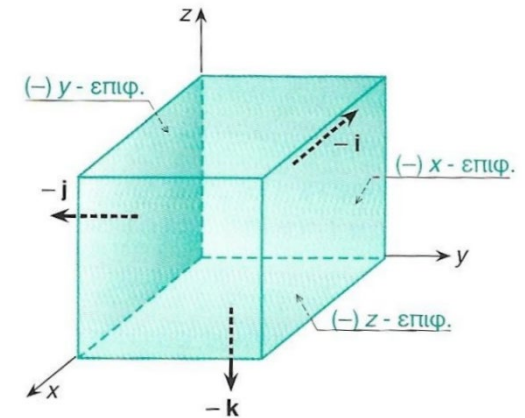
Θετικό μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$



Αρνητική επιφάνεια



Αρνητικό μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$



Πρόσημο τάσης

Θετική τάση

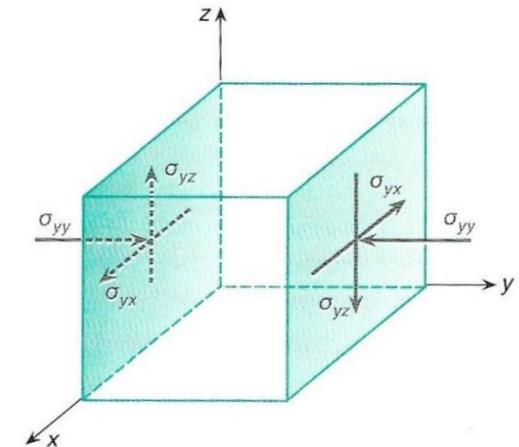
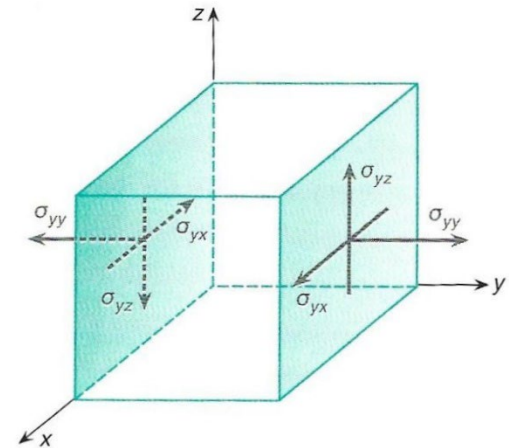


Θετική δύναμη σε θετική επιφάνεια
ή
Αρνητική δύναμη σε αρνητική επιφάνεια

Αρνητική τάση



Αρνητική δύναμη σε θετική επιφάνεια
ή
Θετική δύναμη σε αρνητική επιφάνεια

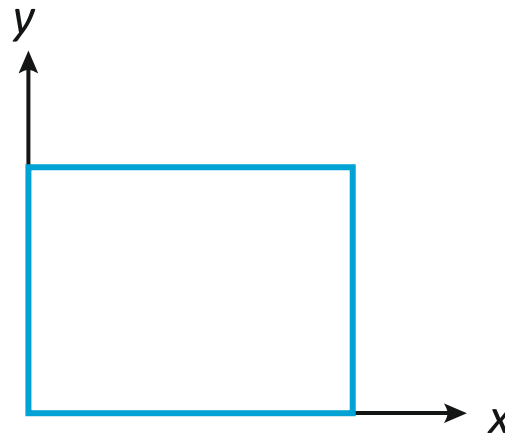


Παράδειγμα 1

Διεύθυνση και φορά τάσης

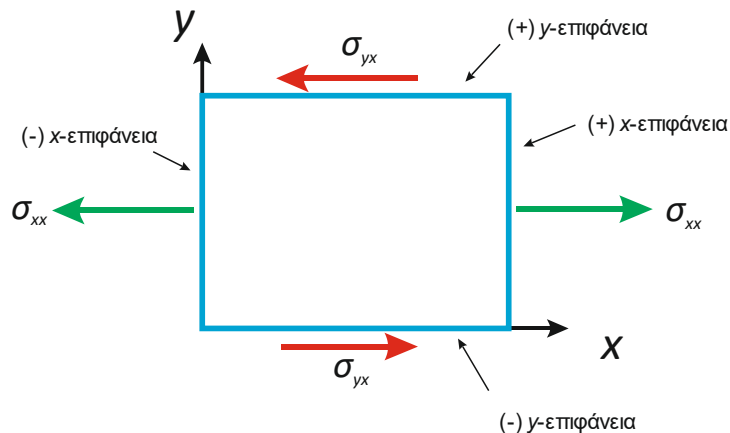
Ένα σωματίδιο ρευστού έχει σχήμα κύβου. Να σχεδιαστούν τα ανύσματα όλων των πιθανών τάσεων οι οποίες ασκούνται πάνω στις επιφάνειες του σωματιδίου και δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\sigma_{yx} = -5 \text{ kPa} \quad \text{και} \quad \sigma_{xx} = 10 \text{ kPa}$$



Παράδειγμα 1 – Λύση

- Η τάση σ_{yx} ασκείται σε μια y -επιφάνεια και έχει φορά κατά τη x -διεύθυνση:
- Επειδή έχει αρνητική τιμή ασκείται:
 - είτε σε μια θετική y -επιφάνεια κατά την αρνητική x -διεύθυνση
 - είτε σε μια αρνητική y -επιφάνεια κατά τη θετική x -διεύθυνση
- Η τάση σ_{xx} ασκείται σε μια x -επιφάνεια και έχει φορά κατά τη x -διεύθυνση:
- Επειδή έχει θετική τιμή ασκείται:
 - είτε σε μια θετική x -επιφάνεια κατά τη θετική x -διεύθυνση
 - είτε σε μια αρνητική x -επιφάνεια κατά την αρνητική x -διεύθυνση



Δυαδικός πίεσης και ιξώδους τάσης

- Ο δυαδικός τάσης είναι το άθροισμα του **δυαδικού πίεσης** και του **δυαδικού ιξώδους τάσης**

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

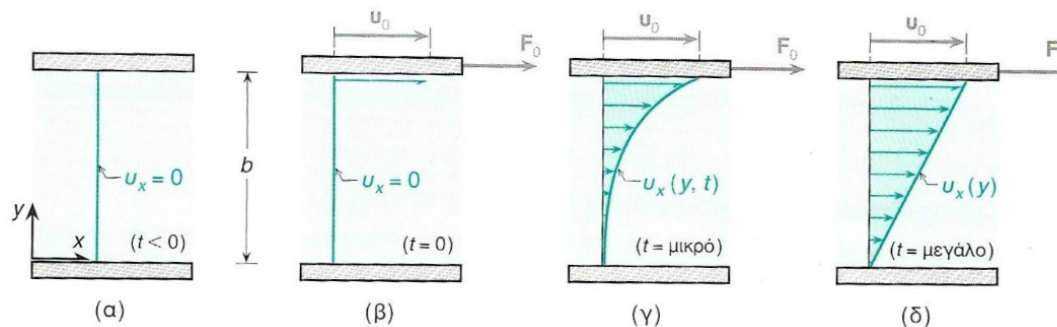
$$\sigma_{ij} = -p + \tau_{ij} \quad \forall i = j \quad \text{Κάθετες τάσεις}$$

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} \quad \forall i \neq j \quad \text{Διατμητικές τάσεις}$$

- Η πίεση είναι **ισοτροπικό** μέγεθος (δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας στην οποία ασκείται)
- Η πίεση ασκείται πάντα **κάθεται** στην επιφάνεια και έχει διεύθυνση **προς το εσωτερικό** του ΟΕ, προκαλώντας συμπίεση του ρευστού
- Οι ιξώδεις τάσεις οφείλονται στο ιξώδες του ρευστού και μπορεί να είναι κάθετες και διατμητικές

Προϋπόθεση ανάπτυξης ιξωδών τάσεων

- Προϋποθέσεις ανάπτυξης ιξωδών τάσεων:
 - Ιξώδες ρευστό** (τα ιδανικά ρευστά έχουν μηδενικό ιξώδες και δεν εμφανίζουν ιξώδεις τάσεις)
 - Διαφορά ταχύτητας μεταξύ γειτονικών στρωμάτων ρευστού – **βαθμίδα ταχύτητας**



- Δυναμικός βαθμίδας ταχύτητας:

$$\begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x & \partial u_y / \partial x & \partial u_z / \partial x \\ \partial u_x / \partial y & \partial u_y / \partial y & \partial u_z / \partial y \\ \partial u_x / \partial z & \partial u_y / \partial z & \partial u_z / \partial z \end{bmatrix}$$

Πίεση σε ακίνητα και κινούμενα ρευστά

Ακίνητα ρευστά

- Μηδενικές ιξώδεις τάσεις
- Ο δυαδικός τάσης έχει μόνο κάθετες συνιστώσες
- Οι κάθετες τάσεις είναι ίσες μεταξύ τους και αντίθετες με την (στατική) πίεση

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

Κινούμενα ρευστά

- Οι κάθετες τάσεις είναι το άθροισμα των κάθετων ιξωδών τάσεων και της στατικής πίεσης

$$\sigma_{xx} = \tau_{xx} - p \quad \sigma_{yy} = \tau_{yy} - p \quad \sigma_{zz} = \tau_{zz} - p$$

- Η **συνολική πίεση** σε ένα σημείο κινούμενου ρευστού ορίζεται ως:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

Παράδειγμα 2

Υπολογισμός πίεσης και δυαδικού ιξώδους τάσης

Ο πίνακας των συνιστωσών του δυαδικού τάσης ενός ρευστού σε ένα σημείο P δίνεται από:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ -3 & -15 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

- (α) Να υπολογιστεί η πίεση του ρευστού στο σημείο P
- (β) Ποιες είναι οι συνιστώσες του δυαδικού ιξώδους τάσης

Παράδειγμα 2 – Λύση 1/2

(α) Πίεσης ρευστού

Σύμφωνα με τον δυαδικό τάσης, οι κάθετες τάσεις στο σημείο P είναι:

$$\sigma_{xx} = -10 \text{ kPa}, \sigma_{yy} = -15 \text{ kPa}, \sigma_{zz} = -5 \text{ kPa}$$

Επομένως:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = 10 \text{ kPa}$$

(β) Ιξώδεις τάσεις

Ο δυαδικός τάσης στο σημείο P είναι το άθροισμα του δυαδικού πίεσης και του δυαδικού ιξώδους τάσης:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 2/2

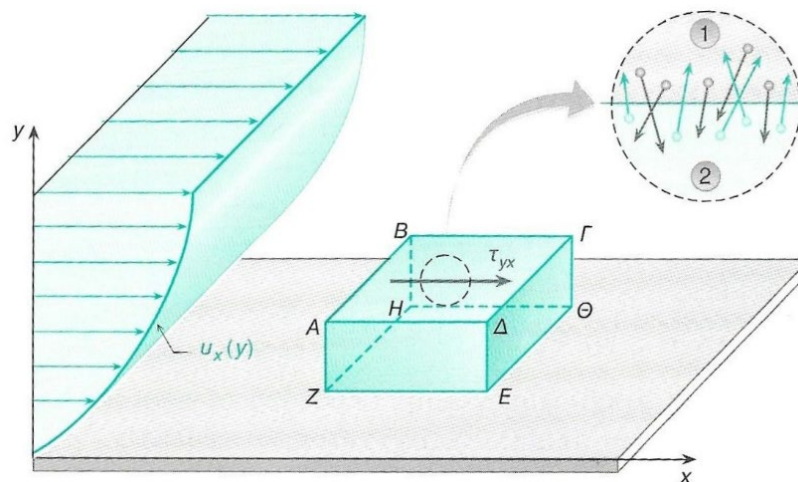
Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Και:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ -3 & -15 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

Μοριακή θεώρηση ιξωδών τάσεων



σ_{ij}

Δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας η οποία ασκείται σε μια i -επιφάνεια κατά τη διεύθυνση j του χώρου

Ρυθμός μεταφοράς j -ορμής ανά μονάδα επιφάνειας κατά τη διεύθυνση i

Ρευστομηχανική

10^η Διάλεξη

Παραμόρφωση ρευστών και υλική σχέση

Γεώργιος Αραμπατζής

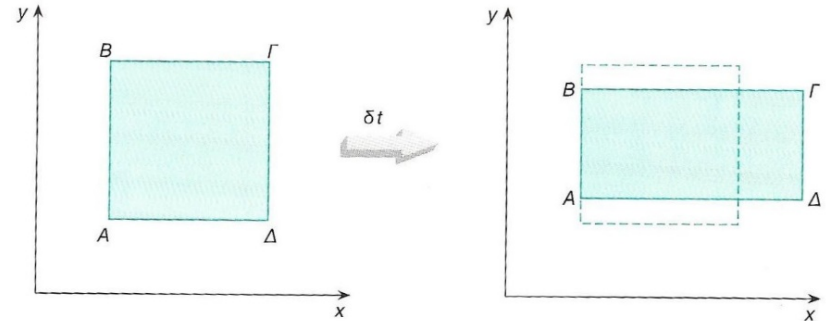
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Είδη παραμόρφωσης ρευστού

- **Γραμμική παραμόρφωση**

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε

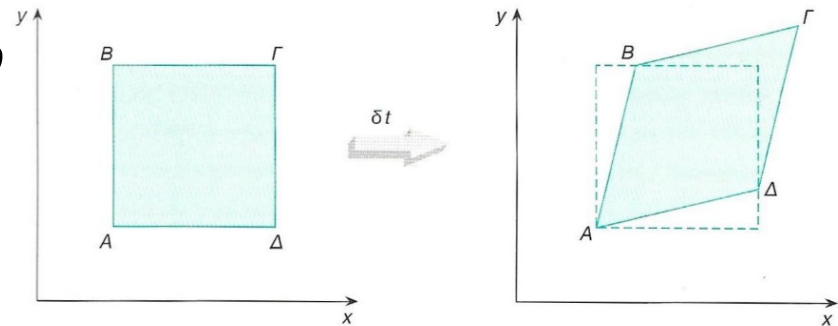
ο προσανατολισμός του να παραμένει ίδιος όχι όμως το σχήμα του



- **Γωνιακή παραμόρφωση**

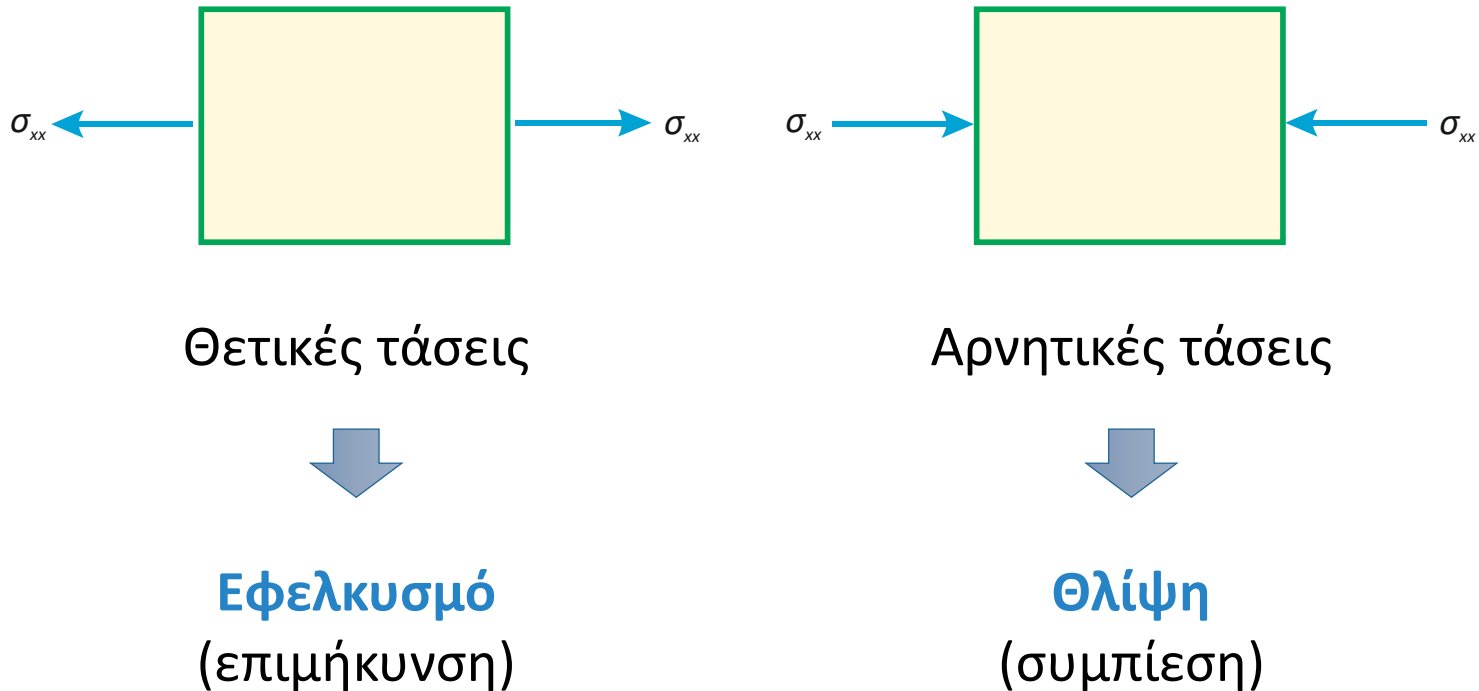
Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε

να μεταβάλλονται ταυτόχρονα και το σχήμα του και ο προσανατολισμός του



Γραμμική παραμόρφωση

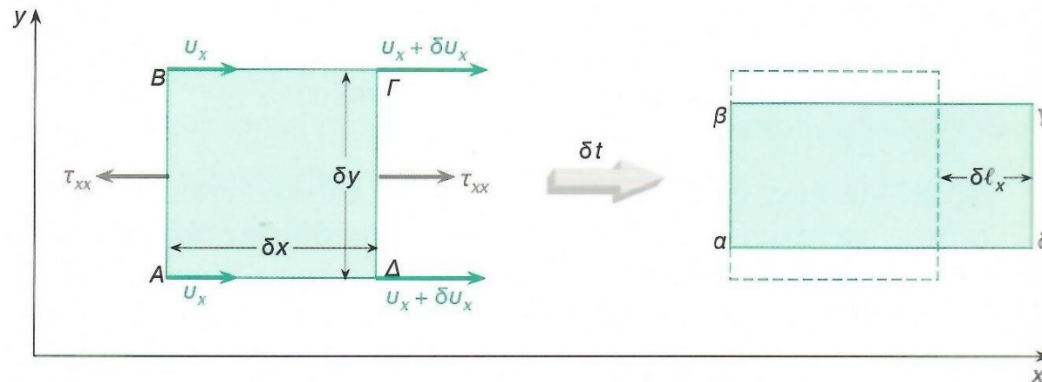
- Ένα σωματίδιο ρευστού υφίσταται γραμμική παραμόρφωση όταν ασκούνται σε αυτό **κάθετες τάσεις**



Ρυθμός γραμμικής παραμόρφωσης

- Στιγμιαίος ρυθμός επιμήκυνσης ενός μοναδιαίου ευθύγραμμου τμήματος

Ρυθμός γραμμικής παραμόρφωσης κατά τη x-διεύθυνση



$$e_{xx} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta l_x / \delta x}{\delta t} \right) \quad \delta l_x = (\delta u_x)(\delta t) \quad = \quad \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u_x}{\delta x} \right)$$



$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

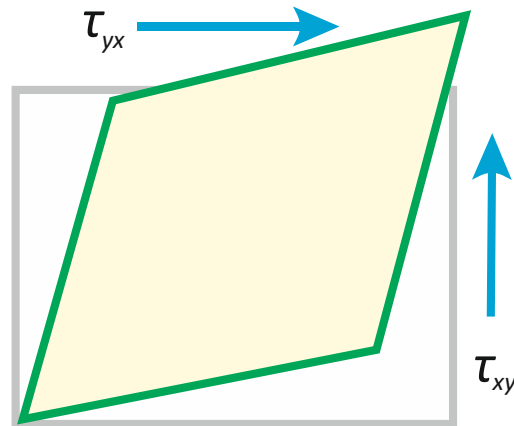
Παρόμοια:

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Γωνιακή παραμόρφωση

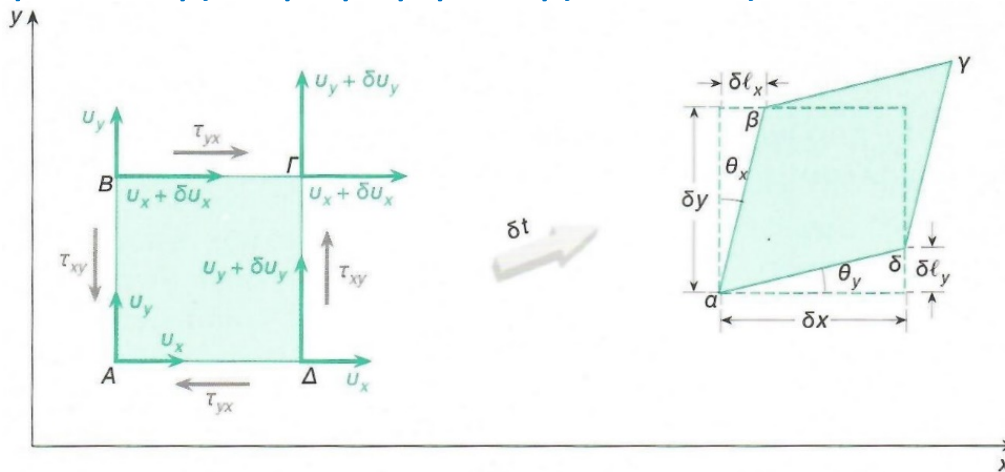
- Ένα σωματίδιο ρευστού υφίσταται γωνιακή παραμόρφωση όταν ασκούνται σε αυτό **διατμητικές τάσεις**



Ρυθμός γωνιακής παραμόρφωσης

- Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της γωνίας μεταξύ δύο ευθύγραμμων τμημάτων τα οποία ήταν αρχικά παράλληλα με τους άξονες

Ρυθμός γωνιακής παραμόρφωσης κατά τις διευθύνσεις x και y



$$\dot{\gamma}_{xy} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vartheta_x + \vartheta_y}{\delta t} \right) \quad \begin{matrix} \vartheta_x = \tan \vartheta_x = \delta l_x / \delta y = \delta u_x \delta t / \delta y \\ \vartheta_y = \tan \vartheta_y = \delta l_y / \delta x = \delta u_y \delta t / \delta x \end{matrix} \quad \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Παρόμοια:

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

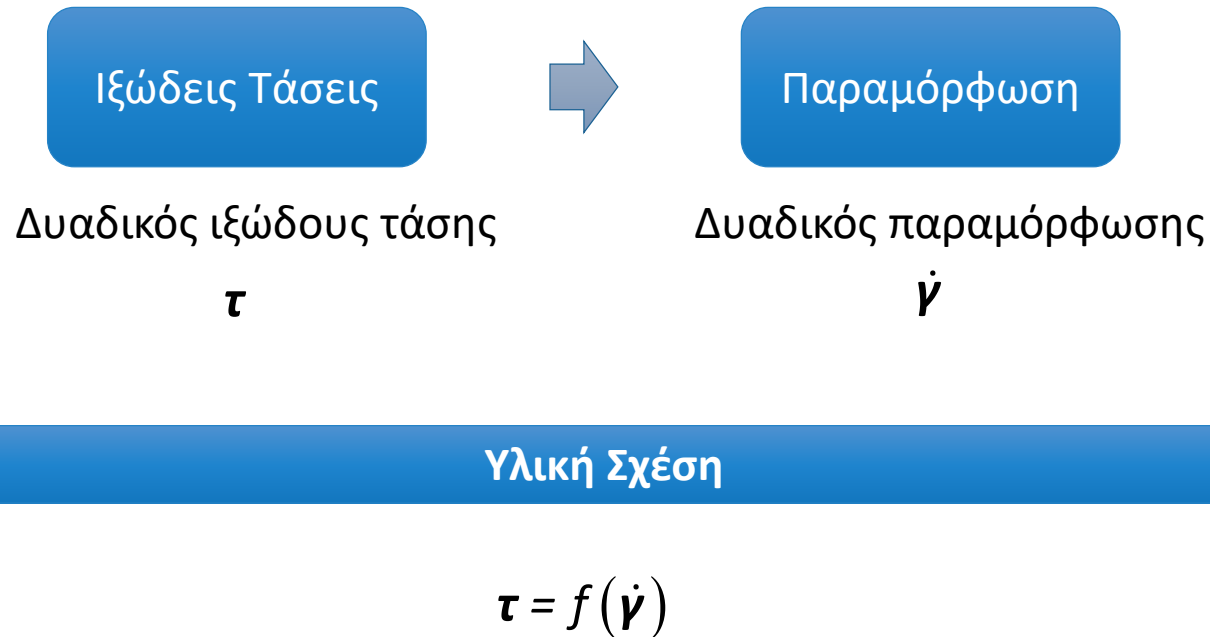
Δυαδικός ρυθμός παραμόρφωσης

- Ο συνολικός ρυθμός παραμόρφωσης ενός σωματιδίου ρευστού περιγράφεται πλήρως από τον **δυαδικό (τανυστή) παραμόρφωσης**

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\gamma}_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_{xx} &= 2e_{xx} = 2\frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_{yy} &= 2e_{yy} = 2\frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{zz} &= 2e_{zz} = 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\dot{\gamma}_{ij}] = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Η έννοια της υλικής σχέσης



Νόμος ιξώδους του Newton

- Υλική σχέση στην περίπτωση στρωτής, **μονοδιάστατης** ροής, νευτωνικού ρευστού

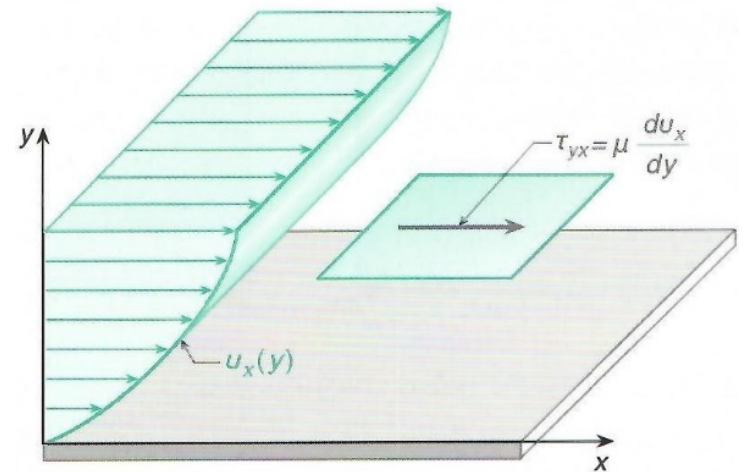
$$u_x = u_x(y), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0$$

$$\dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{du_x}{dy}$$

- Νόμος ιξώδους του Newton

$$\tau_{yx} = \mu \dot{\gamma}_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy}$$

Η διατμητική τάση είναι ανάλογη του ρυθμού παραμόρφωσης



μ : δυναμικό **ιξώδες**

Σχέσεις ιξώδους του Stokes 1

- Επέκταση των ορίων ισχύος του νόμου του Newton σε τρισδιάστατη ροή
- Οι **διατμητικές (ιξώδεις) τάσεις** είναι ίσες με το γινόμενο του ιξώδους με τον αντίστοιχο ρυθμό παραμόρφωσης

$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall i \neq j$$



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

Σχέσεις ιξώδους του Stokes 2

- Οι **κάθετες ιξώδεις τάσεις** δίνονται από:

$$\tau_{ii} = \mu \dot{\gamma}_{ii} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$



$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Υλική σχέση για ασυμπίεστη ροή

- Σε ασυμπίεστη ροή:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

- Επομένως:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ρευστομηχανική

11^η Διάλεξη

Επαναληπτικές ασκήσεις σε δυνάμεις
και παραμόρφωση ρευστών

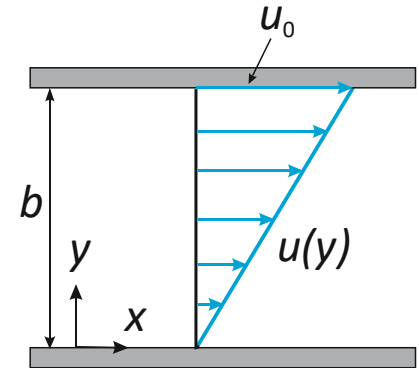
Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Άσκηση 1

Κατανομή διατμητικών τάσεων

Ένα νευτωνικό ρευστό με ιξώδες $\mu = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ βρίσκεται στο χώρο μεταξύ δύο παράλληλων οριζόντιων πλακών που απέχουν απόσταση $b = 0.5 \text{ mm}$. Η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 0.7 \text{ m/s}$ ενώ η κάτω πλάκα παραμένει ακίνητη. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, αναπτύσσεται ένα γραμμικό προφίλ της ταχύτητας u_x σε μια εγκάρσια διατομή:



- (α) Να υπολογιστεί η αναλυτική έκφραση και να σχεδιαστεί η κατανομή της ταχύτητας σε μια εγκάρσια διατομή.
- (β) Να υπολογιστεί η αναλυτική έκφραση και να σχεδιαστεί η κατανομή της διατμητικής τάσης σε μια εγκάρσια διατομή.
- (γ) Να υπολογιστούν οι διατμητικές δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας που ασκούνται από το ρευστό στις δύο πλάκες.

Άσκηση 1 – Λύση 1/3

(α) Κατανομή ταχύτητας

Η αναλυτική έκφραση της u_x ταχύτητας έχει τη μορφή:

$$u_x = a_0 + a_1 y$$

όπου y , η απόσταση από την κάτω πλάκα.

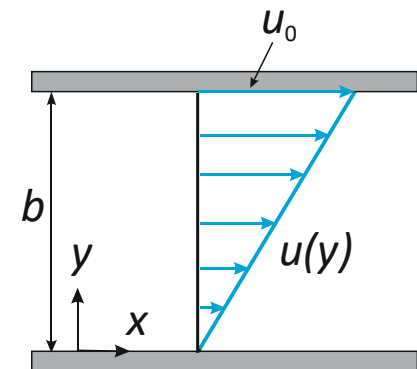
Οι σταθερές a_0 και a_1 υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες:

στη θέση $y = 0$ η ταχύτητα έχει τιμή 0: $u_x = a_0 + a_1 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

στη θέση $y = b$ η ταχύτητα έχει τιμή u_0 : $u_x = a_1 b = u_0 \Rightarrow a_1 = u_0 / b$

Επομένως, η κατανομή της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση:

$$u_x = u_0 \frac{y}{b}$$

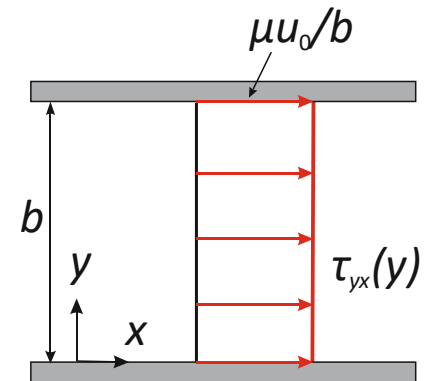


Άσκηση 1 – Λύση 2/3

(β) Κατανομή διατμητικών τάσεων

Επειδή το ρευστό είναι νευτωνικό και η ροή μονοδιάστατη, η μόνη διατμητική τάση είναι η τ_{yx} και δίνεται από τη σχέση του Newton:

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \mu \frac{du_x}{dy} = u_0 \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{y}{b} \right) = \frac{\mu u_0}{b} \frac{dy}{dy} = \frac{\mu u_0}{b} = \frac{0.1 \times 0.7}{0.0005} \\ &= 140 \text{ Pa} \quad (\text{σταθερή})\end{aligned}$$



Άσκηση 1 – Λύση 3/3

(γ) Δυνάμεις που ασκούνται στις πλάκες

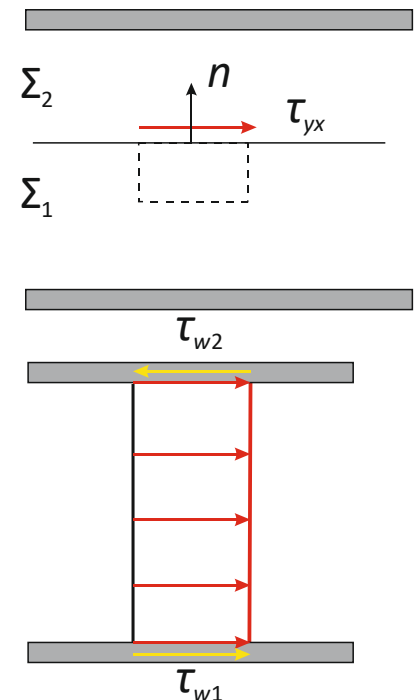
Η τάση τ_{yx} έχει θετικό πρόσημο. Επομένως

- Είναι προς τη θετική x-φορά όταν ασκείται σε θετική y-επιφάνεια.
- Είναι προς την αρνητική x-φορά όταν ασκείται σε αρνητική y-επιφάνεια.

Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί με θετική x-φορά. Άρα οι τάσεις αυτές ασκούνται σε θετικές y-επιφάνειες, δηλαδή ασκούνται από τα «επόμενα/πάνω» (Σ_2) στρώματα στα «προηγούμενα/κάτω» (Σ_1).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τάση που ασκείται στην κάτω επιφάνεια (τ_{w1}) έχει θετική φορά (από το ρευστό που βρίσκεται «πάνω» από το στερεό) ενώ η τάση που ασκείται στην πάνω επιφάνεια (τ_{w2}) έχει αρνητική φορά (από το ρευστό που βρίσκεται «κάτω» από το στερεό):

$$\tau_{w1} = \tau_{yx} = 140 \text{ Pa} \quad \tau_{w2} = -\tau_{yx} = -140 \text{ Pa}$$



Άσκηση 2

Κατανομή διατμητικών τάσεων σε παραβολικό προφίλ ταχύτητας

Να επαναληφθεί η άσκηση 1 για την περίπτωση που οι δύο πλάκες είναι ακίνητες και η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού σε μια εγκάρσια διατομή δίνεται από τη:

$$\mathbf{u} = u_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right) \mathbf{i}$$

όπου y η απόσταση από το μέσο μεταξύ των δύο πλακών.

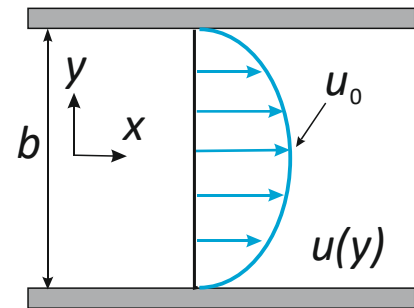
Άσκηση 2 – Λύση 1/1

(α) Κατανομή ταχύτητας

$$u_x = u_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right) \quad (\text{παραβολικό προφίλ})$$

$$u_x = 0 \quad \text{στις θέσεις } y = \pm b/2$$

$$u_x = u_0 \quad \text{στη θέση } y = 0$$



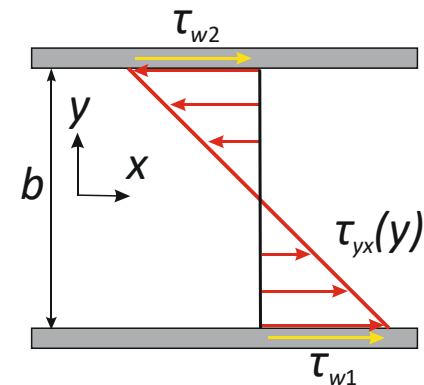
(β) Κατανομή διατμητικών τάσεων

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} = -\frac{8\mu u_0}{b^2} y \quad (\text{γραμμική})$$

(γ) Δυνάμεις που ασκούνται στις πλάκες

$$\tau_{w1} = \tau_{yx}(y = -b/2) = 560 \text{ Pa}$$

$$\tau_{w2} = -\tau_{yx}(y = b/2) = 560 \text{ Pa}$$



Άσκηση 3

Υπολογισμός τάσεων από πεδίο ταχύτητας

Το πεδίο ταχύτητας ενός νευτωνικού ρευστού, το οποίο έχει ιξώδες $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, δίνεται από τη διανυσματική σχέση:

$$\mathbf{u} = 4xyz\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - 2yz^2\mathbf{k} \quad (\text{m/s})$$

Όπου οι χωρικές συντεταγμένες x, y, z είναι σε μέτρα (m).

Να υπολογιστούν:

(α) Οι κάθετες τάσεις ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$)

(β) Οι διατμητικές τάσεις ($\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx}, \sigma_{xz}$)

που αναπτύσσονται στο σημείο (2, 1, 1) του πεδίου, αν η πίεση (στατική) στο σημείο αυτό είναι 8 kPa.

Άσκηση 3 – Λύση 1/4

(α) Κάθετες τάσεις

Η κάθετη τάση στη x-διεύθυνση (σ_{xx}) δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx}$$

Όπου τ_{xx} , η κάθετη ιξώδης τάση η οποία για ένα νευτωνικό ρευστό δίνεται από την υλική σχέση του Stokes:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

όπου:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(4xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz^2) = 4yz + 0 - 4yz = 0$$

Επομένως:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} = -p + 2\mu \frac{\partial}{\partial x}(4xyz) = -p + 8\mu yz$$

Άσκηση 3 – Λύση 2/4

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι:

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} = -p + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} (z^2) = -p$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = -p + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} (-2yz^2) = -p - 8\mu yz$$

Και αντικαθιστώντας $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $p = 8000 \text{ Pa}$, $x = 2 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$ και $z = 1 \text{ m}$ προκύπτει:

$$\sigma_{xx} = -8000 + 8 \times 1.5 \times 1 \times 1 = -7988 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{yy} = -8000 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{zz} = -8000 - 8 \times 1.5 \times 1 \times 1 = -8012 \text{ Pa}$$

Άσκηση 3 – Λύση 3/4

(β) Διατμητικές τάσεις

Οι διατμητικές τάσεις (σ_{ij}) είναι ίσες με τις αντίστοιχες διατμητικές ιξώδεις τάσεις. Έτσι:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy}$$

Όπου η ιξώδης τάση τ_{xy} , για ένα νευτωνικό ρευστό, δίνεται από την υλική σχέση του Stokes:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Επομένως:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial y} (4xyz) + \frac{\partial}{\partial x} (z^2) \right) = 4\mu xz$$

Άσκηση 3 – Λύση 4/4

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} (z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-2yz^2) \right) = 2\mu z(1-z)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} (-2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z} (4xyz) \right) = 4\mu xy$$

Και αντικαθιστώντας $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $p = 8000 \text{ Pa}$, $x = 2 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$ και $z = 1 \text{ m}$ προκύπτει:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 4 \times 1.5 \times 2 \times 1 = 12 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2 \times 1.5 \times 1 \times (1-1) = 0 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 4 \times 1.5 \times 2 \times 1 = 12 \text{ Pa}$$

Ρευστομηχανική

12^η Διάλεξη

Μακροσκοπική ανάλυση ροής – Εξίσωση συνέχειας

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds

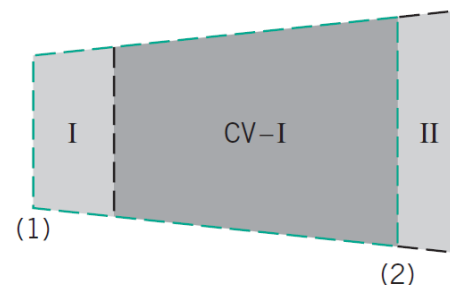
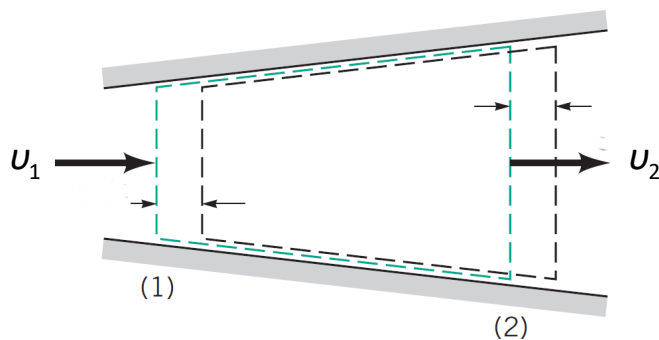
- Οι φυσικοί νόμοι εκφράζουν το **ρυθμό μεταβολής** μιας ιδιότητας (μάζα, ορμή, ενέργεια) σε ένα **σύστημα**
- Πως εκφράζονται οι φυσικοί νόμοι σε έναν **όγκο ελέγχου**;
- Ο ΟΕ ορίζεται από μια κλειστή επιφάνεια μέσω της οποίας υπάρχει ροή ρευστού και προκαλεί μεταβολή της οποιασδήποτε **εκτατικής ιδιότητας** B

Εκτατική ιδιότητα (B)	Εντατική ιδιότητα $b = B/m$
m	1
$\mathbf{P} = m\mathbf{u}$	$\mathbf{u}$
$E = 1/2 m u^2$	$1/2 u^2$

- Το θεώρημα μεταφοράς συνδέει το ρυθμό μεταβολής μιας ιδιότητας σε ένα σύστημα με χρονικές μεταβολές της ίδιας ιδιότητας σε έναν όγκο ελέγχου και τους ρυθμούς εισροής και εκροής της ιδιότητας στον όγκο ελέγχου

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = f \left[\left(\frac{dB}{dt} \right)_{OE}, \dot{B}_{in}, \dot{B}_{out} \right]$$

Θεώρημα μεταφοράς – Μονοδιάστατη ροή 1/2



- - - - - Όγκος ελέγχου και σύστημα τη χρονική στιγμή t
 - - - - - Σύστημα τη χρονική στιγμή $t + \delta t$

Εκτατική ιδιότητα B συστήματος

$$B_{\Sigma}(t) = B_{OE}(t)$$

$$B_{\Sigma}(t + \delta t) = B_{OE}(t + \delta t) - B_I(t + \delta t) + B_{II}(t + \delta t)$$



$$\frac{\delta B_{\Sigma}}{\delta t} = \frac{B_{\Sigma}(t + \delta t) - B_{\Sigma}(t)}{\delta t} = \frac{B_{OE}(t + \delta t) - B_{OE}(t)}{\delta t} + \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} - \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t}$$

(1)

(2)

(3)

(4)

Θεώρημα μεταφοράς – Μονοδιάστατη ροή 2/2

$$(1) \quad \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B_{\Sigma}}{\delta t} = \left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma}$$

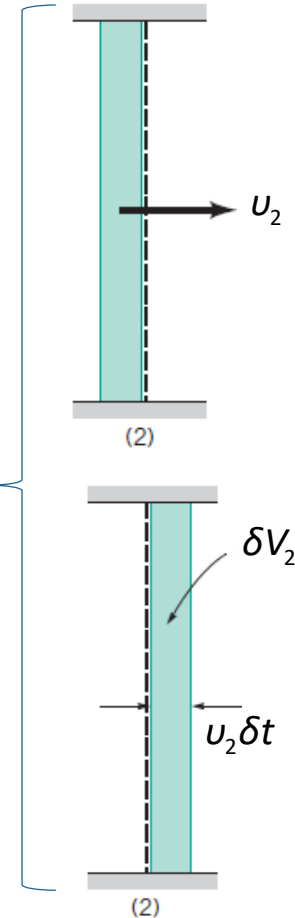
$$(2) \quad \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{OE}(t + \delta t) - B_{OE}(t)}{\delta t} = \left(\frac{dB}{dt} \right)_{OE} = \frac{\partial B_{OE}}{\partial t}$$

$$(3) \quad B_{II}(t + \delta t) = \rho_2 \delta V_2 b_2 = \rho_2 A_2 u_2 \delta t b_2 \Rightarrow \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{II}(t + \delta t)}{\delta t} = \rho_2 A_2 u_2 b_2$$

$$(4) \quad B_I(t + \delta t) = \rho_1 \delta V_1 b_1 = \rho_1 A_1 u_1 \delta t b_1 \Rightarrow \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_I(t + \delta t)}{\delta t} = \rho_1 A_1 u_1 b_1$$



$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{\partial B_{OE}}{\partial t} + \rho_2 A_2 u_2 b_2 - \rho_1 A_1 u_1 b_1$$



Θεώρημα μεταφοράς – Γενική μορφή

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} b \rho dV + \oint_{EE} b \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ρυθμός καθαρής εκροής της ιδιότητας B από τον ΟΕ διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου

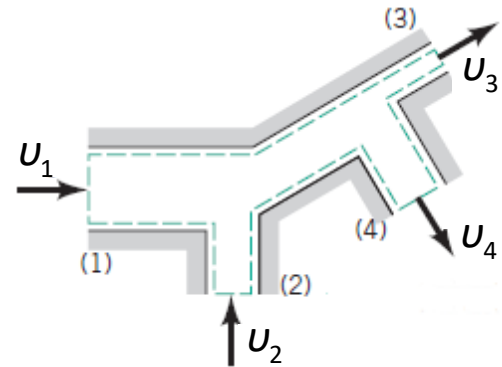
Ρυθμός μεταβολής της ιδιότητας B του ρευστού που περιέχεται στον ΟΕ (ρυθμός συσσώρευσης B στον ΟΕ)

Ρυθμός μεταβολής της ιδιότητας B συστήματος

Θεώρημα μεταφοράς – Απλή μορφή

- Πολλαπλές εισοδοι και έξοδοι, **ομοιόμορφες ιδιότητες** (u , ρ και b) στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου

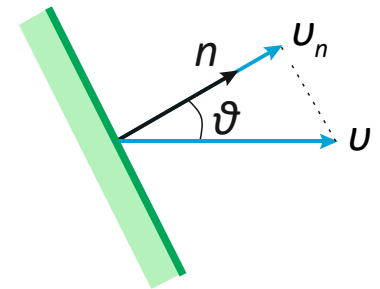
$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} b \rho dV + \sum_{out} \rho_{out} A_{out} u_{out} b_{out} - \sum_{in} \rho_{in} A_{in} u_{in} b_{in}$$



Παρατηρήσεις

- Τα μεγέθη u_{out} και u_{in} είναι τα μέτρα των ταχυτήτων και έχουν πάντα **θετικό πρόσημο** ανεξάρτητα από τη φορά των διανυσμάτων των ταχυτήτων σε σχέση με το σύστημα αξόνων
- Ο όγκος ελέγχου, κατά κανόνα, επιλέγεται έτσι ώστε **οι ταχύτητες να είναι κάθετες στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου**. Αν όχι, στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιούνται οι **κάθετες στις επιφάνειες συνιστώσες** της ταχύτητας:

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u \cos \vartheta$$



Εξίσωση συνέχειας

- Μαθηματική διατύπωση νόμου διατήρησης της μάζας για όγκο ελέγχου
- Προκύπτει από το θεώρημα μεταφοράς για
$$B = m$$
$$b = m/m = 1$$

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_\Sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV + \oint_{EE} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της} \\ \text{μάζας του ρευστού που} \\ \text{περιέχεται στον ΟΕ} \\ \text{(ρυθμός συσσώρευσης μάζας στον ΟΕ)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής μάζας} \\ \text{από την επιφάνεια ελέγχου} \\ \text{λόγω ροής του ρευστού} \end{array} \right\} = 0$$

Εξίσωση συνέχειας – Απλή μορφή

- Πολλαπλές εισοδοι και έξοδοι, **ομοιόμορφη ταχύτητα και πυκνότητα** στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV}_{m_{OE}} + \underbrace{\sum_{out} \rho_{out} u_{out} A_{out}}_{\dot{m}_{out}} - \underbrace{\sum_{in} \rho_{in} u_{in} A_{in}}_{\dot{m}_{in}} = 0$$

- Η παραπάνω μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη γενική περίπτωση μη-ομοιόμορφης ταχύτητας ή/και πυκνότητας, αν χρησιμοποιηθούν οι μέσες τιμές:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_A u dA$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{A} \int_A \rho dA$$

Εξίσωση συνέχειας – Μόνιμη ροή

- Μόνιμη ροή, δηλαδή: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV = 0$

- Γενική μορφή

$$\oint_{EE} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

- Απλή μορφή

$$\sum_{in} \rho_{in} u_{in} A_{in} = \sum_{out} \rho_{out} u_{out} A_{out} \quad \text{ή} \quad \sum_{in} \dot{m}_{in} = \sum_{out} \dot{m}_{out}$$

Εξίσωση συνέχειας – Ασυμπίεστη ροή

- Ασυμπίεστη ροή, δηλαδή: $\rho = \text{σταθερή}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} dV = 0 \quad \text{επομένως} \quad \oint_{EE} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = \rho \oint_{EE} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

- Γενική μορφή

$$\oint_{EE} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

- Απλή μορφή

$$\sum_{in} u_{in} A_{in} = \sum_{out} u_{out} A_{out}$$

ή

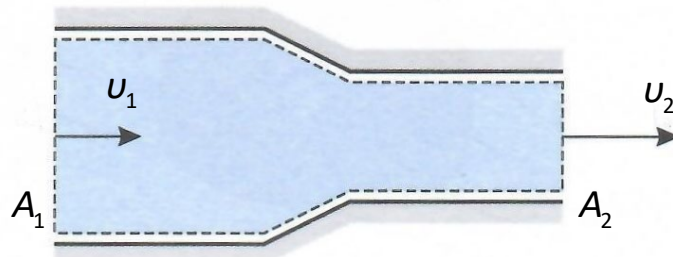
$$\sum_{in} \dot{V}_{in} = \sum_{out} \dot{V}_{out}$$

Παράδειγμα 1

Εξίσωση συνέχειας σε αγωγό

Σε ένα τμήμα αγωγού κυκλικής διατομής η διάμετρος ελαττώνεται από $D_1 = 10 \text{ cm}$ σε $D_2 = 5 \text{ cm}$

Αν το νερό εισέρχεται με ομοιόμορφη ταχύτητα $u_1 = 2 \text{ m/s}$, να υπολογιστεί η ταχύτητα εξόδου του νερού.

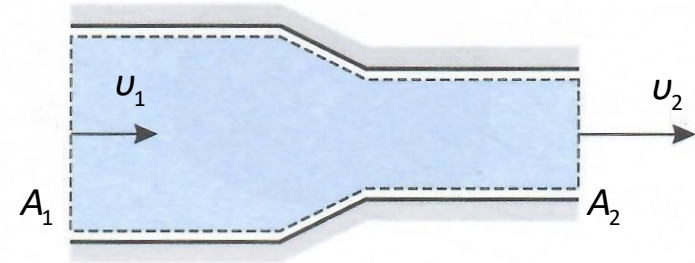


Παράδειγμα 1 – Λύση 1/1

Θεωρείται ο όγκος ελέγχου του σχήματος.

Το νερό μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο, οπότε η εξίσωση συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{in} \dot{V}_{in} = \sum_{out} \dot{V}_{out}$$



Είσοδος ρευστού συμβαίνει από την επιφάνεια 1 και έξοδος από την επιφάνεια 2. Επομένως:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

Λύνοντας ως προς την άγνωστη ταχύτητα:

$$u_2 = \frac{A_1}{A_2} u_1$$

και:

$$u_2 = \frac{\pi D_1^2 / 4}{\pi D_2^2 / 4} u_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 u_1 = \left(\frac{10}{5} \right)^2 2 = 8 \text{ m/s}$$

Παράδειγμα 2

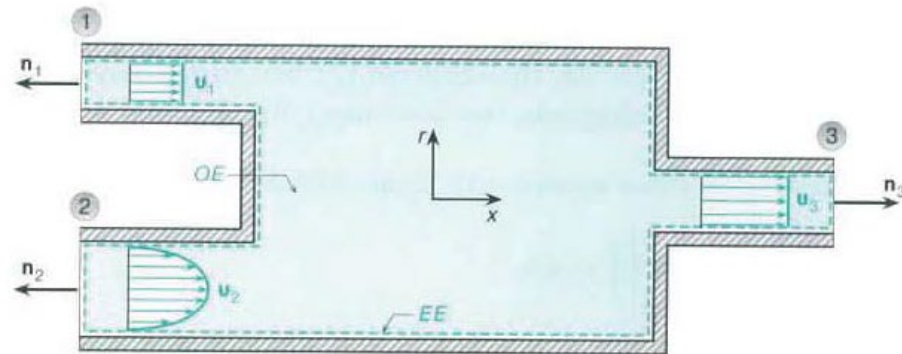
Εξίσωση συνέχειας σε δεξαμενή με πολλαπλές εισόδους

Στη δεξαμενή του σχήματος εισέρχεται ένα ασυμπίεστο ρευστό από τους αγωγούς 1 και 2 και εξέρχεται από τον αγωγό 3. και οι τρεις αγωγοί είναι κυκλικής διατομής εμβαδού 175, 700 και 350 cm² αντίστοιχα.

Η κατανομή της ταχύτητας στους αγωγούς 1 και 3 είναι ομοιόμορφη, ενώ στον αγωγό 2 είναι παραβολική και δίνεται από τη σχέση:

$$u_2 = u_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 \right)$$

όπου $u_0 = 3$ m/s είναι η μέγιστη ταχύτητα, R_2 η ακτίνα και r η απόσταση από τον άξονα του αγωγού.



Αν η ταχύτητα στον αγωγό 1 είναι $u_1 = 1.2$ m/s πόση είναι η ταχύτητα ροής στον αγωγό 3;

Παράδειγμα 2 – Λύση 1/1

Θεωρείται ο όγκος ελέγχου του σχήματος.

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, η εξίσωση συνέχειας έχει τη μορφή:

$$\sum_{in} \dot{V}_{in} = \sum_{out} \dot{V}_{out} \Rightarrow \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \dot{V}_3$$

Στους αγωγούς 1 και 3 η ταχύτητα είναι σταθερή. Στον αγωγό 2 χρησιμοποιείται η μέση ταχύτητα:

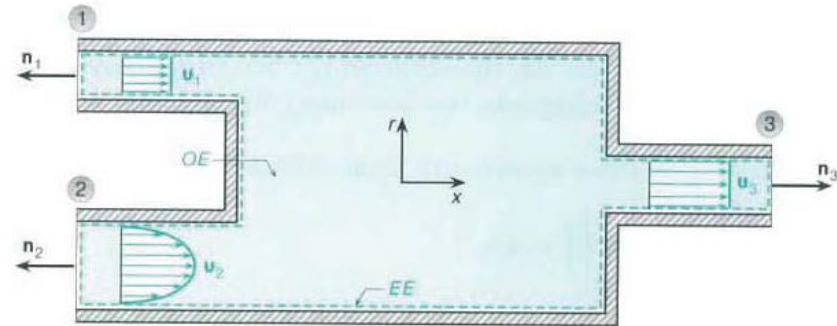
$$u_1 A_1 + \bar{u}_2 A_2 = u_3 A_3$$

όπου:

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{A_2} \int_{A_2} u_2 dA_2 = \frac{1}{A_2} \int_0^{R_2} u_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 \right) 2\pi r dr = \frac{u_0}{2}$$

Επομένως:

$$u_3 = \frac{u_1 A_1 + \bar{u}_2 A_2}{A_3} = \frac{u_1 A_1 + u_0 / 2 A_2}{A_3} = \frac{1.2 \times 0.0175 + 3/2 \times 0.07}{0.035} = 3.6 \text{ m/s}$$



Παράδειγμα 3

Ρυθμός πλήρωσης δεξαμενής

Η δεξαμενή του σχήματος γεμίζεται με νερό μέσω δύο αγωγών εισόδου (1 και 2). Στην κορυφή της δεξαμενής βρίσκεται εγκλωβισμένος αέρας.

Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του νερού dh/dt .

Δίνονται:

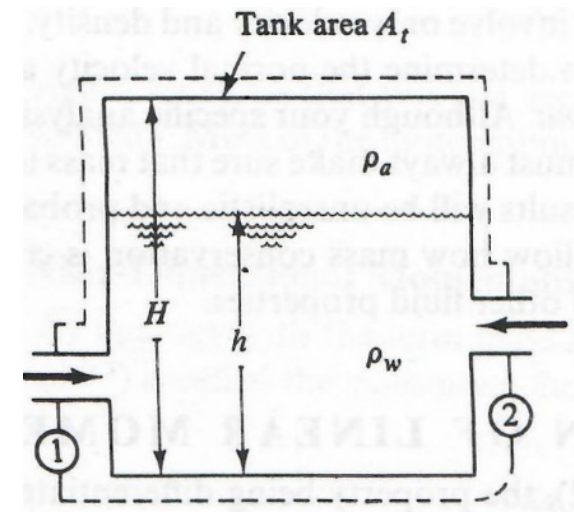
Διάμετρος αγωγού 1: $D_1 = 2.5 \text{ cm}$

Διάμετρος αγωγού 2: $D_2 = 7.5 \text{ cm}$

Μέση ταχύτητα ροής στον αγωγό 1: $u_1 = 1 \text{ m/s}$

Μέση ταχύτητα ροής στον αγωγό 2: $u_2 = 0.6 \text{ m/s}$

Επιφάνεια δεξαμενής: $A_t = 0.2 \text{ m}^2$



Παράδειγμα 3 – Λύση 1/3

Εφαρμόζεται η εξίσωση συνέχειας στον ΟΕ του σχήματος

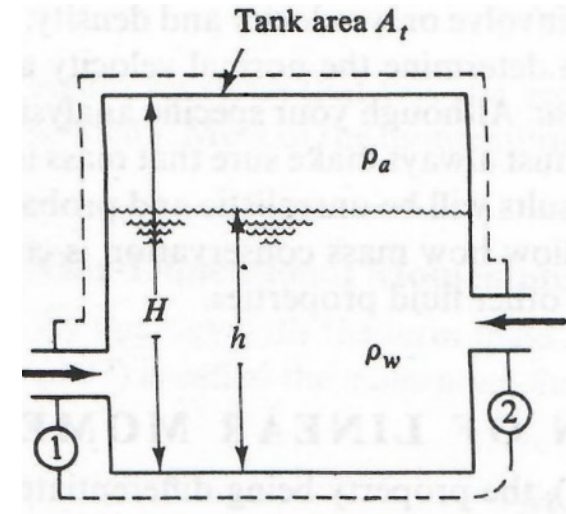
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV - \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2 = 0$$

Ο μη-μόνιμος όρος (πρώτος όρος) εκφράζει τον ρυθμός μεταβολής της συνολικής μάζας ρευστού (νερό-*w* και αέρας-*a*) που υπάρχει στον ΟΕ:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \rho dV = \frac{\partial m_{OE}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (m_w + m_a) = \frac{\partial m_w}{\partial t} + \frac{\partial m_a}{\partial t}$$

0

Ο όρος $(\partial m_a / \partial t)$ μηδενίζεται γιατί ο αέρας είναι παγιδευμένος και η μάζα του δε μεταβάλλεται



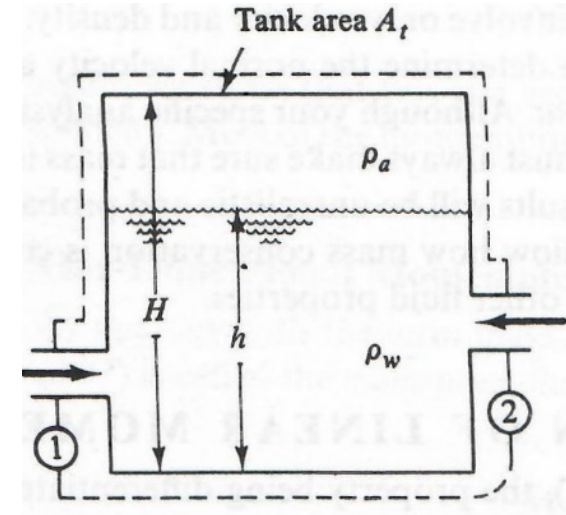
Παράδειγμα 3 – Λύση 2/3

Ο όρος $(\partial m_w / \partial t)$ παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial m_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w V_w) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w A_t h) = \rho_w A_t \frac{dh}{dt}$$

Επομένως, η εξίσωση της συνέχειας γίνεται:

$$\rho_w A_t \frac{dh}{dt} - \rho_1 u_1 A_1 - \rho_2 u_2 A_2 = 0$$



Επιλύοντας ως προς τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του νερού:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 u_1 A_1 + \rho_2 u_2 A_2}{\rho_w A_t}$$

και επειδή το νερό είναι ασυμπίεστο ($\rho_w = \rho_1 = \rho_2$)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_t}$$

Παράδειγμα 3 – Λύση 3/3

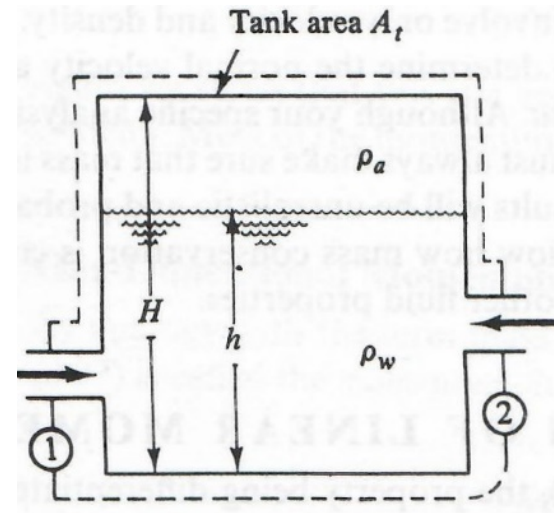
Αριθμητική εφαρμογή:

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = 4.91 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = 4.42 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

και

$$\frac{dh}{dt} = \frac{u_1 A_1 + u_2 A_2}{A_t} = 0.016 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Ρευστομηχανική

13^η Διάλεξη

Μακροσκοπική εξίσωση ορμής

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Δεύτερος νόμος κίνησης του Newton

Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες ασκούνται πάνω σε ένα σύστημα από το περιβάλλον του είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma}$$

- Ορμή συστήματος

$$\mathbf{P} = m\mathbf{u}$$

- Διανυσματικό μέγεθος με καρτεσιανές συνιστώσες

$$P_x = mu_x, \quad P_y = mu_y, \quad P_z = mu_z$$

Μακροσκοπική εξίσωση ορμής

- Εφαρμογή θεωρήματος μεταφοράς για $B = m\mathbf{u}$ και $b = \mathbf{u}$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \mathbf{u} \rho dV + \oint_{EE} \mathbf{u} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ρυθμός καθαρής εκροής ορμής από τον ΟΕ
διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου

Ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού που
περιέχεται στον ΟΕ (ρυθμός συσσώρευσης
ορμής στον ΟΕ)

Άθροισμα όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω
στον ΟΕ από το περιβάλλον του

Συνιστώσες εξισώσεις ορμής

- Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} u_x \rho dV + \oint_{EE} u_x \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} u_y \rho dV + \oint_{EE} u_y \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} u_z \rho dV + \oint_{EE} u_z \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Το πρόσημο κάθε συνιστώσας της δύναμης εξαρτάται από το πρόσημο της αντίστοιχης συνιστώσας της ταχύτητας και το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$

Δυνάμεις στον όγκο ελέγχου

- Σωματικές δυνάμεις
 - Από αλληλεπιδράσεις του όγκου ελέγχου με εξωτερικά πεδία δυνάμεων
 - Η πιο συνηθισμένη το **βάρος**

$$\mathbf{F}_g = \int_{\text{OE}} \mathbf{g} \rho dV \quad \text{για } \rho, \mathbf{g} \text{ σταθερά:} \quad \mathbf{F}_g = \rho V \mathbf{g} = m \mathbf{g}$$

- Επιφανειακές δυνάμεις
 - Από αλληλεπιδράσεις του όγκου ελέγχου με το περιβάλλον διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου
 - Εξαρτώνται από τη φύση των σωμάτων που τέμνει η επιφάνεια ελέγχου

Επιφανειακές δυνάμεις – 1^η Περίπτωση

- **1^η Περίπτωση: Η επιφάνεια ελέγχου δεν τέμνει στερεά**

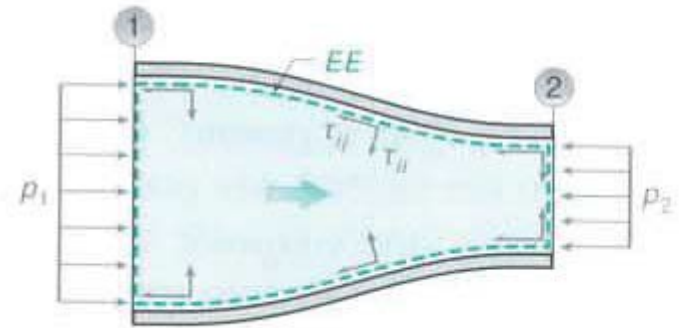
α. Δυνάμεις **πίεσης** (στις διατομές εισόδου-εξόδου)

$$\mathbf{F}_p = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA$$

π.χ. $F_{p,1,x} = p_1 A_1$
 $F_{p,2,x} = -p_2 A_2$

β. **Ιξώδεις** δυνάμεις

$$\mathbf{F}_\tau = \oint_{EE} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) dA$$



Συνισταμένη εξωτερικών δυνάμεων – 1^η Περίπτωση

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau$$

Ιξώδεις δυνάμεις – 1^η Περίπτωση

- Ο υπολογισμός των ιξωδών δυνάμεων προϋποθέτει τη γνώση των συνιστωσών του δυαδικού τάσης
- Συνήθως οι ιξώδεις δυνάμεις είναι το ζητούμενο οι οποίες υπολογίζονται με την επίλυση των εξισώσεων ορμής
- Όταν οι επιφάνειες του όγκου ελέγχου έρχονται σε επαφή με στερεά τοιχώματα, η δύναμη αυτή αφορά στη δύναμη που ασκείται στο ρευστό από τα τοιχώματα και συμβολίζεται με **R**

$$\mathbf{R} = iR_x + jR_y + kR_z$$

- Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στις στερεές επιφάνειες είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φορά με την **R**

$$\mathbf{F}_w = -\mathbf{R}$$

Επιφανειακές δυνάμεις – 2^η Περίπτωση

- **2^η Περίπτωση: Η επιφάνεια ελέγχου τέμνει και στερεά**

α. Δυνάμεις **πίεσης** (στις διατομές εισόδου-εξόδου)

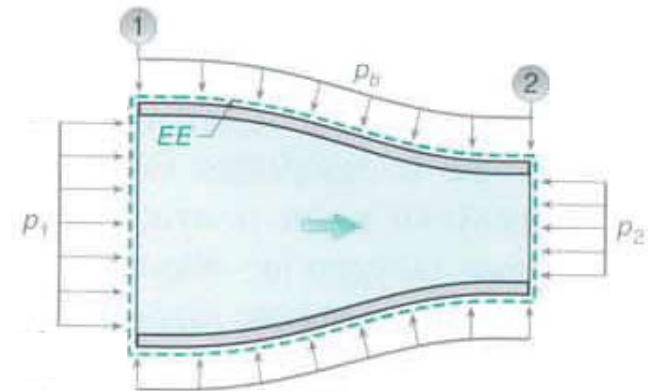
$$\mathbf{F}_p = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA$$

β. Δυνάμεις **ατμοσφαιρικής πίεσης**
(στις παράπλευρες επιφάνειες)

$$\mathbf{F}_{pb} = \oint_{A_\pi} (-\mathbf{n}) p_b dA$$

γ. Δυνάμεις **στήριξης** ($\mathbf{F}_A$)

Μεταφέρονται (προς και από τον ΟΕ) διαμέσου στερεών σωμάτων και ασκούνται στην επιφάνεια ελέγχου.



Δυνάμεις ατμοσφαιρικής πίεσης – 2^η Περίπτωση

- Ο υπολογισμός των δυνάμεων ατμοσφαιρικής πίεσης προϋποθέτει ότι είναι γνωστό το σχήμα της επιφάνειας
- Για ευκολία στους υπολογισμούς, η πίεση στις διατομές εισόδου-εξόδου αναλύεται την μανομετρική/σχετική (p^*) και βαρομετρική (ατμοσφαιρική) πίεση (p_b)

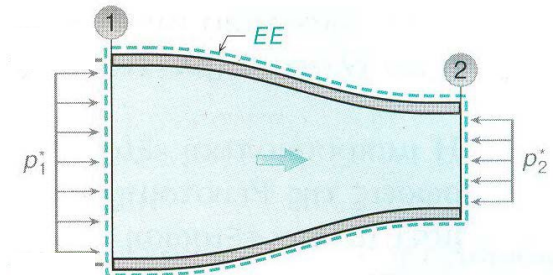
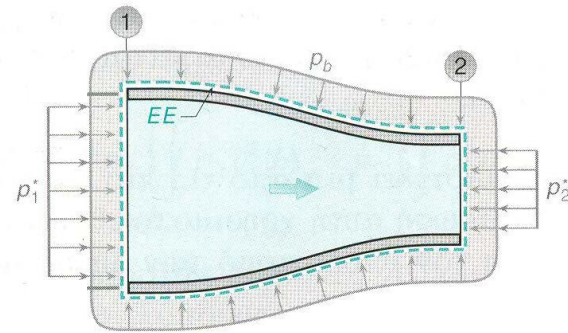
$$p = p^* + p_b$$

- Η συνισταμένη των δυνάμεων ατμοσφαιρικής πίεσης είναι μηδέν

$$\mathbf{F}_{pb} = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p_b dA = 0$$

- Οι μόνες δυνάμεις πίεσης είναι οι μανομετρικές

$$\mathbf{F}_{p^*} = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p^* dA = 0$$



π.χ.

$$F_{p^*,1,x} = (p_1 - p_b) A_1$$

$$F_{p^*,2,x} = -(p_2 - p_b) A_2$$

Συνισταμένη εξωτερικών δυνάμεων – 2^η Περίπτωση

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{p^*} + \mathbf{F}_A$$

Παρατηρήσεις

- Στις δυνάμεις $\mathbf{F}_A$, εκτός από τις δυνάμεις στήριξης, ανήκουν και οι δυνάμεις από επιφάνειες στερεών επάνω στις οποίες προσκρούουν πίδακες ρευστών
- Στις δυνάμεις $\mathbf{F}_g$, εκτός από το βάρος του ρευστού, συμπεριλαμβάνεται και το βάρος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια ελέγχου

Γενική παρατήρηση (1^η και 2^η περίπτωση)

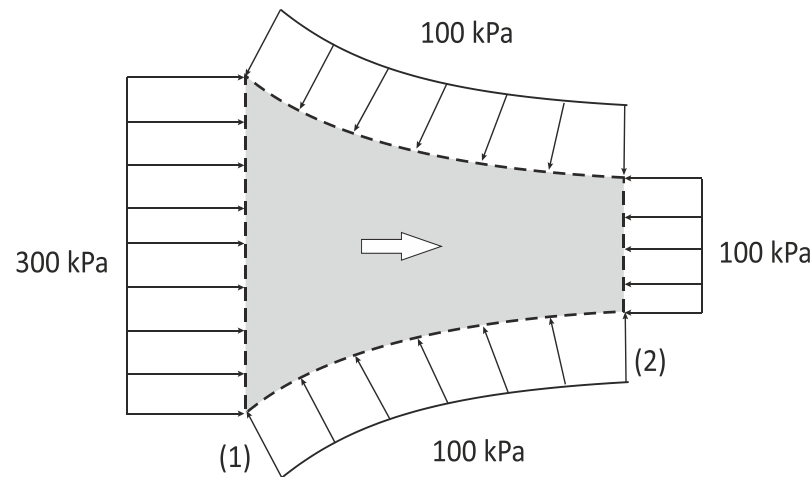
- Όταν το ρευστό εκρέει στην ατμόσφαιρα (πίδακας), η πίεση στην έξοδο του αγωγού είναι ίση με την ατμοσφαιρική (εκτός εάν η τάση ατμών είναι σημαντική, το ρευστό εξέρχεται με υπερηχητική ταχύτητα ή είναι ιξωδοελαστικό)

Ερώτηση 1

Στο σχήμα παρουσιάζεται η κατανομή πίεσης στην επιφάνεια ενός όγκου ελέγχου ο οποίος έχει σχήμα συγκλίνοντος ακροφυσίου.

Οι διατομές της εισόδου (1) και εξόδου (2) του ακροφυσίου είναι $A_1 = 0.4 \text{ m}^2$ και $A_2 = 0.2 \text{ m}^2$, αντίστοιχα.

Ποιο είναι το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων πίεσης που δρουν πάνω στον όγκο ελέγχου;



Ειδική μορφή εξίσωσης ορμής – Μόνιμη ροή

- Μόνιμη ροή:
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \mathbf{u} \rho dV = 0$$

- Διανυσματική μορφή

$$\mathbf{F} = \oint_{EE} \mathbf{u} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στον ΟΕ είναι ίση με το ρυθμό καθαρής εκροής ορμής του ρευστού από τον ΟΕ

- ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

$$F_x = \oint_{EE} u_x \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_y = \oint_{EE} u_y \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_z = \oint_{EE} u_z \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Εξίσωση ορμής – Απλή μορφή

- Μόνιμη ροή, πολλαπλές εισοδοι και έξοδοι, ομοιόμορφη ταχύτητα και πυκνότητα στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου

$$\mathbf{F} = \sum_{out} \underbrace{(\rho_{out} u_{out,n} A_{out})}_{\mathbf{P}_{out} = \dot{m}_{out} \mathbf{u}_{out}} \mathbf{u}_{out} - \sum_{in} \underbrace{(\rho_{in} u_{in,n} A_{in})}_{\mathbf{P}_{in} = \dot{m}_{in} \mathbf{u}_{in}} \mathbf{u}_{in}$$

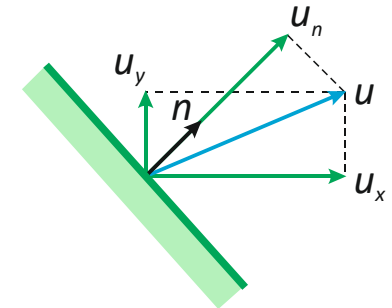
Οι $u_{out,n}$ και $u_{in,n}$ είναι οι κάθετες συνιστώσες στις επιφάνειες A_{out} και A_{in}

- Συνιστώσες

$$F_x = \sum_{out} (\rho_{out} u_{out,n} A_{out}) u_{out,x} - \sum_{in} (\rho_{in} u_{in,n} A_{in}) u_{in,x}$$

$$F_y = \sum_{out} (\rho_{out} u_{out,n} A_{out}) u_{out,y} - \sum_{in} (\rho_{in} u_{in,n} A_{in}) u_{in,y}$$

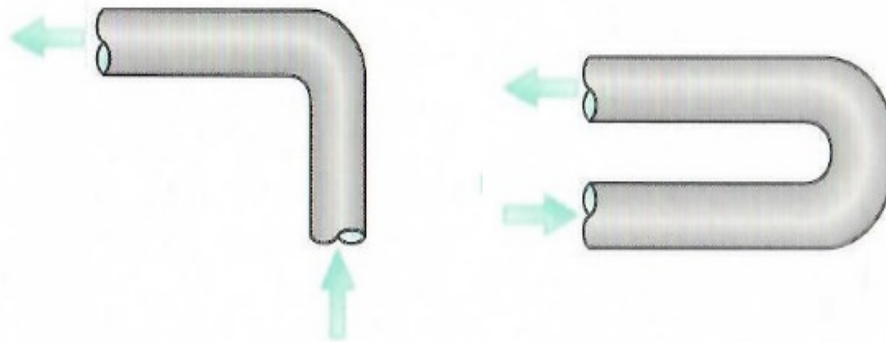
$$F_z = \sum_{out} (\rho_{out} u_{out,n} A_{out}) u_{out,z} - \sum_{in} (\rho_{in} u_{in,n} A_{in}) u_{in,z}$$



Ερώτηση 2

Ένα ρευστό διέρχεται με μόνιμη ροή από τους δύο αγωγούς του σχήματος.

Αν οι αγωγοί αυτοί δε στηρίζονται, προς ποια κατεύθυνση θα κινηθούν;



Ρευστομηχανική

14^η Διάλεξη

Εφαρμογές της εξίσωσης ορμής

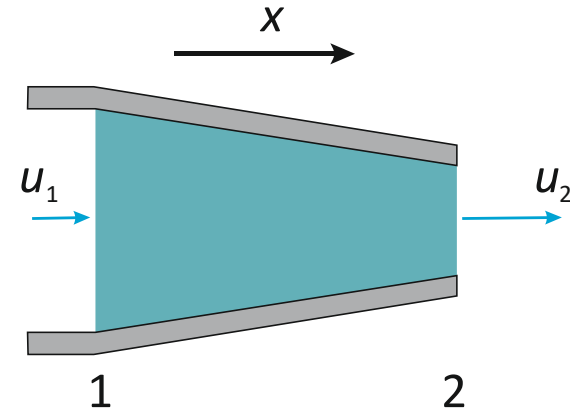
Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Δύναμη σε ακροφύσιο 1/6

Οριζόντιο συγκλίνον ακροφύσιο

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ομοιόμορφη ταχύτητα στις διατομές εισόδου και εξόδου (u_1 και u_2)
 - Ομοιόμορφη πίεση στις διατομές εισόδου και εξόδου (p_1 και p_2)
- Ζητούμενα
 - (α) Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο ακροφύσιο
 - (β) Η δύναμη στήριξης του ακροφυσίου



Δύναμη σε ακροφύσιο 2/6

(α) Δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο ακροφύσιο

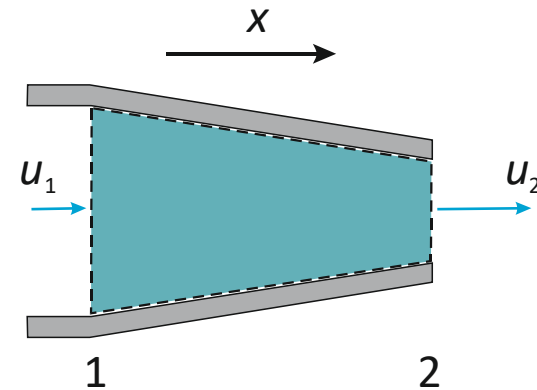
- Όγκος ελέγχου
 - Περιοχή ροής ρευστού μεταξύ διατομών 1 και 2
 - Η επιφάνεια ελέγχου δεν τέμνει τα στερεά τοιχώματα

- Εξίσωση συνέχειας

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \Rightarrow \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

- Εξίσωση ορμής
 - Η μόνη μη-μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας (και της ορμής) είναι κατά τη διεύθυνση x , οπότε η δύναμη που ασκείται στον όγκο ελέγχου είναι κατά την ίδια διεύθυνση

$$F_x = \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_1 u_1 = \rho u_2 A_2 u_2 - \rho u_1 A_1 u_1 = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$



Δύναμη σε ακροφύσιο 3/6

- Η δύναμη F_x αποτελείται από:
 - Δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου

$$F_{p,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

- Συνισταμένη δύναμη R_x που ασκείται από τα τοιχώματα του ακροφυσίου στο ρευστό του ΟΕ

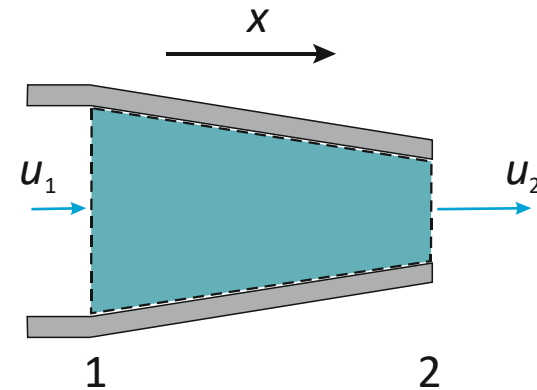
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής

$$F_{p,x} + R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 + R_x = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$

επομένως

$$R_x = -p_1 A_1 + p_2 A_2 - \rho A_1 u_1^2 + \rho A_2 u_2^2$$

$$R_x = -p_1 A_1 + p_2 A_2 - \dot{m}(u_1 - u_2)$$



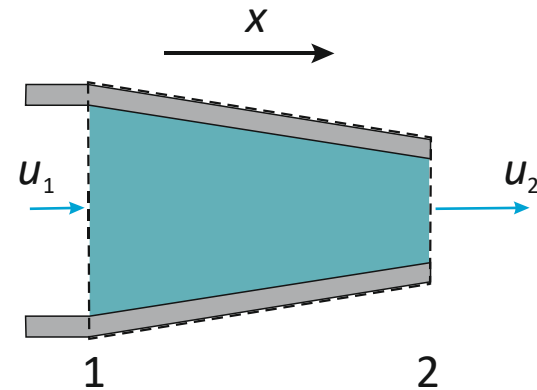
Δύναμη σε ακροφύσιο 4/6

- Δύναμη στο ακροφύσιο
 - Η δύναμη που ασκείται στα τοιχώματα του ακροφυσίου ($F_{w,x}$) είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με τη R_x

$$F_{w,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \dot{m}(u_1 - u_2)$$

(β) Δύναμη στήριξης του ακροφυσίου

- Όγκος ελέγχου
 - Περιοχή ροής ρευστού μεταξύ διατομών 1 και 2 μαζί με το ακροφύσιο
 - Η επιφάνεια ελέγχου τέμνει τα στερεά τοιχώματα



Δύναμη σε ακροφύσιο 5/6

- Εξίσωση συνέχειας. Δεν διαφοροποιείται από την προηγούμενη περίπτωση:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \Rightarrow \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

- Εξίσωση ορμής

$$F_x = \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_1 u_1 = \rho u_2 A_2 u_2 - \rho u_1 A_1 u_1 = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$

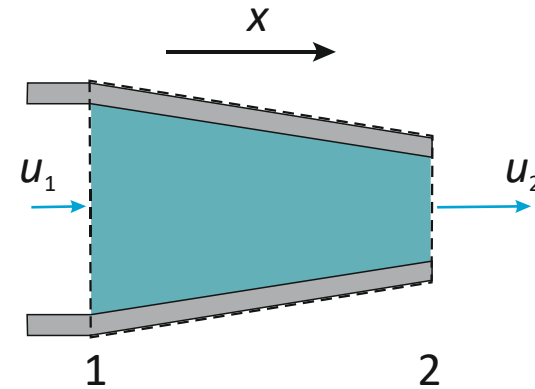
- Η δύναμη F_x αποτελείται από:

- Δυνάμεις πίεσης

- Ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου και στις επιφάνειες του ακροφυσίου
- Στις επιφάνειες του ακροφυσίου ασκείται ατμοσφαιρική πίεση
- Η συνισταμένη των δυνάμεων ατμοσφαιρικής πίεσης (σε όλη την κλειστή επιφάνεια ελέγχου) είναι μηδέν
- Επομένως, αφαιρείται η ατμοσφαιρική πίεση και μένουν μόνο οι σχετικές (μανομετρικές) πιέσεις που ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου

$$F_{p^*,x} = p_1^* A_1 - p_2^* A_2 \quad \text{όπου} \quad p_1^* = p_1 - p_b, \quad p_2^* = p_2 - p_b$$

- Δύναμη στήριξης $F_{A,x}$ που ασκείται στον ΟΕ



Δύναμη σε ακροφύσιο 6/6

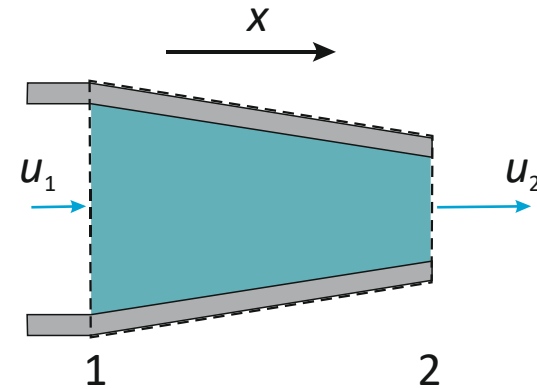
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής

$$F_{p^*,x} + F_{A,x} = p_1^* A_1 - p_2^* A_2 + F_w = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$

επομένως

$$F_{A,x} = -p_1^* A_1 + p_2^* A_2 - \rho A_1 u_1^2 + \rho A_2 u_2^2$$

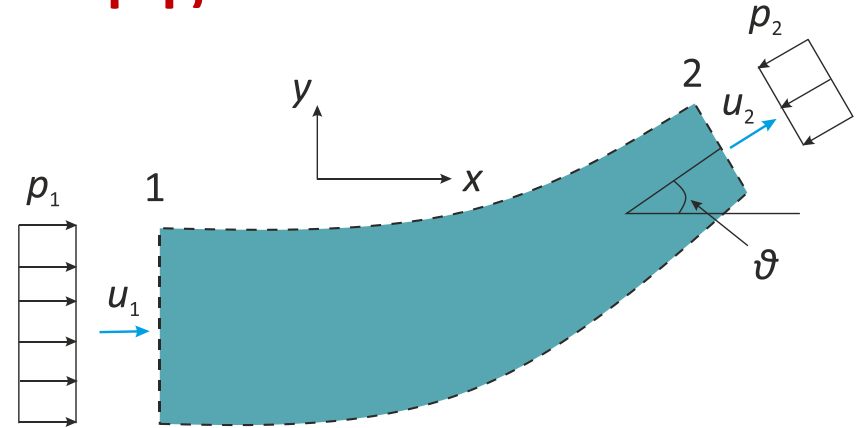
$$F_{A,x} = -p_1^* A_1 + p_2^* A_2 - \dot{m}(u_1 - u_2)$$



Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 1/4

Καμπύλος αγωγός μεταβλητής διατομής

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ομοιόμορφη ταχύτητα στις διατομές εισόδου και εξόδου (u_1 και u_2)
 - Ομοιόμορφη πίεση στις διατομές εισόδου και εξόδου (p_1 και p_2)
- Ζητούμενο
 - Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στον αγωγό
- Όγκος ελέγχου
 - Περιοχή ροής ρευστού μεταξύ διατομών 1 και 2 (βλ. σχήμα)



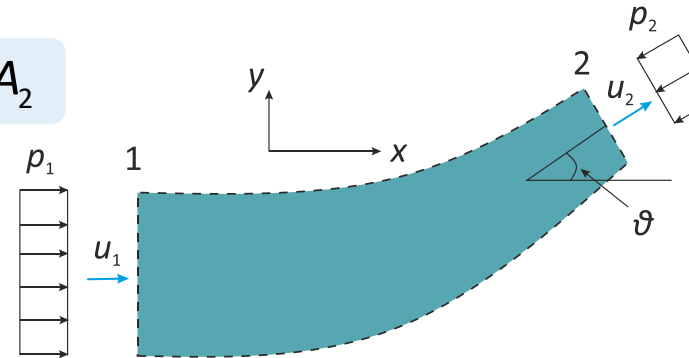
Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 2/4

- Εξίσωση συνέχειας

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \Rightarrow \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

- Εξισώσεις ορμής

- Η ταχύτητα (και η ορμή) μεταβάλλεται κατά τις x και y διευθύνσεις

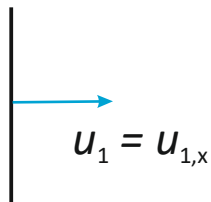


$$F_x = \dot{m}_2 u_{2,x} - \dot{m}_1 u_{1,x} = \rho u_2 A_2 u_{2,x} - \rho u_1 A_1 u_{1,x} = \dot{m} (u_{2,x} - u_{1,x})$$

$$F_y = \dot{m}_2 u_{2,y} - \dot{m}_1 u_{1,y} = \rho u_2 A_2 u_{2,y} - \rho u_1 A_1 u_{1,y} = \dot{m} (u_{2,y} - u_{1,y})$$

- Ταχύτητες

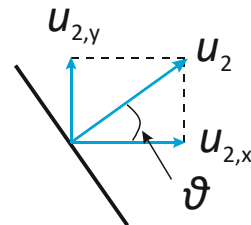
Διατομή 1



$$u_{1,x} = u_1 (+)$$

$$u_{1,y} = 0$$

Διατομή 2



$$u_{2,x} = u_2 \cos \vartheta (+)$$

$$u_{2,y} = u_2 \sin \vartheta (+)$$

Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 3/4

- Οι δυνάμεις F_x και F_y αποτελούνται από:
 - Δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου

$$F_{p,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \vartheta$$

$$F_{p,y} = -p_2 A_2 \sin \vartheta$$



- Δυνάμεις R_x και R_y που ασκούνται από τα τοιχώματα του αγωγού στο ρευστό του ΟΕ
- Εφαρμογή εξισώσεων ορμής

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \vartheta + R_x = \dot{m}(u_2 \cos \vartheta - u_1)$$

$$-p_2 A_2 \sin \vartheta + R_y = \dot{m} u_2 \sin \vartheta$$

Επομένως

$$R_x = -p_1 A_1 + p_2 A_2 \cos \vartheta + \dot{m}(u_2 \cos \vartheta - u_1)$$

$$R_y = p_2 A_2 \sin \vartheta + \dot{m} u_2 \sin \vartheta$$

Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 4/4

- Δυνάμεις στον αγωγό
 - Οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα του αγωγού ($F_{w,x}$, $F_{w,y}$) είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με τις R_x , R_y

$$F_{w,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \vartheta + \dot{m}(u_1 - u_2 \cos \vartheta)$$

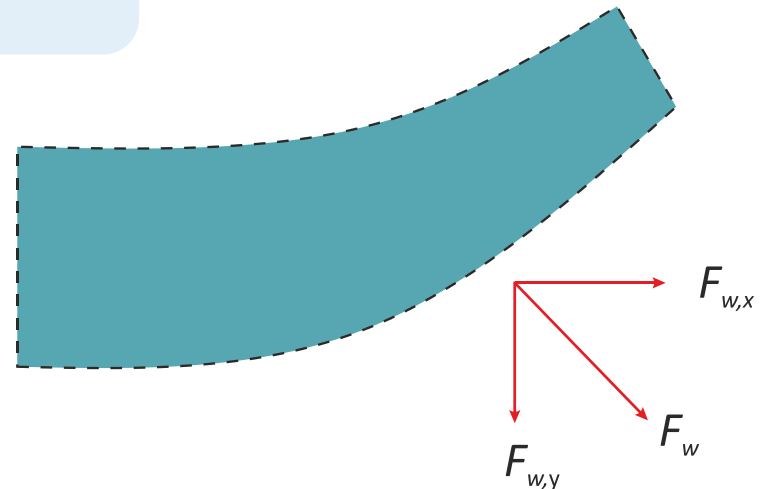
$$F_{w,y} = -p_2 A_2 \sin \vartheta - \dot{m} u_2 \sin \vartheta$$

- Η συνολική δύναμη είναι

$$\mathbf{F}_w = F_{w,x} \mathbf{i} + F_{w,y} \mathbf{j}$$

με μέτρο

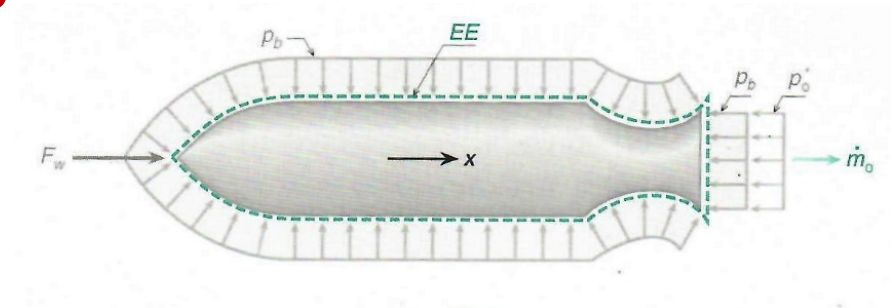
$$F_w = \sqrt{F_{w,x}^2 + F_{w,y}^2}$$



Δύναμη στήριξης 1/2

Πρωθητική δύναμη πυραύλου

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Οριζόντιος πύραυλος
 - Σταθερός ρυθμός ροής στη βάση του πυραύλου ($\dot{m}_0$)
 - Ομοιόμορφη ταχύτητα αερίων στη βάση του πυραύλου (u_0)
 - Ομοιόμορφη πίεση στη βάση του πυραύλου (p_0)
- Ζητούμενο
 - Η δύναμη στήριξης του πυραύλου
- Όγκος ελέγχου
 - Ο πύραυλος και τα αέρια (βλ. σχήμα)

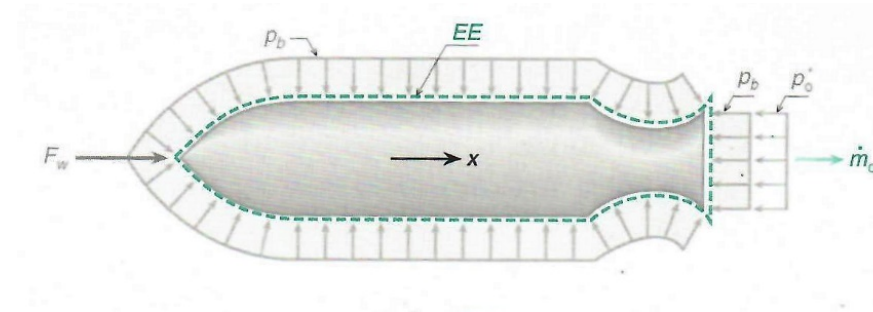


Δύναμη στήριξης 2/2

- Εξίσωση ορμής

- Η ταχύτητα (και η ορμή) μεταβάλλεται κατά x

$$F_x = F = \dot{m}_0 u_0$$



- Η δύναμη F αποτελείται από:

- Δύναμη πίεσης. Αφαιρείται η ατμοσφαιρική πίεση που ασκείται σε όλη την επιφάνεια του πυραύλου.

$$F_p = -p_0^* A_0 = -(p_0 - p_b) A_0$$

- Δύναμη στήριξης F_A που ασκείται στον ΟΕ

* Η δύναμη βαρύτητας αμελείται γιατί ο πύραυλος είναι οριζόντιος

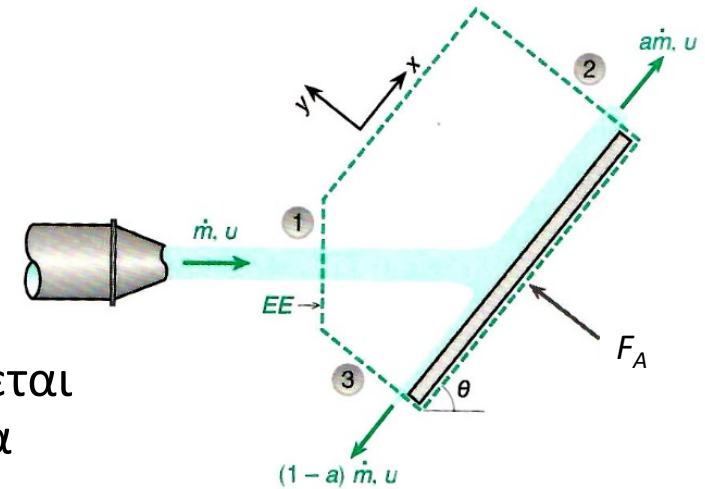
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής

$$F_A - (p_0 - p_b) A_0 = \dot{m}_0 u_0 \Rightarrow F_A = \dot{m}_0 u_0 + (p_0 - p_b) A_0$$

Δύναμη πίδακα

Πίδακας ρευστού σε ακίνητη πλάκα

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ο πίδακας μετά την πρόσκρουση χωρίζεται σε δύο ρεύματα που κινούνται αντίθετα με την ταχύτητα του πίδακα (u)
 - Αμελητέες δυνάμεις βαρύτητας
- Ζητούμενα
 - Οι ρυθμοί ροής μάζας στα δύο ρεύματα
 - Η δύναμη που απαιτείται για τη στήριξη της πλάκας



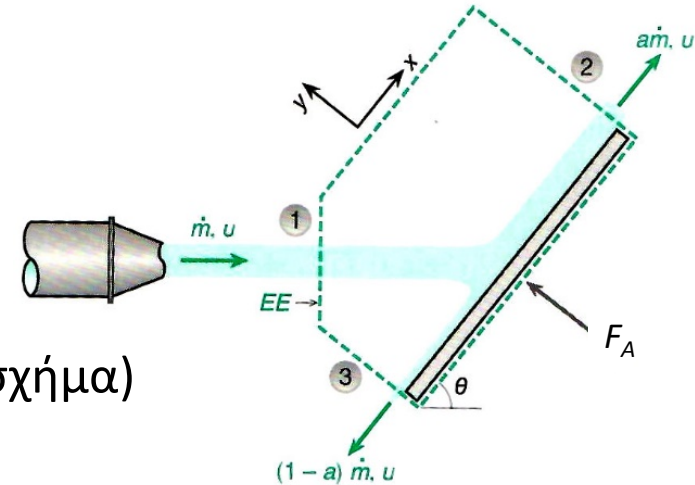
Δύναμη πίδακα

- Όγκος ελέγχου
 - Τέμνει κάθετα τα τρία ρεύματα και περιλαμβάνει την πλάκα (βλ. σχήμα)
- Σύστημα συντεταγμένων
 - Άξονας x παράλληλος με την πλάκα (βλ. σχήμα)
- Αν με a συμβολίσουμε το ποσοστό της ροής μάζας που ακολουθεί το ρεύμα 2

$$\dot{m}_2 = a\dot{m}$$

Η εξίσωση συνέχειας δίνει:

$$\dot{m} = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \Rightarrow \dot{m}_3 = \dot{m} - \dot{m}_2 \Rightarrow \dot{m}_3 = (1 - a)\dot{m}$$



Δύναμη πίδακα

- Εξίσωση ορμής κατά x

$$F_x = \underbrace{\dot{m}_2 u + \dot{m}_3 (-u)}_{\sum_{out} \dot{m}_{out} u_{out,x}} - \underbrace{\dot{m} u \cos \vartheta}_{\sum_{in} \dot{m}_{in} u_{in,x}}$$

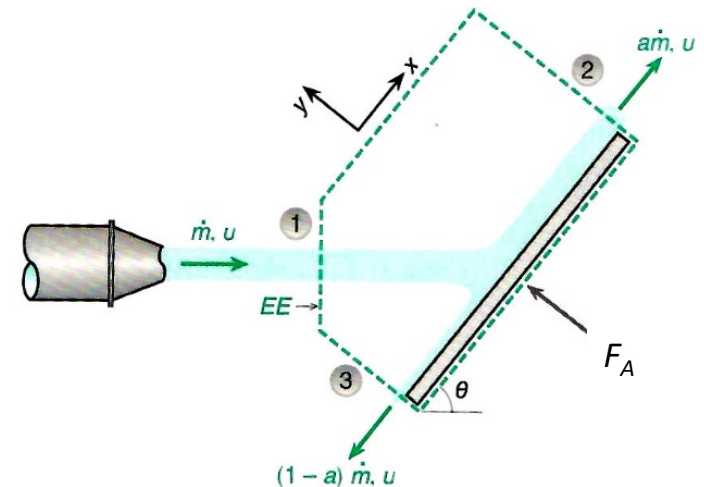
- Η δύναμη F_x αποτελείται από:
 - Δυνάμεις ατμοσφαιρικής πίεσης, οι οποίες αλληλοαναιρούνται ($F_x = F_{p,x} = 0$)

- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής κατά x

$$\dot{m}_2 u + \dot{m}_3 (-u) - \dot{m} u \cos \vartheta = 0$$

ή

$$a \dot{m} u - (1 - a) \dot{m} u - \dot{m} u \cos \vartheta = 0 \Rightarrow a = \frac{1 - \cos \vartheta}{2}$$



Δύναμη πίδακα

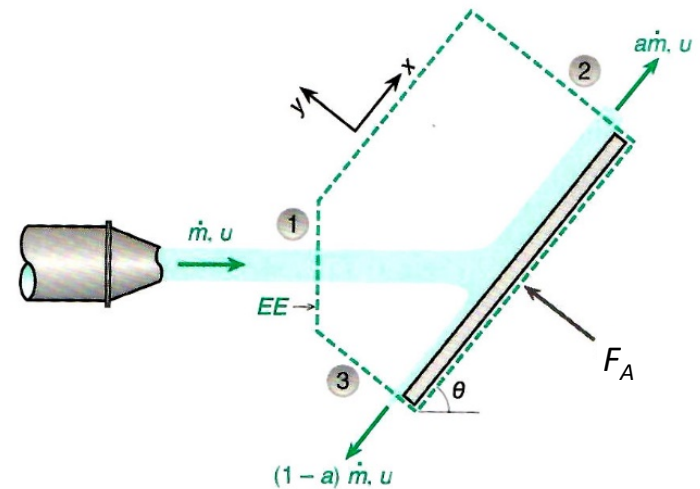
- Εξίσωση ορμής κατά y

$$F_y = -\underbrace{\dot{m}(-u \sin \vartheta)}$$

$$\sum_{in} \dot{m}_{in} u_{in,y} - \sum_{out} \dot{m}_{out} u_{out,y} = 0$$

- Η δύναμη F_y αποτελείται από:
 - Δυνάμεις ατμοσφαιρικής πίεσης, οι οποίες αλληλοαναιρούνται ($F_{p,y} = 0$)
 - Η δύναμη στήριξης F_A που ασκείται στον ΟΕ
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής κατά y

$$F_A = \dot{m} u \sin \vartheta$$



Ρευστομηχανική

15^η Διάλεξη

Μακροσκοπική εξίσωση ενέργειας

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

Η διαφορά μεταξύ καθαρού ποσού θερμότητας που προστίθεται σε ένα σύστημα από το περιβάλλον (δQ) και του καθαρού ποσού έργου που αποδίδεται από το σύστημα στο περιβάλλον (δW) κατά τη διάρκεια μιας απειροστής διεργασίας είναι ίση με τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος (dE)

$$\delta Q - \delta W = dE \quad \text{ή} \quad \dot{Q} - \dot{W} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_\Sigma$$

Μονάδες $Q, W, E \equiv \text{J}$

Μονάδες $\dot{Q}, \dot{W} \equiv \text{W} = \text{J/s}$

- Σύμβαση για το πρόσημο της θερμότητας και του έργου



$Q - W =$ Συνολική ενέργεια που προστίθεται στο σύστημα (με τη μορφή θερμότητας και έργου)

$$Q - W = \left(\sum Q_{in} + \sum W_{in} \right) - \left(\sum Q_{out} + \sum W_{out} \right)$$

Μακροσκοπική εξίσωση ενέργειας

- Εφαρμογή θεωρήματος μεταφοράς για $B = E$ και $b = e = E/m$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} ep dV + \oint_{EE} ep(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ρυθμός καθαρής εκροής ενέργειας από τον ΟΕ διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου

Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ρευστού που περιέχεται στον ΟΕ (ρυθμός συσσώρευσης ενέργειας στον ΟΕ)

Ρυθμός πρόσδοσης θερμότητας και έργου στον ΟΕ

Μορφές ενέργειας

- **Δυναμική ενέργεια**

Λόγω θέσης σε ένα δυναμικό πεδίο (π.χ. βαρύτητας)

$$e_\delta = g z$$

z : απόσταση κέντρου μάζας ρευστού από επίπεδο αναφοράς όπου η δυναμική ενέργεια θεωρείται μηδενική

- **Κινητική ενέργεια**

Λόγω ταχύτητας

$$e_k = \frac{u^2}{2}$$

u : ταχύτητα ρευστού ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς

- **Εσωτερική ενέργεια**

Κινητική και δυναμική ενέργεια των μορίων

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\rho, T)$$

- **Ειδική ενέργεια (συνολική)**

$$e = \tilde{u} + \frac{u^2}{2} + g z$$

Μορφές έργου

- **Αξονικό έργο** (shaft work)

Έργο που παράγεται (θετικό) ή προσφέρεται (αρνητικό) στο ρευστό από τμήματα της επιφάνειας όπου δεν υπάρχει ροή (π.χ. στρόβιλος, αντλία)

$$\dot{W}_s$$

- **Έργο κάθετων τάσεων** (normal stress work)

Έργο των δυνάμεων που είναι κάθετες (δυνάμεις πίεσης) στα τμήματα της επιφάνειας ελέγχου όπου υπάρχει ροή

$$\dot{W}_p = \oint_{EE} p(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

- **Έργο διατμητικών τάσεων** (shear stress work)

Έργο των δυνάμεων που είναι εφαπτομενικές στα τμήματα της επιφάνειας ελέγχου όπου υπάρχει ροή (μηδενικό αν ο ΟΕ επιλεγεί έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι κάθετη στις επιφάνειες)

$$\dot{W}_\tau \approx 0$$

Μορφές εξίσωσης ενέργειας

- Γενική μορφή

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} e \rho dV + \oint_{EE} \left(\tilde{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z \right) \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

- Μόνιμη ροή, πολλαπλές εισοδοι και έξοδοι, ομοιόμορφες ιδιότητες** στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \sum_{out} \dot{m}_{out} \left(\tilde{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z \right)_{out} - \sum_{in} \dot{m}_{in} \left(\tilde{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z \right)_{in}$$

- Μία είσοδος και μία έξοδος** ($\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} = \dot{m}$)

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} \left(\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_{out} - \left(\frac{p}{\rho} \right)_{in} + \frac{u_{out}^2 - u_{in}^2}{2} + g(z_{out} - z_{in}) \right)$$

- Ασυμπίεστη ροή**

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} \left(\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} + \frac{p_{out} - p_{in}}{\rho} + \frac{u_{out}^2 - u_{in}^2}{2} + g(z_{out} - z_{in}) \right) \quad \text{σε } W = J/s$$

Εξίσωση ενέργειας και απώλειες ενέργειας

- Διαιρώντας με $\dot{m}$

$$\tilde{u}_{in} + \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \tilde{u}_{out} + \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out} + w_s - q$$

$$w_s = \dot{W} / \dot{m}$$

$$q = \dot{Q} / \dot{m}$$

- Εναλλακτικά

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out} + w_s + w_l$$

σε J/kg

- Απώλειες ενέργειας (απωλεσθέν έργο)

$$w_l = \tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} - q$$

- Έργο των τριβών στο εσωτερικό του ρευστού λόγω ανάπτυξης ιξωδών τάσεων
- Προκαλούν αύξηση της εσωτερική ενέργειας (και της θερμοκρασίας) σε αδιάθερμες διεργασίες και μεταφορά θερμότητας στο περιβάλλον σε ισοθερμοκρασιακές διεργασίες

Εξίσωση Bernoulli

- Εξίσωση ενέργειας χωρίς αξονικό έργο

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out} + w_l$$

- Ιδανικά ρευστά $\Rightarrow$ απουσία ιξωδών τάσεων $\Rightarrow w_l = 0$

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out}$$

Εξίσωση Bernoulli

- Συνθήκες εφαρμογής εξίσωσης Bernoulli
 - Μόνιμη ροή
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ιδανικό ρευστό (ή εφαρμογή κατά μήκος μιας τροχιάς/ροϊκής γραμμής)

Παράδειγμα 1

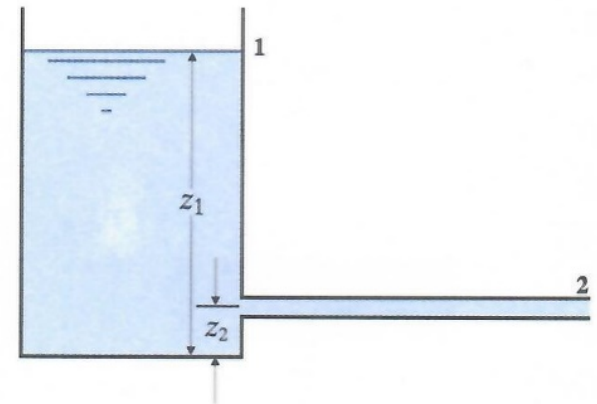
Ρυθμός εκροής από δεξαμενή

Η ελεύθερη επιφάνεια σε μια ανοιχτή δεξαμενή βρίσκεται σε ύψος $z_1 = 100 \text{ m}$. Σε ύψος $z_2 = 0.5 \text{ m}$ από τον πυθμένα της δεξαμενής υπάρχει οριζόντιος σωλήνας απορροής νερού διαμέτρου $D = 20 \text{ cm}$.

Να υπολογιστεί ο ρυθμός εκροής μάζας του νερού αν

- i) θεωρηθεί ιδανικό ρευστό,
- ii) οι απώλειες ενέργειας είναι $w_l = 20 \text{ J/kg}$.

Η πυκνότητα του νερού είναι 1000 kg/m^3



Παράδειγμα 2 – Λύση 1/2

Ανάλυση

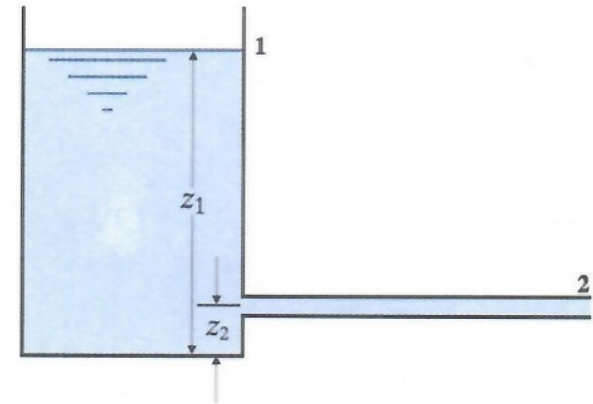
Επιλέγεται ο όγκος ελέγχου που περιλαμβάνει τη δεξαμενή και τον σωλήνα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζεται η εξίσωση ενέργειας για ασυμπίεστο ρευστό, χωρίς αξονικό έργο με επιφάνεια εισόδου (in) την 1 και επιφάνεια εξόδου (out) την 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + w_l$$

Όπου:

- $p_1 = p_2 = p_{\text{ατμοσφ}}$
- $u_1 = A_2/A_1 \cdot u_2 \approx 0$ (αμελητέα σε σχέση με την u_2)



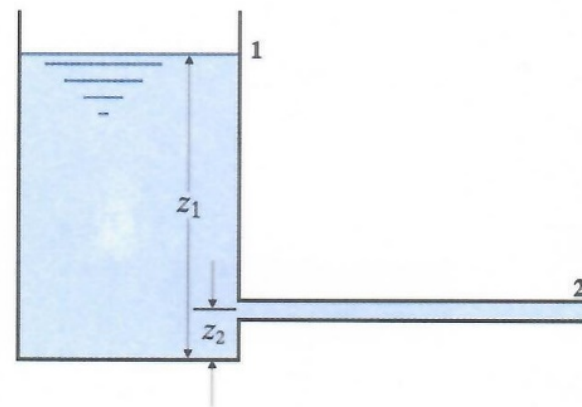
Παράδειγμα 2 – Λύση 2/2

Επομένως:

$$gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + w_l \Rightarrow u_2 = \sqrt{2(g(z_1 - z_2) - w_l)}$$

και:

$$\dot{m}_2 = \rho u_2 A_2 = \rho u_2 A_2 \pi D^2 / 4$$



Εφαρμογή

(i) Ιδανικό ρευστό $\Rightarrow w_l = 0$:

$$u_2 = \sqrt{2 \times (9.81 \times (100 - 0.5))} = 44.18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{m}_2 = 1000 \times 44.18 \times \pi \times 0.2^2 / 4 = 1387.8 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

(ii) Ιξώδεις ρευστό $\Rightarrow w_l = 20 \text{ J/kg}$:

$$u_2 = \sqrt{2 \times (9.81 \times (100 - 0.5) - 20)} = 43.72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{m}_2 = 1000 \times 43.72 \times \pi \times 0.2^2 / 4 = 1373.5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Παράδειγμα 2

Έργο και απόδοση ανεμιστήρα

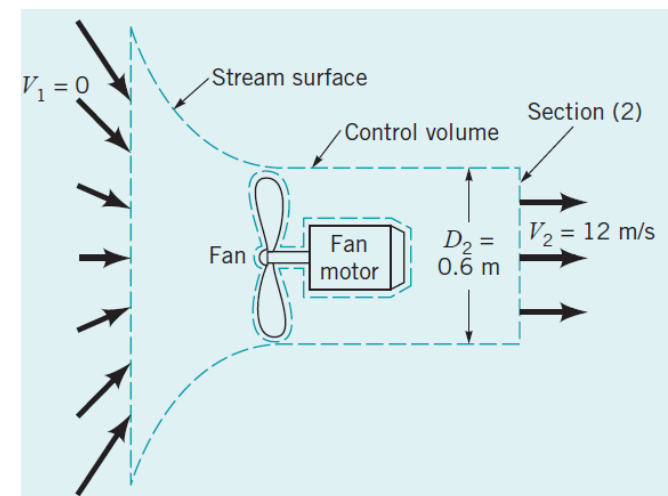
Ένας ανεμιστήρας εξαερισμού καταναλώνει 0.4 kW ισχύος και προκαλεί ένα οριζόντιο ρεύμα αέρα διαμέτρου 0.6 m και ταχύτητας 12 m/s. Η ταχύτητα του αέρα ανάντη του ανεμιστήρα είναι αμελητέα. Να υπολογιστούν:

- i) Το χρήσιμο έργο που παράγεται από τον ανεμιστήρα.
- ii) Το αξονικό έργο και οι απώλειες θερμότητας.
- iii) Ο βαθμός απόδοσης του ανεμιστήρα.
- iv) Η μεταβολή της θερμοκρασίας του αέρα.

Ιδιότητες αέρα:

Πυκνότητα 1.23 kg/m^3

Ειδική θερμότητα $1 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$



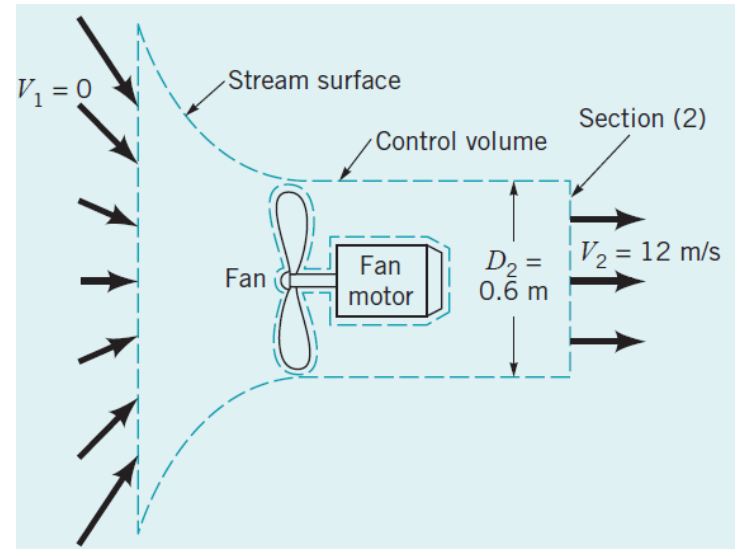
Παράδειγμα 2 – Λύση 1/3

(i) Υπολογισμός χρήσιμου έργου

Επιλέγεται ο όγκος ελέγχου όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι πάνω και κάτω επιφάνειες είναι ροϊκές γραμμές, επομένως δεν υπάρχει ροή αέρα από αυτές.

Εφαρμόζεται η εξίσωση ενέργειας για ασυμπίεστο ρευστό με επιφάνεια εισόδου (in) την 1 και επιφάνεια εξόδου (out) την 2:

$$\begin{array}{c} p_1 = p_2 = p_{\text{ατμοσφ}} \\ \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + w_s + w_l \Rightarrow w_s + w_l = -\frac{u_2^2}{2} \\ u_1 = 0 \quad z_1 = z_2 \text{ (οριζόντια ροή)} \end{array}$$



Παράδειγμα 2 – Λύση 2/3

Αριθμητική εφαρμογή:

$$w_s + w_l = -\frac{u_2^2}{2} = -\frac{12^2}{2} = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

w_s : Αξονικό έργο ανεμιστήρα (< 0 γιατί προστίθεται στον αέρα)

w_l : Απώλειες ενέργειας (> 0)

$|w_s + w_l|$: Χρήσιμο έργο που προστίθεται στον αέρα

Επομένως:

$$\text{χρήσιμο έργο} = w_{\text{useful}} = 72 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 3/3

(ii) Υπολογισμός αξονικού έργου και απωλειών ενέργειας

Το ειδικό έργο που παράγει ο ανεμιστήρας w_{fan} υπολογίζεται από την ισχύ λειτουργίας του και το ρυθμό ροής αέρα που παράγεται:

$$w_{fan} = \frac{P_{fan}}{\dot{m}} = \frac{P_{fan}}{\rho A u_2} = \frac{P_{fan}}{\rho (\pi D^2/4) u_2} = \frac{0.4}{1.23 \times (\pi \times 0.6^2/4) \times 12} = 95.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Το έργο αυτό προστίθεται στο σύστημα (αέρας), επομένως το αξονικό έργο είναι:

$$w_s = -w_{fan} = -95.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Το έργο απωλειών υπολογίζεται ως:

$$w_s + w_l = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \Rightarrow w_l = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}} - w_s = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}} - \left(-95.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = 23.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 3/3

(iii) Υπολογισμός απόδοσης

Ο συντελεστής απόδοσης ορίζεται ως:

$$\eta = \frac{\text{χρήσιμο έργο}}{\text{έργο ανεμιστήρα}} = \frac{w_{\text{useful}}}{w_{\text{fan}}} = \frac{72}{95.8} = 0.752 = 75.2\%$$

(iv) Μεταβολή θερμοκρασίας αέρα

Αν υποθέσουμε αδιαβατική διεργασία (ο αέρας δεν προλαβαίνει να ανταλλάξει θερμότητα με το περιβάλλον), το έργο απωλειών έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του αέρα και επομένως της θερμοκρασία του

$$\dot{W}_l = \dot{m}c_p\Delta T \Rightarrow w_l = c_p\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{w_l}{c_p} = \frac{23.8}{1000} = 0.0238^\circ\text{C}$$

Ρευστομηχανική

16^η Διάλεξη

Διαφορική ανάλυση ροής

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Νόμος διατήρησης της μάζας

- Για σύστημα

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_\Sigma = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{Dm}{Dt} = 0$$

- Για όγκο ελέγχου

$$\frac{\partial m_{OE}}{\partial t} + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0$$

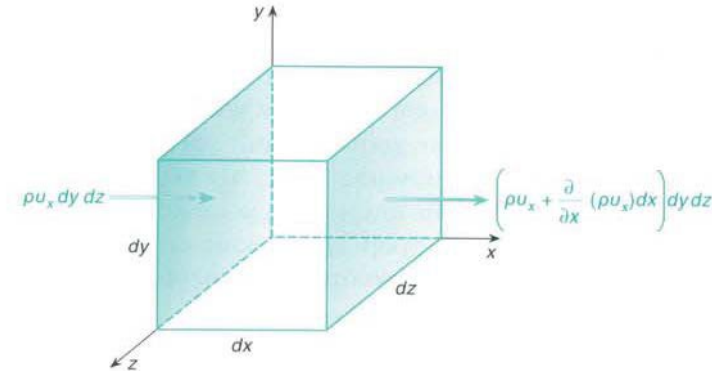
- Φραστική διατύπωση

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Ρυθμός συσσώρευσης} \\ \text{μάζας στον ΟΕ} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{μάζας στον ΟΕ} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{μάζας στον ΟΕ} \end{array} \right\} = 0$$

Διατήρησης μάζας σε απειροστό ΟΕ

- Ρυθμός συσσώρευσης μάζας

$$\frac{\partial m_{OE}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$



- Ρυθμός εισροής μάζας (κατά τη x -διεύθυνση)

$$\dot{m}_{in,x} = (\rho u A)_x = \rho u_x dy dz$$

- Ρυθμός εκροής μάζας (κατά τη x -διεύθυνση)

$$\dot{m}_{out,x} = (\rho u A)_{x+dx} = \left(\rho u_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) dx \right) dy dz$$

- Ρυθμός εκροής – ρυθμός εισροής μάζας (κατά τη x -διεύθυνση)

$$\dot{m}_{out,x} - \dot{m}_{in,x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) dx dy dz$$

Εξίσωση συνέχειας

- Συνολικό ρυθμός εκροής – ρυθμός εισροής μάζας

$$\begin{aligned}\dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} &= (\dot{m}_{out,x} - \dot{m}_{in,x}) + (\dot{m}_{out,y} - \dot{m}_{in,y}) + (\dot{m}_{out,z} - \dot{m}_{in,z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) dx dy dz\end{aligned}$$

Διαφορική εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

ρυθμός **καθαρής εκροής** μάζας (εισροή – εκροή)
(ανά μονάδα όγκου)

ρυθμός **συσσώρευσης** μάζας (ανά μονάδα όγκου)

Εξίσωση συνέχειας σε διανυσματικό συμβολισμό

- Τελεστής ∇

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

- Απόκλιση (div)

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i} \rho u_x + \mathbf{j} \rho u_y + \mathbf{k} \rho u_z) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)$$

Εξίσωση συνέχειας σε διανυσματικό συμβολισμό

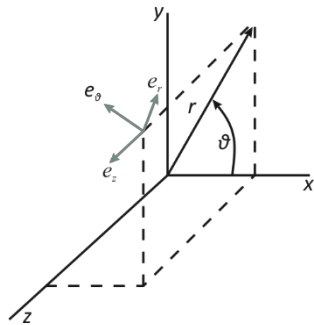
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

└── ρυθμός **καθαρής εκροής** μάζας (εισροή – εκροή)
(ανά μονάδα όγκου)

└── ρυθμός **συσσώρευσης** μάζας (ανά μονάδα όγκου)

Εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες

- Διανυσματικοί τελεστές σε κυλινδρικές συντεταγμένες



Βαθμίδα

$$\nabla \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Τελεστής Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

- Διαφορική εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0$$

Ειδικές μορφές εξίσωσης συνέχειας

- Μόνιμη ροή

Διανυσματική μορφή

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho u_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

- Ασυμπίεστη ροή

Διανυσματική μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(u_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z) = 0$$

Παράδειγμα 1

Έλεγχος έκφρασης πεδίου ταχύτητας

Το πεδίο πυκνότητας μιας διδιάστατης ροής ρευστού μεταβάλλεται γραμμικά με το y σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\rho = a - by$$

όπου a και b είναι μη-μηδενικές σταθερές.

Να εξεταστεί αν το πεδίο ταχύτητας της συγκεκριμένης ροής μπορεί να έχει τη μορφή:

$$\mathbf{u} = 2cx\mathbf{i} - cy\mathbf{j}$$

όπου c μη-μηδενική σταθερά.

Παράδειγμα 1 – Λύση 1/2

Οι αναλυτικές εκφράσεις του πεδίου πυκνότητας και του πεδίου ταχύτητας μιας ροής πρέπει να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση συνέχειας. Για μια διδιάστατη ροή, σε καρτεσιανές συντεταγμένες (επειδή η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες), η εξίσωση συνέχειας έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = 0$$

Εξετάζεται ο κάθε όρος της παραπάνω εξίσωσης.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(a - by) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) = \frac{\partial}{\partial x}[(a - by)2cx] = \frac{\partial}{\partial x}(2acx - 2bcxy) = 2ac - 2bcy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = \frac{\partial}{\partial y}[(a - by)(-cy)] = \frac{\partial}{\partial y}(-acy + bcy^2) = -ac + 2bcy$$

Παράδειγμα 1 – Λύση 2/2

Επομένως:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = 0 + (2ac - 2bcy) + (-ac + 2bcy) = ac$$

Επειδή $a \neq 0$ και $c \neq 0 \Rightarrow ac \neq 0$

Δηλαδή η διαφορική εξίσωση συνέχειας δεν ικανοποιείται και το πεδίο ταχύτητας δεν μπορεί να έχει τη συγκεκριμένη μορφή.

Δεύτερος νόμος κίνησης του Newton

- Για σύστημα

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \frac{Dm\mathbf{u}}{Dt} = m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = m\mathbf{a} \quad \text{διανυσματική εξίσωση}$$

- Καρτεσιανές συνιστώσες

$$F_x = ma_x \quad F_y = ma_y \quad F_z = ma_z$$

- Για απειροστό όγκο ελέγχου ($m = dm = \rho dV = \rho dx dy dz$)

$$dF_x = \rho a_x dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$dF_y = \rho a_y dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$dF_z = \rho a_z dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Για την
έκφραση της
επιτάχυνσης
σωματιδίου
βλ. Διάλεξη 7

Σωματικές δυνάμεις

- Βαρυτική δύναμη

$$d\mathbf{F}_g = dm\mathbf{g} = \mathbf{g} \rho dV = \mathbf{g} \rho dx dy dz$$

- Καρτεσιανές συνιστώσες

$$dF_{g,x} = g_x \rho dx dy dz$$

$$dF_{g,y} = g_y \rho dx dy dz$$

$$dF_{g,z} = g_z \rho dx dy dz$$

Επιφανειακές δυνάμεις – 1/3

- Συνολική επιφανειακή δύναμη

$$d\mathbf{F}_s = \mathbf{i}dF_{s,x} + \mathbf{j}dF_{s,y} + \mathbf{k}dF_{s,z}$$

- Οι επιφανειακές δυνάμεις είναι αποτέλεσμα των (επιφανειακών) τάσεων
- Δυαδικός τάσεων
 - Υδροστατική πίεση
 - Ιξώδεις τάσεις

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Για την έκφραση
του δυαδικού τάσης
βλ. Διάλεξη 9

Επιφανειακές δυνάμεις – 2/3

- Επιφανειακή δύναμη κατά τη x-διεύθυνση

$$dF_{s,x} = \left(dF_{(+x)x} - dF_{(-x)x} \right) \quad \text{Δύναμη που ασκείται στις x-επιφάνειες}$$

$$+ \left(dF_{(+y)x} - dF_{(-y)x} \right) \quad \text{Δύναμη που ασκείται στις y- επιφάνειες}$$

$$+ \left(dF_{(+z)x} - dF_{(-z)x} \right) \quad \text{Δύναμη που ασκείται στις z- επιφάνειες}$$

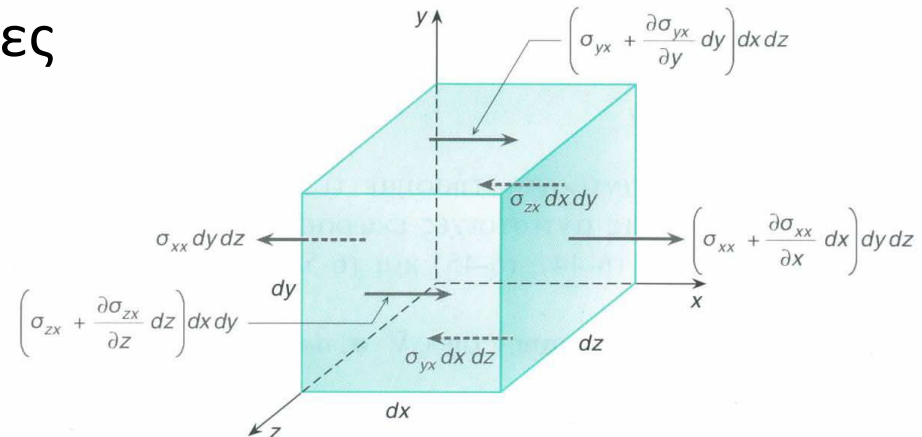
- Δύναμη κατά x σε x-επιφάνειες

$$dF_{(-x)x} = \sigma_{xx} dy dz$$

$$dF_{(+x)x} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz$$



$$\left(dF_{(+x)x} - dF_{(-x)x} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz$$

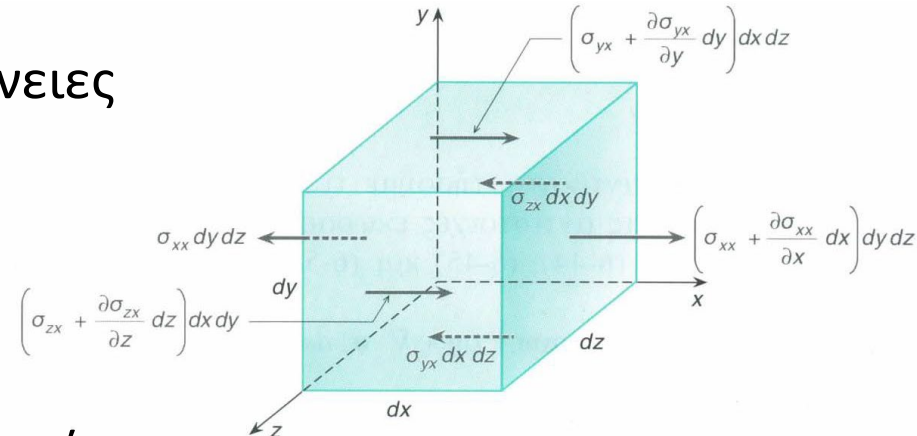


Επιφανειακές δυνάμεις – 3/3

- Δύναμη κατά x σε y- και z-επιφάνειες

$$\left(dF_{(+y)x} - dF_{(-y)x} \right) = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

$$\left(dF_{(+z)x} - dF_{(-z)x} \right) = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$



- Συνολική επιφανειακή δύναμη κατά x

$$dF_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

- Επιφανειακές δυνάμεις κατά y και z

$$dF_{s,y} = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$dF_{s,z} = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Εξισώσεις ορμής

- Εξίσωση x-ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

- Εξίσωση y-ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

- Εξίσωση z-ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Εξίσωση ορμής σε διανυσματικό συμβολισμό

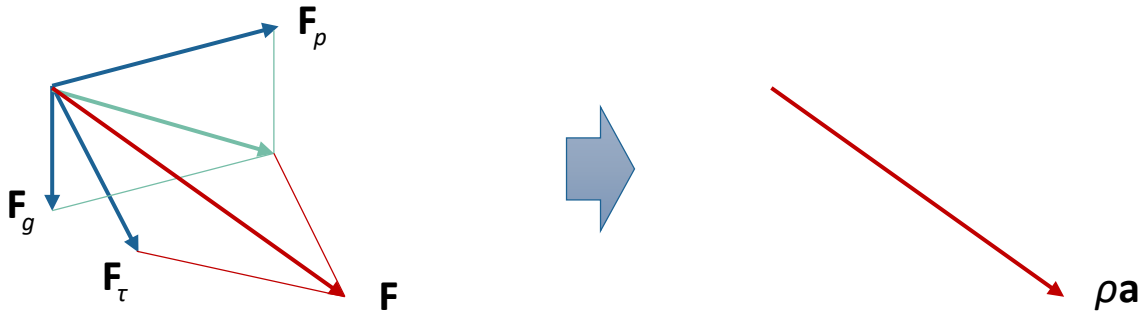
- Φυσική σημασία – Νόμος κίνησης του Newton

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Άθροισμα **εξωτερικών δυνάμεων** (ανά μονάδα όγκου)

- Δύναμη πίεσης ($\mathbf{F}_p = -\nabla p$)
- Βαρυτική δύναμη ($\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g}$)
- Ιξώδης δύναμη ($\mathbf{F}_\tau = -\nabla \boldsymbol{\tau}$)

Μάζα επί **επιτάχυνση** (ανά μονάδα όγκου)



Ρευστομηχανική

17^η Διάλεξη

Εξισώσεις Euler και Navier-Stokes

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Εξισώσεις ορμής

- Ισχύουν για κάθε ροή ανεξάρτητα από το είδος του ρευστού

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

- Ειδικές μορφές προκύπτουν αν αντικατασταθούν οι ιξώδεις τάσεις από τις **υλικές σχέσεις** (βλ. Διάλεξη 10)

Άτριβη ροή – Εξισώσεις Euler

- **Άτριβη** (ή μη-συνεκτική) ροή είναι η ροή ενός **ιδανικού ρευστού** (ρευστού με μηδενικό ιξώδες)



- Μηδενικές ιξώδεις τάσεις ($\tau_{ij} = 0$)
- Οι εξισώσεις ορμής παίρνουν τη μορφή (Εξισώσεις Euler):

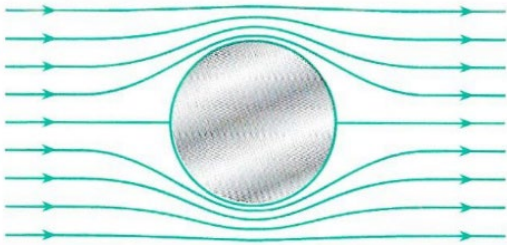
$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

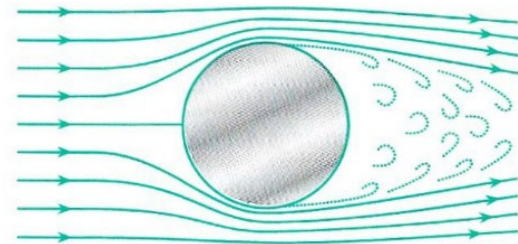
Άτριβη και ιξώδης ροή

- Άτριβη ροή γύρω από στερεό σώμα



- Το ιδανικό ρευστό ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια του στερεού

- Ιξώδης ροή γύρω από στερεό σώμα



- Σχηματισμός οριακού στρώματος κοντά στην επιφάνεια του στερεού
- Αποκόλληση της ροής από την επιφάνεια του στερεού και δημιουργία ολκού (ή απόρρους)
- Έξω από το οριακό στρώμα και τον ολκό, η ροή είναι άτριβη

Εξισώσεις Navier Stokes

- Για **ασυμπίεστα και νευτωνικά ρευστά** με χρήση της υλικής σχέσης του Stokes (Διάλεξη 10)

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$$

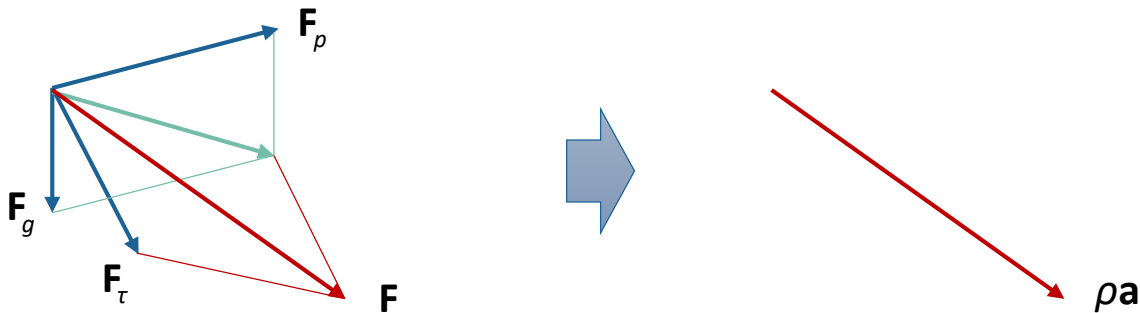
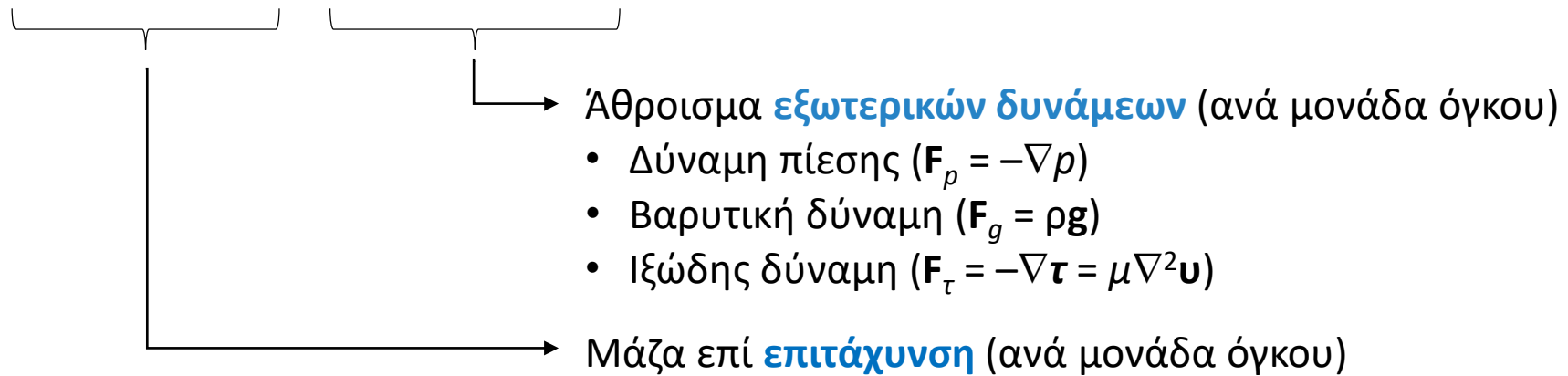
- Μαζί με την εξίσωση συνέχειας αποτελούν ένα κλειστό σύστημα 4 διαφορικών εξισώσεων με 4 αγνώστους (u_x, u_y, u_z, p)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Εξίσωση Navier-Stokes σε διανυσματικό συμβολισμό

- Φυσική σημασία A – Νόμος κίνησης του Newton

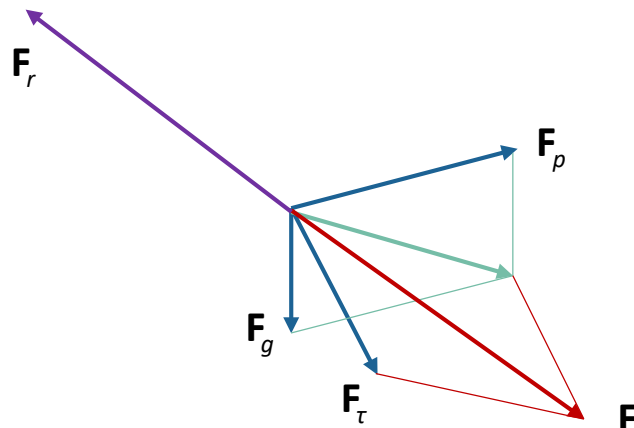
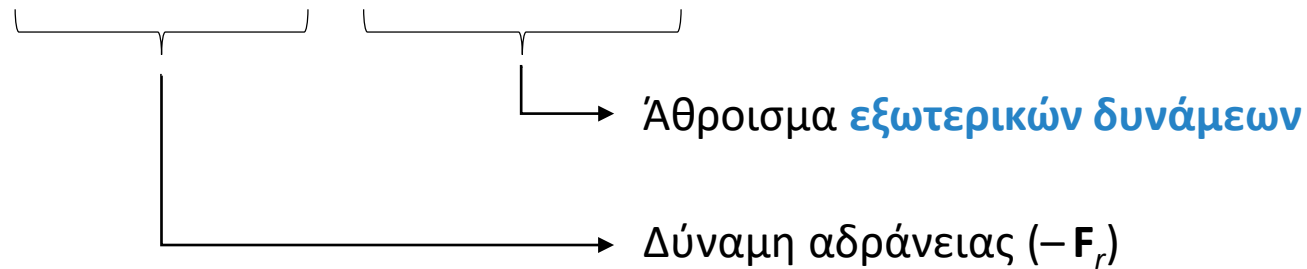
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$



Εξίσωση Navier-Stokes σε διανυσματικό συμβολισμό

- Φυσική σημασία B – Ισορροπία δυνάμεων

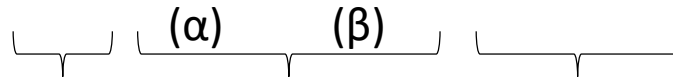
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$



Εξίσωση Navier-Stokes σε διανυσματικό συμβολισμό

- Φυσική σημασία Γ – Ισοζύγιο ορμής

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$



Ρυθμός **παραγωγής** ορμής

Ρυθμός καθαρής **εκροής** ορμής

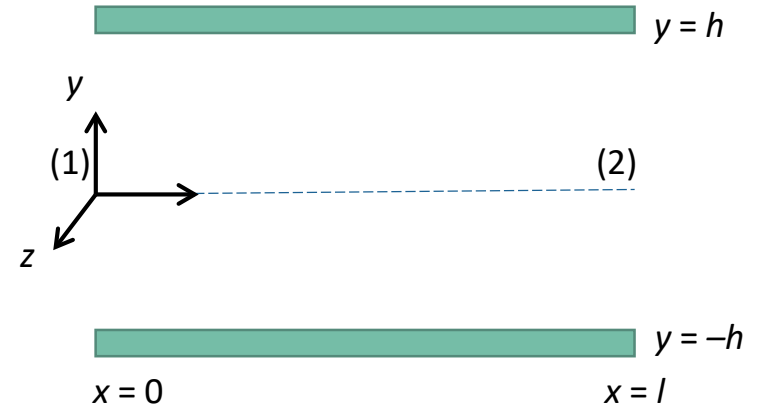
(α) «**Συναγωγή ορμής**» Μη-γραμμικός όρος – Η ταχύτητα τόσο το μέσο που συνάγει μια ποσότητα όσο και την ίδια την ποσότητα

(β) «**Διάχυση ορμής**» βλ. Διάλεξη 9 για Μοριακή Θεώρηση ιξωδών τάσεων

Ρυθμός **συσσώρευσης** ορμής

Αναλυτική λύση N-S 1/10

Μόνιμη στρωτή ροή μεταξύ ακίνητων παράλληλων πλακών απείρου μήκους



Παραδοχές

- | | |
|---------------------------|---|
| 1. Μόνιμη κατάσταση | $\partial/\partial t = 0$ |
| 2. Διδιάστατη ροή | $u_z = 0, \partial/\partial z = 0$ |
| 3. Οριζόντιες πλάκες | $g_x = g_z = 0, g_y = -g$ |
| 4. Πλήρως ανεπτυγμένη ροή | $\partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial x = 0$ |
| 5. Συνθήκη μη-ολίσθησης | $u_x(x, \pm h, z, t) = u_y(x, \pm h, z, t) = 0$ |

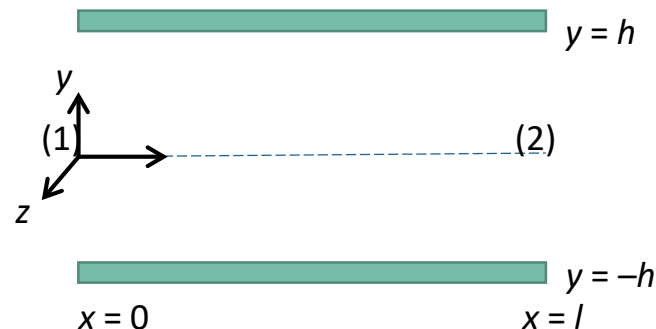
Αναλυτική λύση N-S 2/10

Ζητούμενα για έναν Μηχανικό

- Μέση ταχύτητα $\bar{u}$ (ή ογκομετρικός ρυθμός παροχής $\dot{V} = \bar{u}A$) ως συνάρτηση των παραμέτρων που την επηρεάζουν:

$$\bar{u} = f \left(\begin{array}{ccc} \text{Γεωμετρικά} & \text{Ιδιότητες} & \text{Επιβαλλόμενες} \\ \text{Χαρακτηριστικά} & \text{Ρευστού} & \text{Συνθήκες} \end{array} \right)$$
$$h, l \qquad \rho, \mu \qquad \Delta p = p_1 - p_2$$

- Δύναμη που ασκείται από το ρευστό στις πλάκες



Αναλυτική λύση N-S 3/10

Απλοποίηση εξισώσεων N-S

$$\frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial x}}^{(4)} + \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial y}}^{(5^*)} + \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} = 0$$

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u_x}{\partial t}}^{(1)} + u_x \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial x}}^{(4)} + u_y \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial y}}^{(5^*)} + u_z \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\cancel{\partial^2 u_x}}{\cancel{\partial x^2}}^{(4)} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\cancel{\partial^2 u_x}}{\cancel{\partial z^2}}^{(2)} \right)$$

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u_y}{\partial t}}^{(1)} + u_x \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial x}}^{(4)} + u_y \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial y}}^{(5^*)} + u_z \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\cancel{\partial^2 u_y}}{\cancel{\partial x^2}}^{(4)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_y}}{\cancel{\partial y^2}}^{(5^*)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_y}}{\cancel{\partial z^2}}^{(2)} \right)$$

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}}^{(1)} + u_x \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial x}}^{(2)} + u_y \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial y}}^{(2)} + u_z \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} \right) = -\frac{\partial p}{\cancel{\partial z}}^{(2)} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\cancel{\partial^2 u_z}}{\cancel{\partial x^2}}^{(2)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_z}}{\cancel{\partial y^2}}^{(2)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_z}}{\cancel{\partial z^2}}^{(2)} \right)$$

$$\cancel{u_x(x,y,z,t)}^{(4)}, \cancel{u_y(x,y,z,t)}^{(5^*)}, \cancel{u_z(x,y,z,t)}^{(2)}, \cancel{p(x,y,z,t)}^{(1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cancel{\partial u_y / \partial y}^{(5^*)} = 0 \\ u_y(y = \pm h) = 0 \end{array} \right\} u_y = 0$$

Αναλυτική λύση N-S 4/10

Τελική μορφή εξισώσεων

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$$

Εξίσωση x -ορμής $(F_{p,x} + F_{\tau,x} = 0)$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0$$

Εξίσωση y -ορμής $(F_{p,y} + F_{g,y} = 0)$

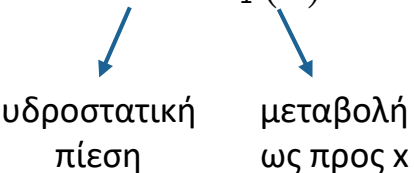
$$u_x(y), \quad p(x,y)$$

Αναλυτική λύση N-S 5/10

Ολοκλήρωση εξίσωσης y -ορμής

Δ.Ε. για τη μεταβολή της p ως προς y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g y + f_1(x)$$



Επειδή ολοκληρώνουμε ως προς y προσθέτουμε μια συνάρτηση μόνο του x

επίσης

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) = \frac{d}{dx} f_1(x) \quad (= f_2(x))$$

δηλαδή η $\partial p / \partial x$ δεν εξαρτάται από το y (θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια)

Αναλυτική λύση N-S 6/10

Ολοκλήρωση εξίσωσης x-ορμής

Δ.Ε. για τη μεταβολή της u_x ως προς y

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \Rightarrow u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2$$

Οριακές συνθήκες:
(μη-ολίσθηση)

$$u_x(h) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + c_1 h + c_2 = 0$$
$$u_x(-h) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (-h)^2 - c_1 h + c_2 = 0$$



$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2$$

Επομένως:

$$u_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (h^2 - y^2)$$

Αναλυτική λύση N-S 7/10

Βαθμίδα πίεσης

- Επειδή $u_x > 0$ (κατά τη θετική φορά του x) $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} < 0$
- Επειδή η u_x δε μεταβάλλεται κατά x (πλήρως ανεπτυγμένη) $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \text{σταθερή}$



Αν $\Delta p = p_1 - p_2$ είναι η πτώση πίεσης μεταξύ δύο σημείων της ίδιας ροϊκής γραμμής (ίδιου y) που απέχουν (κατά x) απόσταση l :

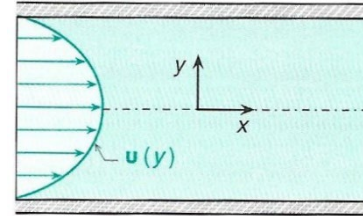
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{l}$$

Αναλυτική λύση N-S 8/10

Κατανομή ταχύτητας

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} (h^2 - y^2)$$

- Παραβολικό προφίλ
- Μηδενική ταχύτητα για $y = \pm h$
- Μέγιστη ταχύτητα για $y = 0$



$$u_{max} = \frac{h^2 \Delta p}{2\mu l}$$

Ογκομετρικός ρυθμός παροχής

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A u_x dA = \int_{-h}^h \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} (h^2 - y^2) dy \Rightarrow$$

$$\dot{V} = \frac{2h^3 \Delta p}{3\mu l} \text{ σε } \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m βάθους}}$$

Αναλυτική λύση N-S 9/10

Μέση ταχύτητα

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{2h(1)} \Rightarrow \bar{u} = \frac{h^2 \Delta p}{3\mu l}$$

Παρατήρηση: $\frac{u_{max}}{\bar{u}} = \frac{3}{2}$

Κατανομή πίεσης

$$p = -\rho g y + f_1(x)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx} f_1(x) = -\frac{\Delta p}{l} \Rightarrow f_1(x) = -\frac{\Delta p}{l} x + c$$



$$p = -\rho g y - \frac{\Delta p}{l} x + c$$

- Η σταθερά c απαιτείται μόνο για υπολογισμούς απόλυτης τιμής της πίεσης και όχι διαφορών πίεσης
- Για τον προσδιορισμό της c πρέπει να είναι γνωστή η τιμή της πίεσης σε κάποιο σημείο

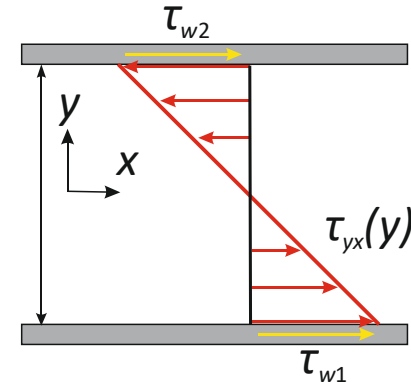
π.χ. για $x = 0, y = 0 \rightarrow p = p_0$ και:

$$p = -\rho g y - \frac{\Delta p}{l} x + p_0$$

Αναλυτική λύση N-S 10/10

Κατανομή διατμητικών τάσεων

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} \Rightarrow \tau_{yx}(y) = -\frac{\Delta p}{l\mu} y$$



- Η τάση μηδενίζεται στο $y = 0$ (μηδενική βαθμίδα u_x)
- Η τάση παίρνει μέγιστη (απόλυτη) τιμή στα $y = \pm h$

Η τάση που ασκεί το ρευστό στα τοιχώματα της κάθε πλάκας είναι:

$$\tau_w = \tau_{yx}(-h) = -\tau_{yx}(h) \Rightarrow \tau_w = \frac{\Delta p h}{l\mu}$$

Ρευστομηχανική

18^η Διάλεξη

Ροή σε σωληνώσεις – Βασικές έννοιες

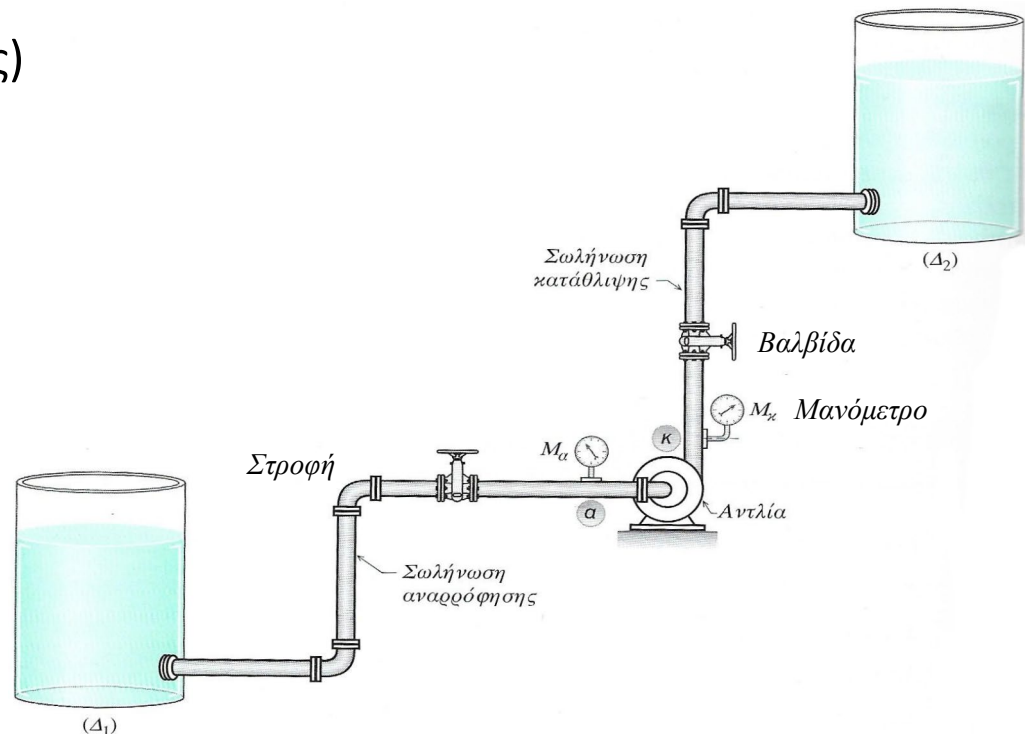
Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Στοιχεία σωληνώσεων

- Σωλήνωση (σωληνογραμμή)
- Αγωγοί
 - Κυκλικής διατομής (σωλήνες)
 - Μη-κυκλικής διατομής (ορθογωνικής, ελλειπτικής)
- Εξαρτήματα
 - Καμπύλες, διακλαδώσεις
 - Συστολές, διαστολές
 - Βαλβίδες (ρύθμιση ροής)
- Συσκευές προσαγωγής / απαγωγής ενέργειας
 - Αντλίες
 - Στρόβιλοι

Σύνολο αγωγών που τοποθετούνται διαδοχικά για τη μεταφορά ενός ρευστού από ένα σημείο (παραγωγή, αποθήκευση) σε ένα άλλο σημείο (κατανάλωση, αποθήκευση)



Κινούσα δύναμη

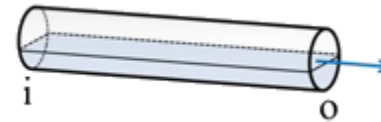
Ροή σε αγωγό



$$p_i > p_o$$

- Ο αγωγός καλύπτεται από το ρευστό (πλήρης ρευστού)
- Για οριζόντιους ή αγωγούς με ανωφέρεια, μόνη κινούσα δύναμη είναι η **διαφορά πίεσης**
- Για αγωγούς με κατωφέρεια, κινούσες δυνάμεις είναι η διαφορά πίεσης και η **βαρύτητα**

Ροή με ελεύθερη επιφάνεια (π.χ. σε ανοικτό κανάλι)

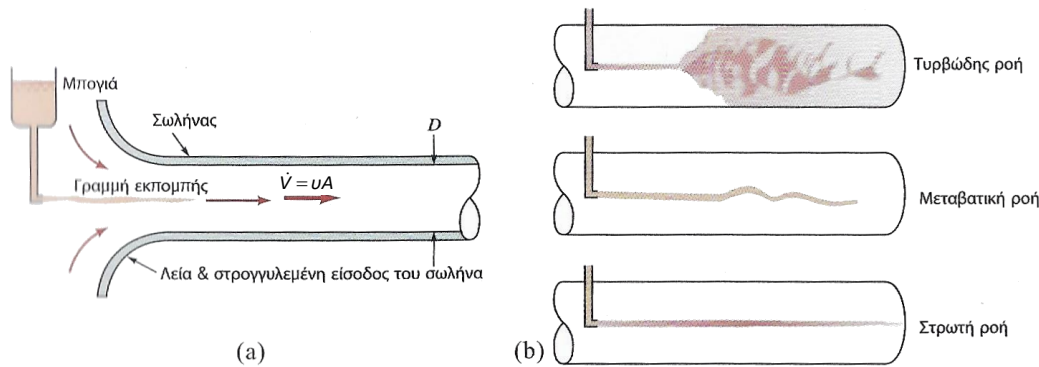


$$p_i \approx p_o$$

- Ο αγωγός καλύπτεται μερικώς από το ρευστό
- Το ρευστό ρέει από μεγαλύτερα σε μικρότερα ύψη
- Η μόνη κινούσα δύναμη είναι η βαρύτητα

Στρωτή και τυρβώδης ροή

- Το πείραμα του Reynolds

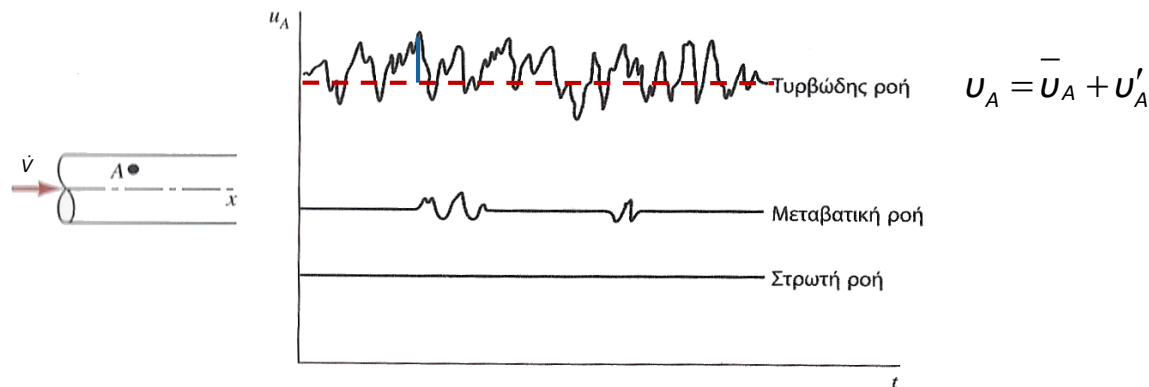


Video



<https://www.youtube.com/watch?v=6OzAx1bPGD4>

- Διακύμανση ταχύτητας



Αριθμός Reynolds

$$Re_D = \frac{\rho u D}{\mu} = \frac{u D}{\nu}$$

Μέση ταχύτητα: $u(=\bar{u}) = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{\pi R^2}$



$$Re_D > 4000$$



$$2100 < Re_D < 4000$$



$$Re_D < 2100$$

Παράδειγμα 1

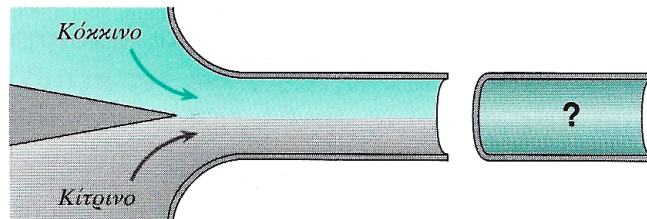
Χαρακτηρισμός ροής ως στρωτής ή τυρβώδους

Δύο ρεύματα χρωμάτων, το ένα κίτρινο και το άλλο κόκκινο, εισέρχονται σε αγωγό κυκλικής διατομής μήκους 1 m και διαμέτρου 2 cm.

Τι χρώμα έχει το ρευστό που εξέρχεται από τον αγωγό αν τα δύο χρώματα έχουν ιξώδες $0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, πυκνότητα 1000 kg/m^3 και η ταχύτητα ροής είναι:

(α) 0.1 m/s

(β) 10 m/s



$$L = 1 \text{ m} \quad D = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$$

$$\mu = 0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s} \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = 0.1 \text{ m/s} \quad u_2 = 10 \text{ m/s}$$

Παράδειγμα 1 – Λύση

$$\alpha. \quad Re_{D,1} = \frac{\rho u_1 D}{\mu} = \frac{1000 \times 0.1 \times 0.02}{0.01} = 200$$

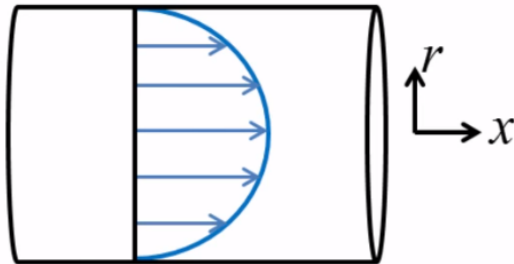
Στρωτή ροή -> Καμία ανάμιξη -> Δύο διακριτά ημικυκλικά ρεύματα

$$\beta. \quad Re_{D,2} = \frac{\rho u_2 D}{\mu} = \frac{1000 \times 10 \times 0.02}{0.01} = 20000$$

Τυρβώδης ροή -> Πλήρης ανάμιξη -> Πορτοκαλί ρεύμα

Προφίλ ταχύτητας

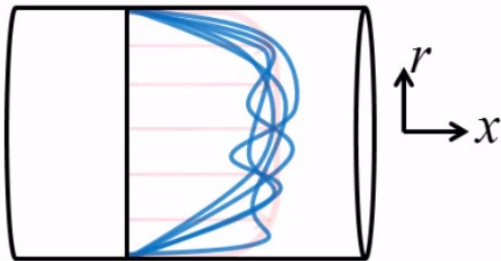
A. Στρωτή ροή



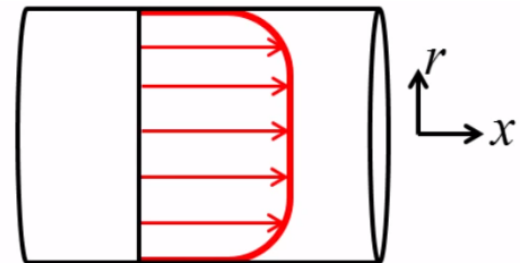
Παραβολικό
προφίλ

B. Τυρβώδης ροή

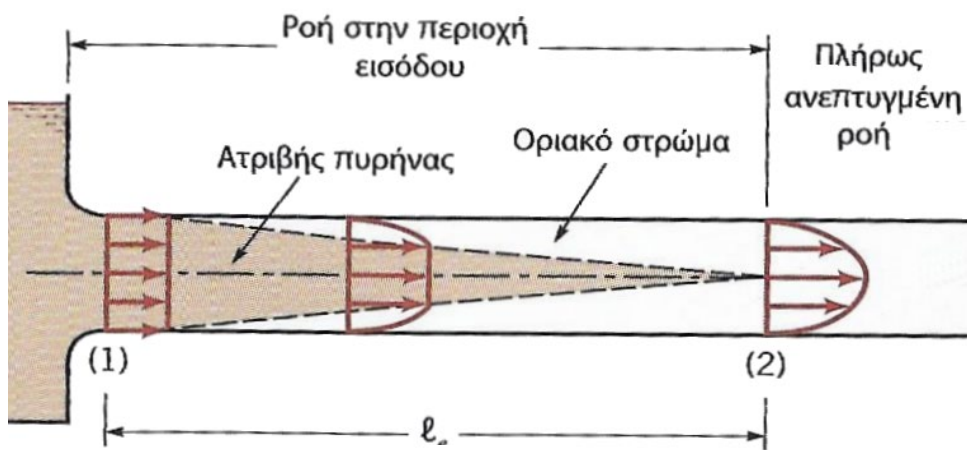
Στιγμιαία προφίλ



Χρονικά μέσο προφίλ



Περιοχή εισόδου και πλήρως ανεπτυγμένη ροή



Μεταβατικό μήκος

Στρωτή ροή

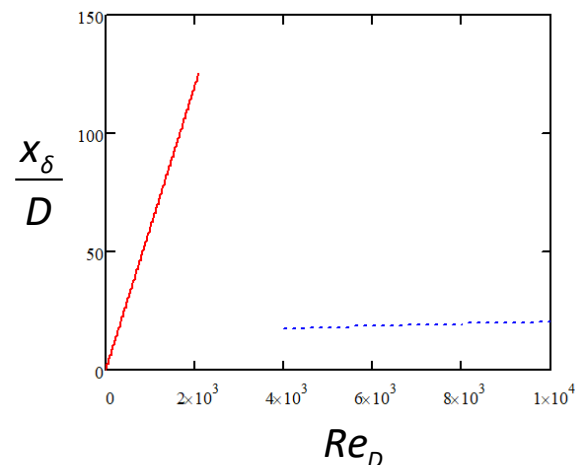
Τυρβώδης ροή

$$\frac{x_\delta}{D} = 0.06 Re_D$$

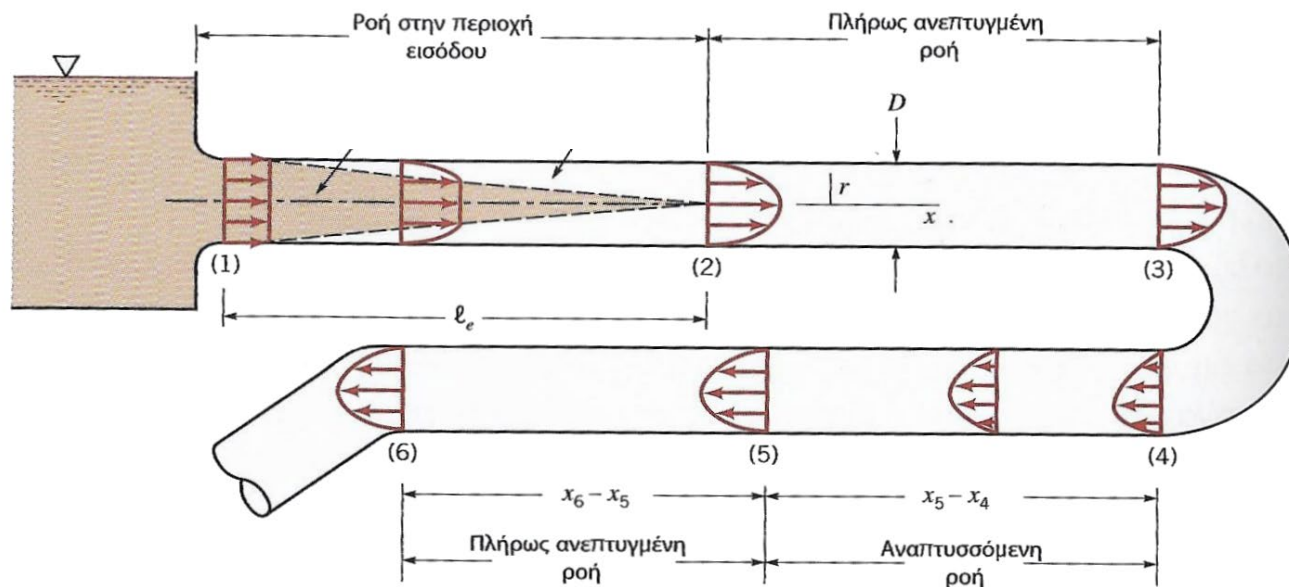
$$\frac{x_\delta}{D} = 4.4 (Re_D)^{1/6}$$

Στα περισσότερα τεχνικά προβλήματα

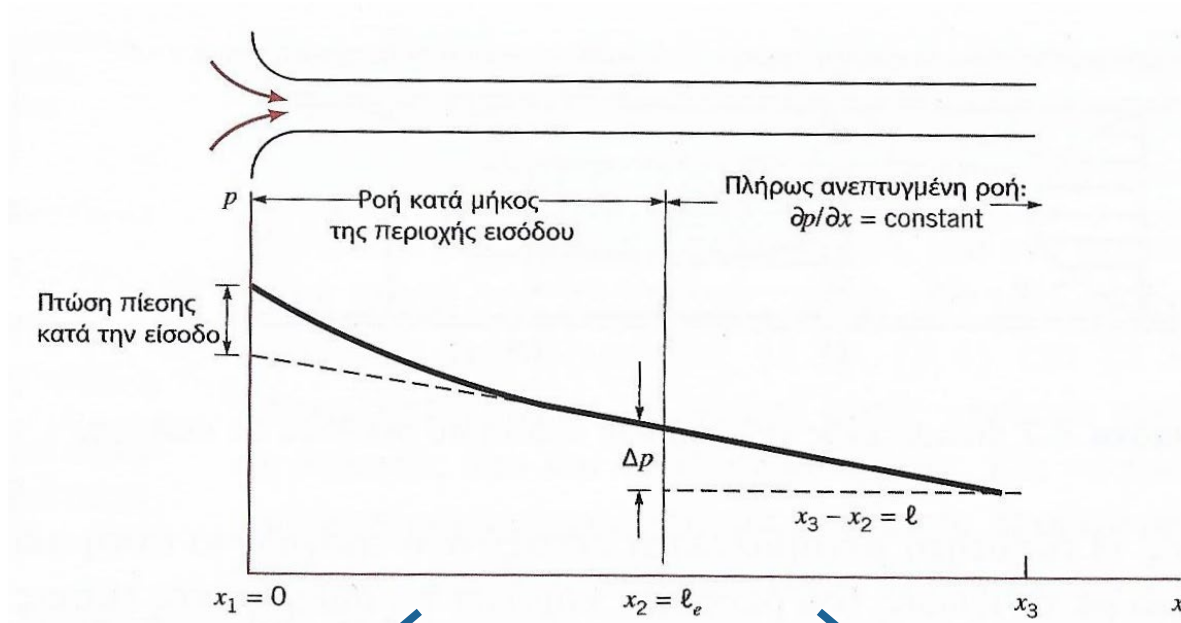
$$10000 \leq Re_D \leq 100000 \Rightarrow 20D \leq x_\delta \leq 30D$$



Ανάπτυξη ροής σε σωληνώσεις



Πτώση πίεσης κατά μήκος σωλήνα



- Μεταβαλλόμενες διατμητικές δυνάμεις
- Δυνάμεις αδράνειας



- Μεγάλες δυνάμεις πίεσης
- Μεγάλη πτώση πίεσης



- Σταθερές διατμητικές δυνάμεις
- Μηδενικές δυνάμεις αδράνειας

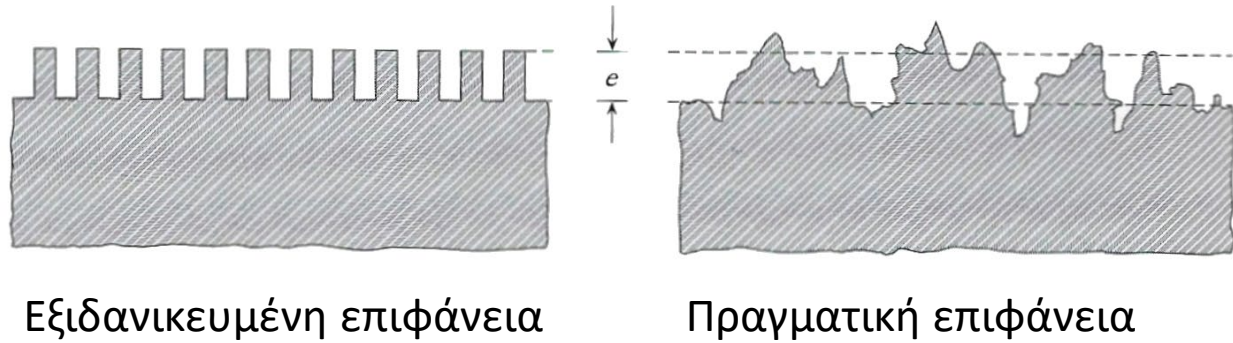


- Σταθερές δυνάμεις πίεσης
- Γραμμική κατανομή πίεσης



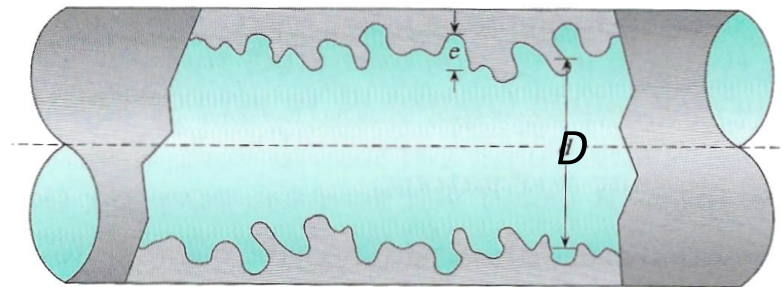
Τραχύτητα αγωγού

- Απόλυτη τραχύτητα



- Σχετική τραχύτητα

$$e_s = \frac{e}{D}$$



Ρευστομηχανική

19^η Διάλεξη

Ροή σε σωληνώσεις – Απώλειες ενέργειας

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Εξίσωση διατήρησης ενέργειας

Γενικευμένη εξίσωση Bernoulli

- Σε όρους ειδικής **ενέργειας**

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{u_2^2}{2} + w_s + w_l$$

(1) (2) (3) (4) (5)

- (1) Ενέργεια ροής
- (2) Δυναμική ενέργεια
- (3) Κινητική ενέργεια
- (4) Αξονικό έργο
- (5) Απώλειες ενέργειας

σε J/kg

- Σε όρους **ύψους**

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_s + h_l$$

(1) (2) (3) (4) (5)

- (1) Ύψος πίεσης
- (2) Ύψος στάθμης (θέσης)
- (3) Ύψος ταχύτητας
- (4) Αξονικό ύψος
- (5) Απώλειες ύψους

σε m = J/N

- Σε όρους **πίεσης**

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_s + p_l$$

(1) (2) (3) (4) (5)

- (1) Στατική πίεση
- (2) Υδροστατική (υψομετρική) πίεση
- (3) Δυναμική πίεση
- (4) Αξονική πίεση
- (5) Απώλειες πίεσης

σε Pa = J/m³

ή

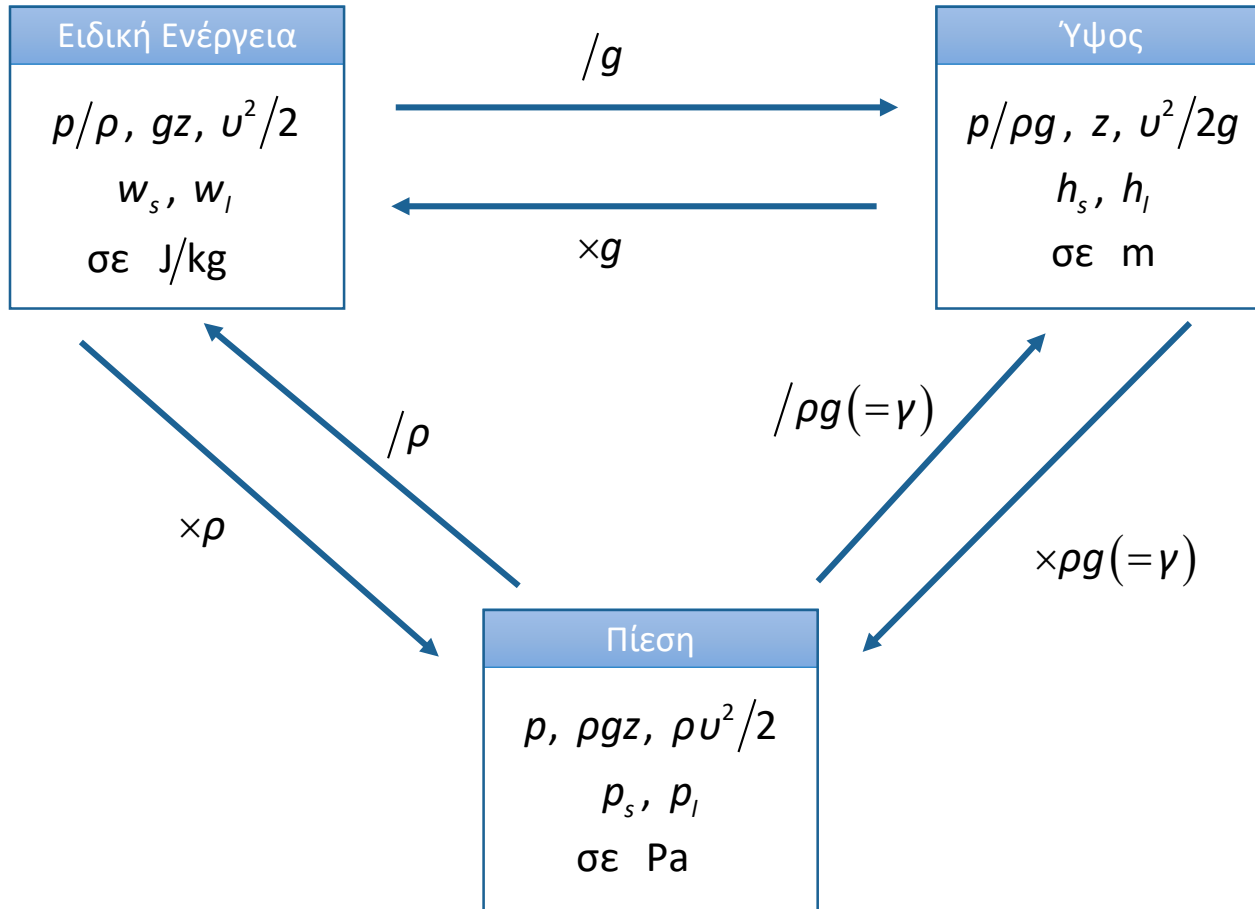
$$p_{t,1} = p_{t,2} + p_s + p_l \quad \text{όπου} \quad p_t = p + \rho g z + \frac{\rho u^2}{2} \quad \text{είναι η ολική πίεση}$$

$$h_l = w_l / g$$

$$p_l = \rho w_l$$

$$p_l = \gamma h_l$$

Μεγέθη και μετατροπές



Πτώση πίεσης σε αγωγό

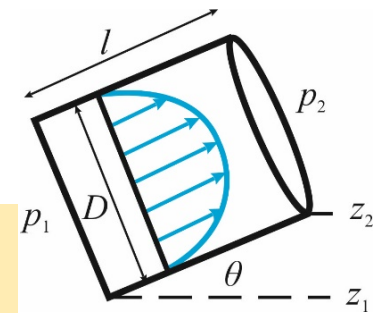
Πλήρως ανεπτυγμένη ροή

- Διατήρηση ενέργειας

$$p_1 + \rho g z_1 + \cancel{\frac{\rho u_1^2}{2}} = p_2 + \rho g z_2 + \cancel{\frac{\rho u_2^2}{2}} + p_l \Rightarrow$$
$$(p_1 - p_2) = p_l + \rho g (z_2 - z_1) \Rightarrow$$

$$\Delta p = p_l + \rho g l \sin \theta$$

Για οριζόντιο αγωγό $\Delta p = p_l$
Δηλαδή, οι απώλειες ενέργειας λόγω τριβής
εκδηλώνονται μακροσκοπικά ως πτώση πίεσης

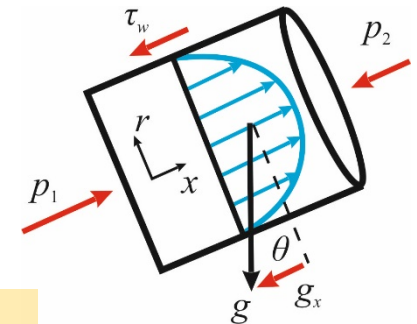


- Νόμος κίνησης Newton

$$p_1 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) - p_2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) - \tau_w (\pi D l) - \rho g_x \left(\frac{\pi D^2}{4} l \right) = 0 \Rightarrow$$
$$(p_1 - p_2) \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) = \tau_w (\pi D l) + \rho g \sin \theta \left(\frac{\pi D^2}{4} l \right) \Rightarrow$$

$$\Delta p = \frac{4 \tau_w l}{D} + \rho g l \sin \theta$$

Για οριζόντιο αγωγό $\Delta p = 4 \tau_w l / D$
Δηλαδή, η δύναμη από την πτώση πίεσης
εξισορροπεί τις ιξώδεις δυνάμεις



Απώλειες σε αγωγό (γραμμικές απώλειες)

- Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις

$$p_l = \frac{4\tau_w l}{D} = 4\tau_w \frac{l}{D} \frac{\rho u^2 / 2}{\rho u^2 / 2} = \frac{8\tau_w}{\rho u^2} \frac{l}{D} \frac{\rho u^2}{2}$$

Οι γραμμικές απώλειες πίεσης σχετίζονται με τη διατμητική τάση του τοιχώματος

ισοδύναμα

$$p_l = f \frac{l}{D} \frac{\rho u^2}{2}$$

Εξίσωση Darcy–Weisbach

με

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho u^2}$$

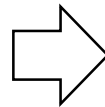
Συντελεστής γραμμικών απωλειών (τριβής / Darcy)

Παρατήρηση: Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν τόσο για στρωτή όσο και τυρβώδη ροή, σε αγωγούς κυκλικής διατομής (σωλήνες) αλλά και μη κυκλικής διατομής.

Στρωτή ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής

- Διατμητική τάση τοιχώματος

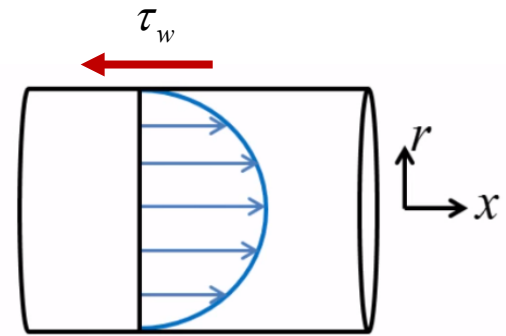
$$\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=D/2} = -\mu \left. \frac{\partial u_x}{\partial r} \right|_{r=D/2}$$



$$\tau_w = \frac{8\mu\bar{u}}{D}$$

$$u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

! Τη μέση ταχύτητα $\bar{u}$
τη συμβολίζουμε με u



Προφίλ ταχύτητας σε στρωτή ροή (εξίσωση Hagen-Poiseuille)

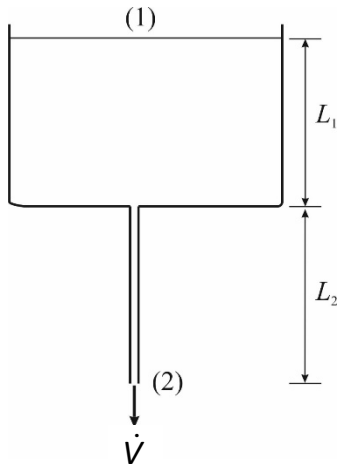
- Συντελεστής γραμμικών απωλειών

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2} = \frac{64\mu}{\rho\bar{u}D}$$

εναλλακτικά

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Παράδειγμα 1



Μέτρηση ιξώδους (συντελεστή συνεκτικότητας) ρευστού
μέσω τριχοειδούς σωλήνα

Το ρευστό ρέει λόγω βαρύτητας μέσα από τριχοειδή σωλήνα που προσαρμόζεται σε μια ανοιχτή στην ατμόσφαιρα δεξαμενή και μετριέται η ογκομετρική παροχή. Να υπολογιστεί το ιξώδες του.

Δίνονται

$$L_1 = L_2 = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

Ύψος δεξαμενής και μήκος σωλήνα

$$D = 1.2 \text{ mm} = 0.0012 \text{ m}$$

Διάμετρος σωλήνα

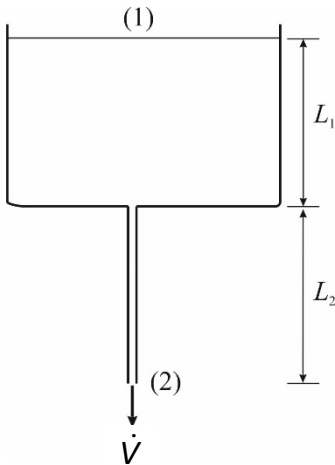
$$\dot{V} = 0.004 \text{ m}^3/\text{h} = 1.111 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Ογκομετρική παροχή

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Πυκνότητα ρευστού

Παράδειγμα – Λύση 1/2



Βήμα 1: Εφαρμογή εξίσωσης ενέργειας (γενικευμένη εξίσωση Bernoulli) για υπολογισμό απωλειών

Εξίσωση ενέργειας μεταξύ σημείων (1) και (2) (δεξαμενή και σωλήνα)

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_l$$

Απλοποιήσεις

$$p_1 = p_2 = p_0 \quad \text{Ατμοσφαιρική πίεση}$$

$$u_1 = 0 \quad \text{Αμελητέα ταχύτητα στη δεξαμενή σε σχέση με το σωλήνα}$$

$$\Downarrow$$
$$\rho g z_1 = \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_l \Rightarrow p_l = \rho g (z_1 - z_2) - \frac{\rho u_2^2}{2}$$

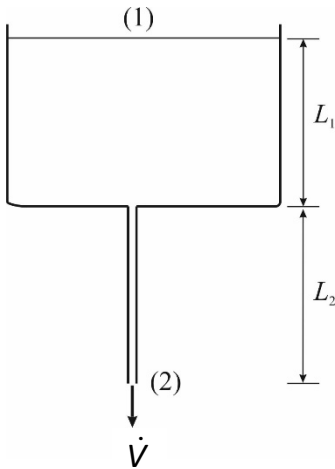
Υπολογισμός απωλειών

$$z_1 - z_2 = L_1 + L_2 = 0.6\text{m}$$

$$u_2 = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1.111 \times 10^{-6}}{3.142 \times 0.0012^2 / 4} = 0.982 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow p_l = 1000 \times 9.807 \times 0.6 - \frac{1000 \times 0.982^2}{2} = 5.401 \times 10^3 \text{ Pa}$$

Παράδειγμα – Λύση 2/2



Βήμα 2: Εφαρμογή εξίσωσης Darcy–Weisbach για υπολογισμό συντελεστή απωλειών

Εξίσωση Darcy–Weisbach για τον σωλήνα

$$p_l = f \frac{L_2}{D} \frac{\rho u_2^2}{2}$$

Επίλυση ως προς f

$$f = \frac{2p_l D}{L_2 \rho u_2^2}$$

$$f = \frac{2 \times 5.401 \times 10^3 \times 0.0012}{0.3 \times 1000 \times 0.982^2} = 0.045$$

Βήμα 3: Εφαρμογή σχέσης $f = f(Re_D)$ για υπολογισμό ιξώδους

Υποθέτουμε στρωτή ροή, επομένως:

$$f = \frac{64}{Re_D} \Rightarrow Re_D = \frac{64}{f}$$

$$Re_D = \frac{64}{0.045} = 1430$$

στρωτή ροή

Από τον Re_D υπολογίζουμε το μ :

$$Re_D = \frac{\rho u_2 D}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{\rho u_2 D}{Re_D}$$

$$\mu = \frac{1000 \times 0.982 \times 0.0012}{1430} = 8.247 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Τυρβώδης ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής

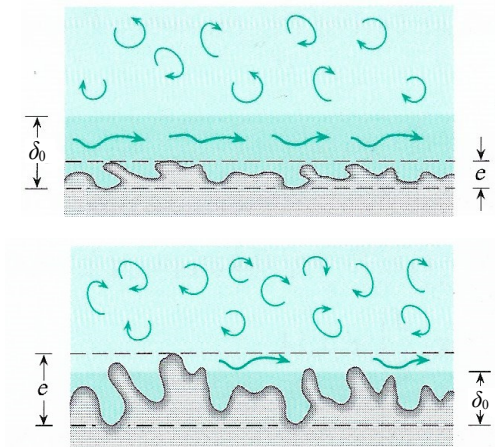
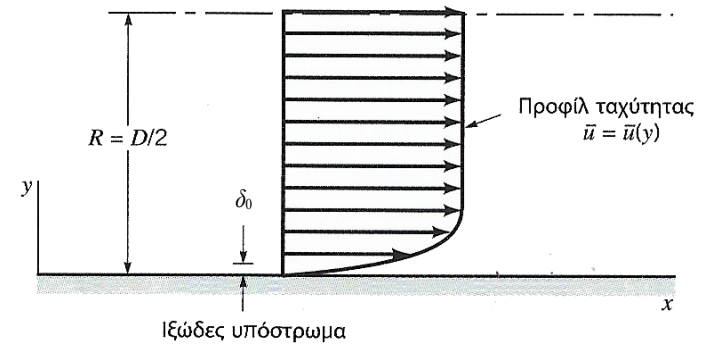
- Δεν έχει αναπτυχθεί θεωρητική μέθοδος καθορισμού του f
- Πειραματικές μετρήσεις και εμπειρικές συσχετίσεις
- Ο συντελεστής γραμμικών απωλειών εξαρτάται
 - Συνθήκες ροής $\rightarrow Re_D$
 - Υφή εσωτερικής επιφάνειας $\rightarrow$ σχετική τραχύτητα e_s

Μορφή εμπειρικών σχέσεων

$$f = f\left(Re_D, e_s = \frac{e}{D}\right)$$

Επίδραση τραχύτητας

- Ιξώδες υπόστρωμα
 - Σταθεροποιητική δράση στην εμφάνιση δινών
 - Πάχος δ_0 μειώνεται με τον Re_D
- Υδραυλικά **λείοι** σωλήνες
 - Τα στοιχεία της τραχύτητας σκεπάζονται από το ιξώδες υπόστρωμα ($\delta_0 > e$)
 - $f = f(Re_D)$
- **Τραχείς** σωλήνες
 - Μικρό πάχος υποστρώματος ($\delta_0 \leq e$)
 - $f = f(Re_D, e_s)$
- Πλήρως τυρβώδεις ροές
 - Πολύ λεπτό ιξώδες υπόστρωμα
 - $f = f(e_s)$



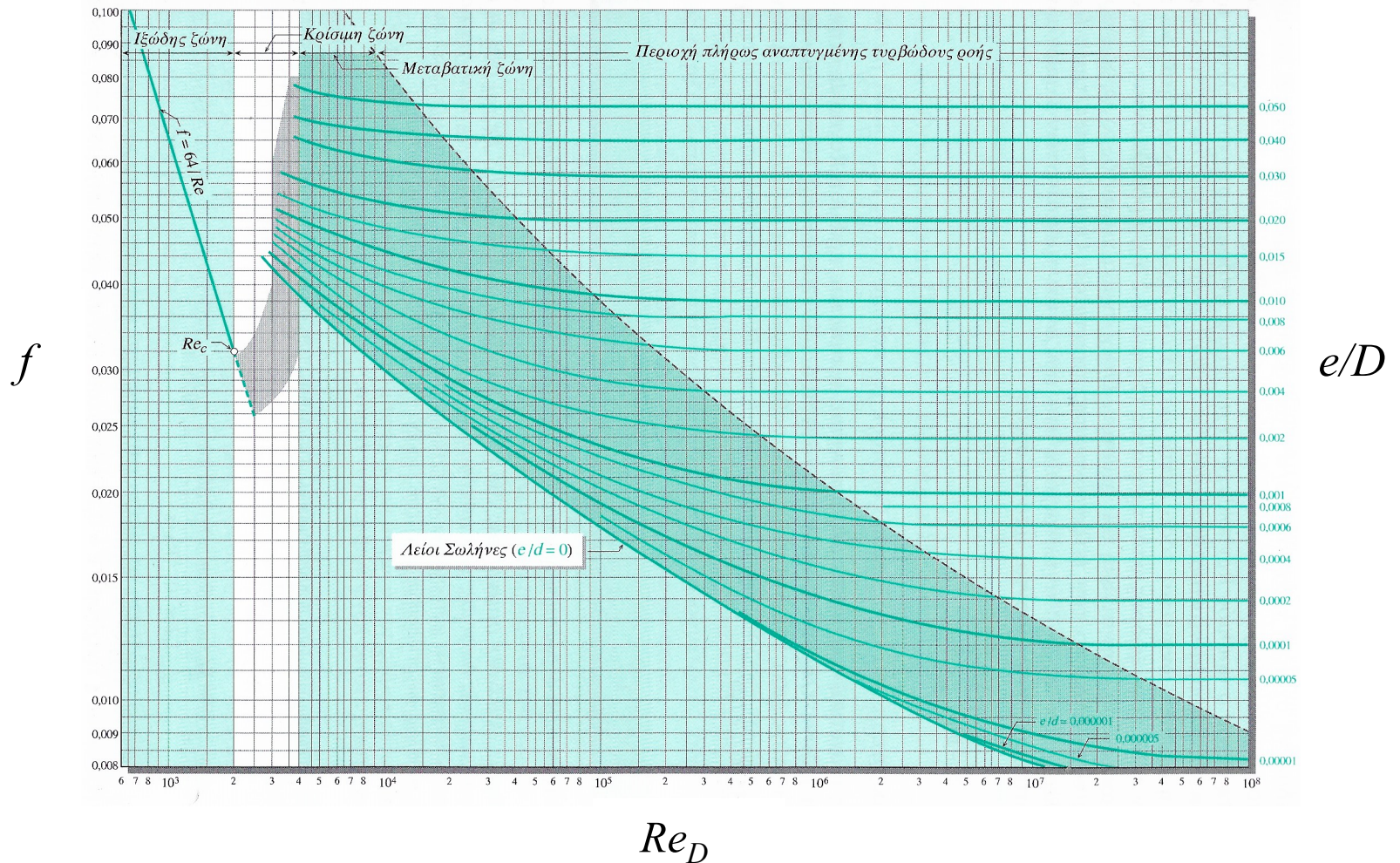
Εμπειρικές σχέσεις σε τυρβώδη ροή

Σχέση	Περιοχή ισχύος	Παρατηρήσεις
<i>Υδραυλικά λείοι σωλήνες</i>		
$f = \frac{0.3164}{Re_D^{1/4}}$	$4000 < Re_D < 10^5$	Σχέση Blasius
$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re_D \sqrt{f}) - 0.8$	$Re_D > 10^5$	Σχέση Prandtl
<i>Τραχείς σωλήνες</i>		
$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{D}{e}\right) + 1.14$	$\frac{D/e}{Re_D \sqrt{\lambda}} > 0.005$	Σχέση Nikuradse
$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}}\right)$	$Re_D > 4000$	Σχέση Colebrook

Σε πλήρως τυρβώδεις ροές εφαρμόζεται η σχέση Colebrook με $Re_D \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{3.7}{e/D}\right)$$

Διάγραμμα Moody

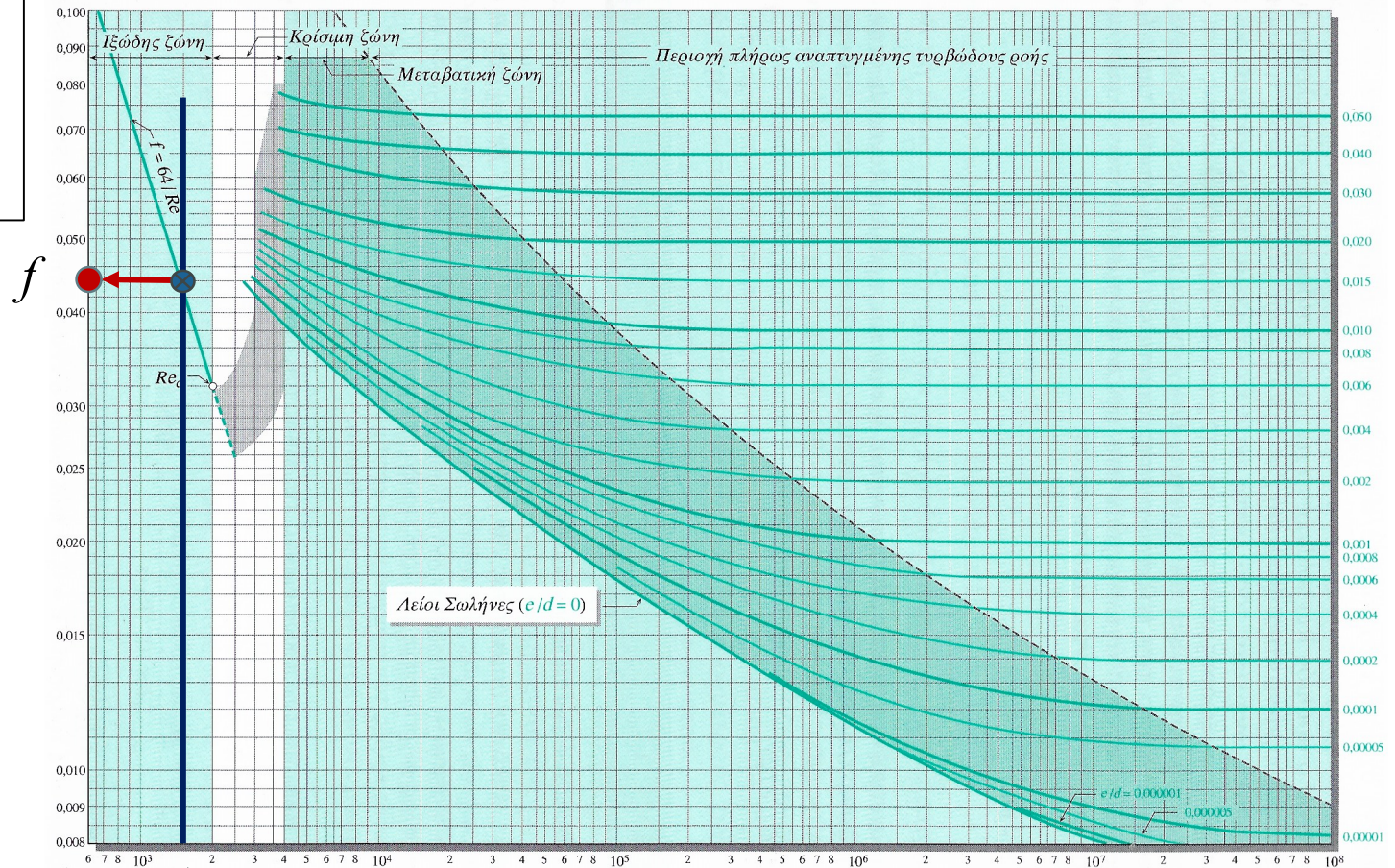


Χρήση διαγράμματος Moody – 1

Στρωτή ροή

$$Re_D = 1500$$

$$f = ?$$



$$Re_D = 1500$$

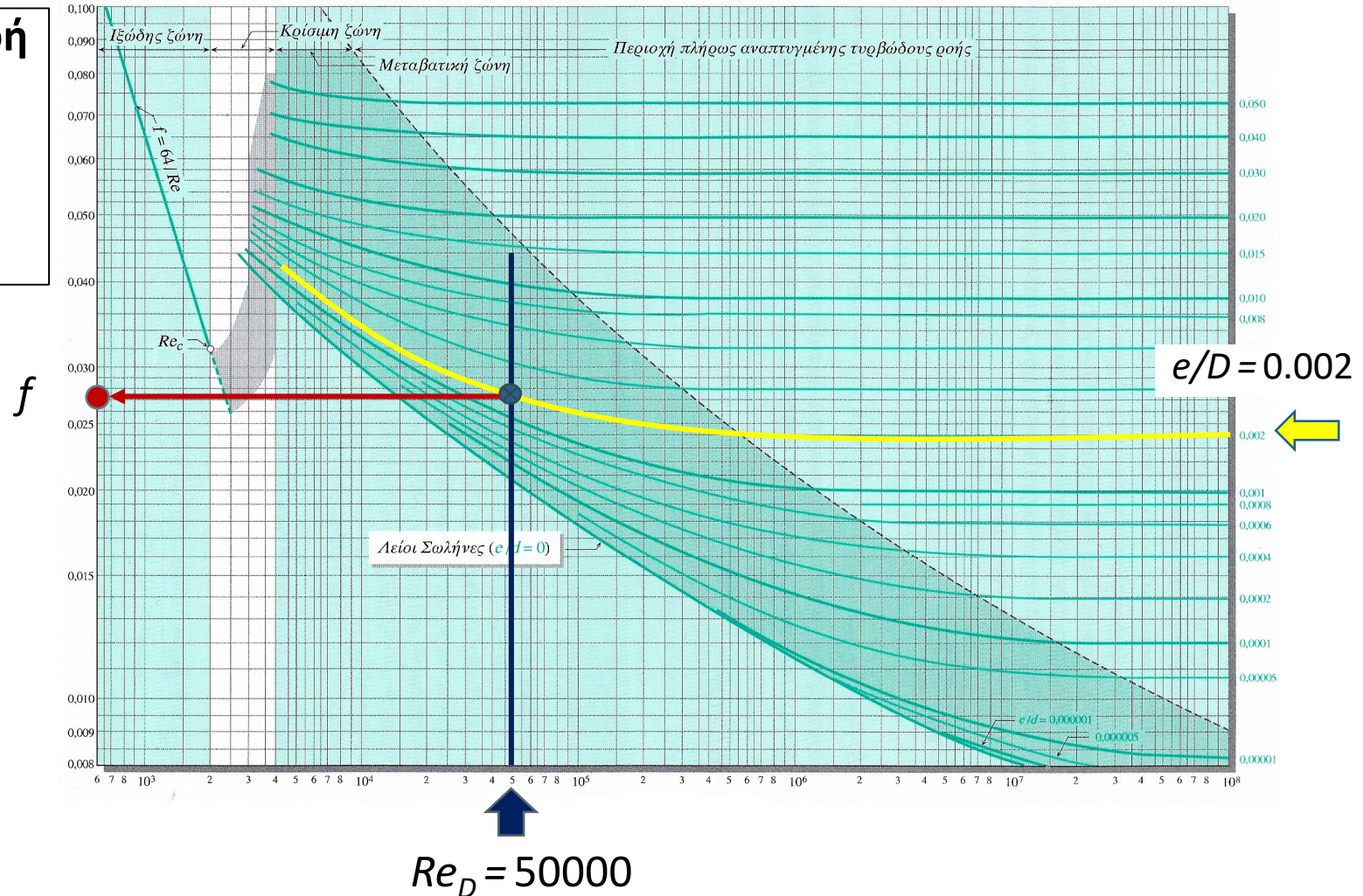
Χρήση διαγράμματος Moody – 2

Τυρβώδης ροή

$$Re_D = 50000$$

$$e/D = 0.002$$

$$f = ?$$



Αγωγοί μη κυκλικής διατομής

- Υδραυλική διάμετρος (αντί της διαμέτρου κυκλικού αγωγού $D_h \rightarrow D$)

$$D_h = \frac{4A}{S}$$

A: Εμβαδό βρεχόμενης επιφάνειας
S: Περίμετρος βρεχόμενης επιφάνειας

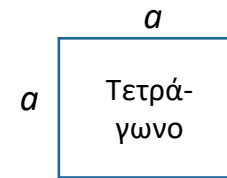


$$Re_D = \frac{\rho v D_h}{\mu}$$

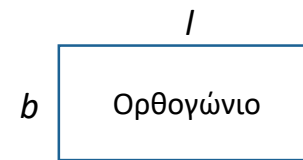
$$e_s = \frac{e}{D_h}$$

$$p_l = f \frac{l}{D_h} \frac{\rho v^2}{2}$$

Παράδειγμα



$$\left. \begin{array}{l} A = a^2 \\ S = 4a \end{array} \right\} D_h = a$$



$$\left. \begin{array}{l} A = bl \\ S = 2(b+l) \end{array} \right\} D_h = \frac{2bl}{b+l}$$

- Συντελεστής γραμμικών απωλειών

Στρωτή ροή

$$f = \frac{C}{Re_D}$$

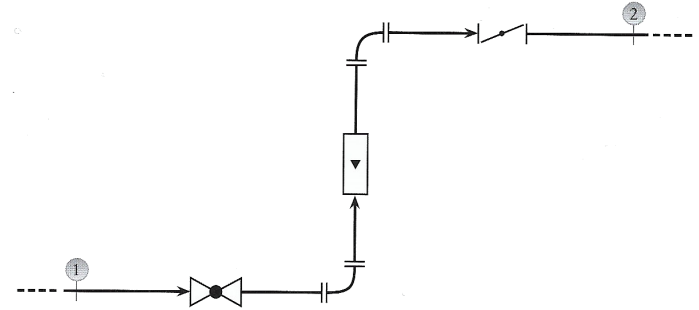
128	Ισόπλευρο τρίγωνο
57.2	Τετράγωνο
62	Ορθογώνιο $b/l = 1/2$
96	Ορθογώνιο $l \gg b$

Τυρβώδης ροή

Χρήση διαγράμματος Moody

Εξίσωση ενέργειας σε σωληνώσεις

Σύστημα **αγωγών** που ενώνονται σε σειρά με τη χρήση **εξαρτημάτων** όπου παρεμβάλλονται **συσκευές προσαγωγής/απαγωγής ενέργειας** (αντλίες, στρόβιλοι)



- Εξίσωση ενέργειας (τροποποιημένη εξίσωση Bernoulli)

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_{s,ΟΛΙΚΟ} + p_{l,ΟΛΙΚΟ}$$

$$\text{ή} \quad p_{t,1} = p_{t,2} + p_{s,ΟΛΙΚΟ} + p_{l,ΟΛΙΚΟ}$$

$$\text{Συνολικό αξονικό έργο: } p_{s,ΟΛΙΚΟ} = \sum p_s$$

Μηδενικό αν δεν παρεμβάλλονται αντλίες ή στρόβιλοι (απλές σωληνώσεις)

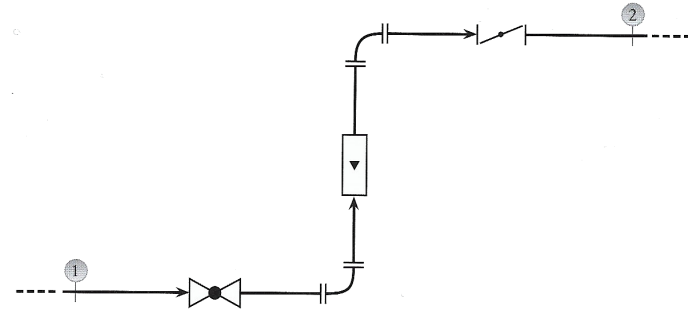
Γραμμικές και εντοπισμένες απώλειες

- Συνολικές απώλειες πίεσης

$$p_{I,ΟΛΙΚΟ} = \sum p_{I,Γ} + \sum p_{I,Ε}$$

↑
άθροιση για
όλους τους
αγωγούς

↑
άθροιση για
όλα τα
εξαρτήματα



$p_{I,Γ}$ (Γραμμικές ή κύριες απώλειες) + $p_{I,Ε}$ (Εντοπισμένες ή τοπικές απώλειες)

⇓
Απώλειες σε
αγωγούς

⇓
Απώλειες σε
εξαρτήματα

Εντοπισμένες αντιστάσεις

- Γραμμικές (ή κύριες) απώλειες

$$p_{l,\Gamma} = f \frac{l}{D_h} \frac{\rho u^2}{2}$$

- Εντοπισμένες (ή τοπικές) απώλειες

$$p_{l,E} = \zeta_E \frac{\rho u^2}{2}$$

ζ_E **Συντελεστής τοπικών απωλειών**

Υπολογίζεται πειραματικά και δίνεται από τον κατασκευαστή ως συνάρτηση του Re_D

- Συνολικές απώλειες σε σωλήνωση

$$p_{l,ΟΛΙΚΟ} = \sum \left(f \frac{l}{D_h} \frac{\rho u^2}{2} \right) + \sum \left(\zeta_E \frac{\rho u^2}{2} \right) \quad (= k \dot{V}^2)$$

Σχέσεις σε όρους ύψους

- Εξίσωση ενέργειας (τροποποιημένη εξίσωση Bernoulli)

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_{s,ΟΛΙΚΟ} + h_{l,ΟΛΙΚΟ}$$

- Συνολικές απώλειες ύψους

$$h_{l,ΟΛΙΚΟ} = \sum h_{l,\Gamma} + \sum h_{l,E}$$

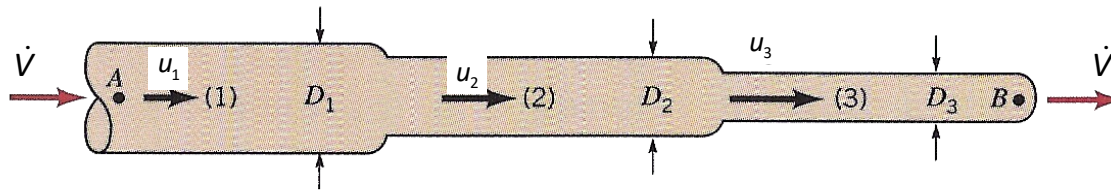
- Γραμμικές απώλειες ύψους

$$h_{l,\Gamma} = f \frac{l}{D_h} \frac{u^2}{2g}$$

- Εντοπισμένες απώλειες ύψους

$$h_{l,E} = \zeta_E \frac{u^2}{2g}$$

Σύνδεση αγωγών σε σειρά



1^{ος} Κανόνας

Ο ογκομετρικός ρυθμός παροχής είναι ίδιος σε όλους τους αγωγούς

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3 = \dot{V}$$

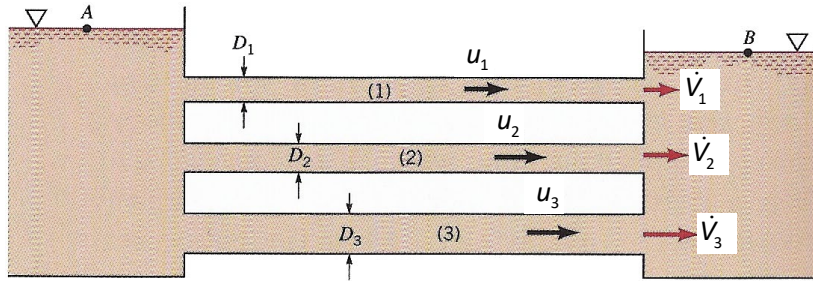
2^{ος} Κανόνας

Οι συνολικές απώλειες είναι ίσες με το άθροισμα των απωλειών σε κάθε αγωγό

$$p_{l,A \rightarrow B} = p_{l,1} + p_{l,2} + p_{l,3}$$

$$h_{l,A \rightarrow B} = h_{l,1} + h_{l,2} + h_{l,3}$$

Παράλληλη σύνδεση αγωγών



1^{ος} Κανόνας

Ο ολικός ογκομετρικός ρυθμός παροχής είναι ίσος με το άθροισμα του ρυθμού παροχής σε κάθε αγωγό

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

2^{ος} Κανόνας

Οι απώλειες είναι ίδιες σε κάθε αγωγό

$$p_{l,1} = p_{l,2} = p_{l,3}$$

$$h_{l,1} = h_{l,2} = h_{l,3}$$

Ρευστομηχανική

20^η Διάλεξη

Επαναληπτικές ασκήσεις στη
ροή σε σωληνώσεις

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

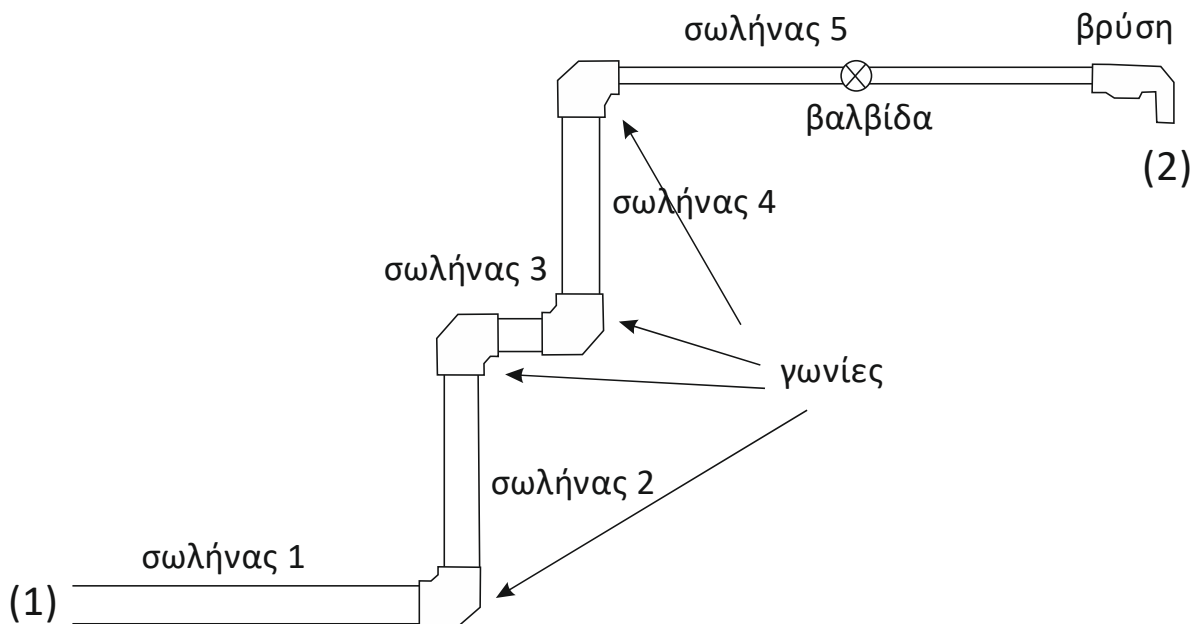
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Υπολογισμός πτώσης πίεσης σε σωλήνωση

Νερό διακινείται από το υπόγειο ενός κτηρίου προς τον 2^ο όροφο μέσα από το σύστημα χαλκοσωλήνων και εξαρτημάτων που φαίνεται στο σχήμα, με ρυθμό 2.5 m³/h. Στην έξοδο της διάταξης υπάρχει βρύση.

Να υπολογιστεί η πίεση (σχετική) στη θέση 1 αν:

- (α) Δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες.
- (β) Υπάρχουν μόνο κύριες απώλειες.
- (γ) Ληφθούν υπόψη όλες οι απώλειες.



Δεδομένα

Ογκομετρική παροχή νερού:

$$Q := 2.5 \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{hr}} = 0.00069 \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Διάμετρος χοντρών σωλήνων:

$$D_{\chi} := 2 \cdot \text{cm} = 0.02 \text{ m}$$

Διάμετρος λεπτού σωλήνα:

$$D_{\lambda} := 1.5 \cdot \text{cm} = 0.015 \text{ m}$$

Διάμετρος βρύσης:

$$D_{\beta} := 1.2 \cdot \text{cm} = 0.012 \text{ m}$$

Μήκος 1ου σωλήνα (χοντρός):

$$L_1 := 5 \cdot \text{m}$$

Μήκος 2ου σωλήνα (χοντρός):

$$L_2 := 3 \cdot \text{m}$$

Μήκος 3ου σωλήνα (χοντρός):

$$L_3 := 1 \cdot \text{m}$$

Μήκος 4ου σωλήνα (χοντρός):

$$L_4 := 3 \cdot \text{m}$$

Μήκος 5ου σωλήνα (λεπτός):

$$L_5 := 8 \cdot \text{m}$$

Τραχύτητα σωλήνων:

$$\varepsilon := 0.0015 \cdot \text{mm} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Πυκνότητα νερού:

$$\rho := 1000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ιξώδες νερού:

$$\mu := 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Επιτάχυνση βαρύτητας:

$$g := 9.81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Συντελεστής τοπικών απωλειών γωνίας:

$$\zeta_{\gamma\omega\nu} := 1.5$$

Συντελεστής τοπικών απωλειών βαλβίδας:

$$\zeta_{\beta\alpha\lambda} := 10$$

Συντελεστής τοπικών απωλειών βρύσης:

$$\zeta_{\beta\rho\sigma} := 2 \text{ (ως προς ανάντι ταχύτητα)}$$

Λύση

Εξίσωση ενέργειας (γενικευμένη εξίσωση Bernoulli) μεταξύ σημείων (1) και (2):

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{\rho \cdot u_1^2}{2} = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{\rho \cdot u_2^2}{2} + p_{l_ΟΛΙΚΟ}$$

Η πίεση στη θέση 2 είναι η ατμοσφαιρική ($p_2 = p_{\alpha\tau\mu}$). Επομένως η σχετική πίεση στη θέση 1 είναι:

$$p_{1_σ\chi} = p_1 - p_2 = \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) + \frac{\rho \cdot (u_2^2 - u_1^2)}{2} + p_{l_ΟΛΙΚΟ}$$

όπου:

$$z_1 := 0 \cdot \text{m}$$

$$z_2 := L_2 + L_4 = 6 \text{ m}$$

$$u_1 := \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_{\chi}^2}{4}} = 2.21 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_2 := \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_{\beta}^2}{4}} = 6.14 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(α) Χωρίς απώλειες ($p_{l_ΟΛΙΚΟ} := 0$)

$$p_{1_α} := \rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) + \frac{\rho \cdot (u_2^2 - u_1^2)}{2} = 75.3 \cdot \text{kPa}$$

(β) Μόνο γραμμικές απώλειες

$$p_{l_ΟΛΙΚΟ} = p_{l_Γ} = f_{\chi} \cdot \frac{L_{\chi}}{D_{\chi}} \cdot \frac{\rho \cdot u_{\chi}^2}{2} + f_{\lambda} \cdot \frac{L_{\lambda}}{D_{\lambda}} \cdot \frac{\rho \cdot u_{\lambda}^2}{2}$$

Για τους χοντρούς σωλήνες:

$$L_{\chi} := L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 12 \text{ m}$$

$$u_{\chi} := u_1 = 2.21 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Για τον λεπτό σωλήνα:

$$L_{\lambda} := L_5 = 8 \text{ m}$$

$$u_{\chi} := \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_{\chi}^2}{4}} = 3.93 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Υπολογισμός συντελεστών τριβής:

$$\text{Re}_{\chi} := \frac{\rho \cdot u_{\chi} \cdot D_{\chi}}{\mu} = 3.684 \times 10^4 \quad (\text{τυρβώδης ροή})$$

$$e_{s_{-\chi}} := \frac{\varepsilon}{D_{\chi}} = 0.000075 \quad (\text{σχετική τραχύτητα})$$

Από διάγραμμα Moody: $f_{\chi} := 0.0225$

και:

$$\text{Re}_{\lambda} := \frac{\rho \cdot u_{\lambda} \cdot D_{\lambda}}{\mu} = 4.912 \times 10^4 \quad (\text{τυρβώδης ροή})$$

$$e_{s_{-\lambda}} := \frac{\varepsilon}{D_{\lambda}} = 0.0001 \quad (\text{σχετική τραχύτητα})$$

Από διάγραμμα Moody: $f_{\lambda} := 0.0215$

Επομένως:

$$p_{l_{\Gamma}} := f_{\chi} \cdot \frac{L_{\chi}}{D_{\chi}} \cdot \frac{\rho \cdot u_{\chi}^2}{2} + f_{\lambda} \cdot \frac{L_{\lambda}}{D_{\lambda}} \cdot \frac{\rho \cdot u_{\lambda}^2}{2} = 121.5 \cdot \text{kPa}$$

και:

$$p_{1_{\beta}} := p_{1_{\alpha}} + p_{l_{\Gamma}} = 196.8 \cdot \text{kPa}$$

(γ) Γραμμικές και εντοπισμένες απώλειες

$$p_{l_{\text{ΟΛΙΚΟ}}} = p_{l_{\Gamma}} + p_{l_{\text{E}}}$$

όπου

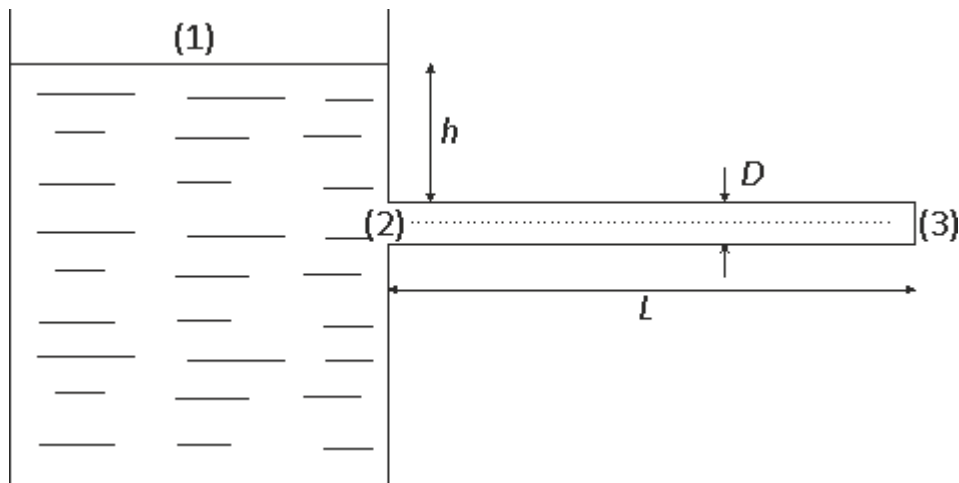
$$p_{l_{\text{E}}} := 4 \cdot \zeta_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\rho \cdot u_{\chi}^2}{2} + \zeta_{\beta\alpha\lambda} \cdot \frac{\rho \cdot u_{\lambda}^2}{2} + \zeta_{\beta\rho\sigma} \cdot \frac{\rho \cdot u_{\lambda}^2}{2} = 107.3 \cdot \text{kPa}$$

Επομένως:

$$p_{1_{\gamma}} := p_{1_{\beta}} + p_{l_{\text{E}}} = 304.1 \cdot \text{kPa}$$

Υπολογισμός παροχής σωλήνα

Ένας σωλήνας συνδέεται σε μια μεγάλη δεξαμενή πετρελαίου όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η ροή μέσα από τον σωλήνα είναι στρωτή, να υπολογιστεί ο ογκομετρικός ρυθμός ροής του πετρελαίου από τον σωλήνα.



Δεδομένα

Διάμετρος αγωγού:

$$D := 0.05 \cdot \text{m}$$

Μήκος αγωγού:

$$L := 2200 \cdot \text{m}$$

Βάθος αγωγού από την ελεύθερη επιφάνεια:

$$h := 1.5 \cdot \text{m}$$

Πυκνότητα πετρελαίου:

$$\rho := 900 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ιξώδες πετρελαίου

$$\mu := 5 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Επιτάχυνση βαρύτητας:

$$g := 9.81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Λύση

Εξίσωση ενέργειας (γενικευμένη εξίσωση Bernoulli) μεταξύ σημείων (2) και (3):

$$p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{\rho \cdot u_2^2}{2} = p_3 + \rho \cdot g \cdot z_3 + \frac{\rho \cdot u_3^2}{2} + p_{l_{2-3}}$$

όπου:

$$z_2 = z_3 = 0 \quad (\text{οριζόντιος σωλήνας})$$

$$u_2 = u_3 = u \quad (\text{σταθερή ταχύτητα στο σωλήνα λόγω διατήρησης μάζας})$$

$$p_3 = 0 \quad (\text{χρησιμοποιούνται σχετικές πιέσεις})$$

και:

$$p_{l_{2-3}} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot u^2}{2}$$

Η ροή θεωρείται στρωτή, άρα:

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64 \cdot \mu}{\rho \cdot u \cdot D} \quad \text{και} \quad p_{l_{2-3}} = \frac{64 \cdot \mu}{\rho \cdot u \cdot D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot u^2}{2} = \frac{32 \cdot u \cdot \mu \cdot L}{2 \cdot D^2}$$

Επομένως:

$$p_2 = p_{l_{2-3}} \quad \text{ή} \quad p_2 = \frac{32 \cdot u \cdot \mu \cdot L}{2 \cdot D^2} \quad (1)$$

Εξίσωση ενέργειας (γενικευμένη εξίσωση Bernoulli) μεταξύ σημείων (1) και (2):

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{\rho \cdot u_1^2}{2} = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{\rho \cdot u_2^2}{2} + p_{l_{1-2}}$$

όπου:

$$z_1 = h, \quad z_2 = 0$$

$$u_1 = 0 \quad (\text{ακίνητο ρευστό στη δεξαμενή})$$

$$u_2 = u$$

$$p_1 = 0 \quad (\text{χρησιμοποιούνται σχετικές πιέσεις})$$

$$p_{l_{1-2}} = 0 \quad (\text{ακίνητο ρευστό στη δεξαμενή})$$

Επομένως:

$$p_2 = \rho \cdot g \cdot h - \frac{\rho \cdot u^2}{2} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{32 \cdot u \cdot \mu \cdot L}{2 \cdot D^2} = g \cdot h - \frac{\rho \cdot u^2}{2}$$

ή

$$\frac{\rho}{2} \cdot u^2 + \frac{32 \cdot \mu \cdot L}{2 \cdot D^2} \cdot u - \rho \cdot g \cdot h = 0 \Rightarrow 450 \cdot u^2 + 70400 \cdot u - 13243.5 = 0$$

Η παραπάνω έχει τη θετική ρίζα:

$$u := \frac{-70400 + \sqrt{70400^2 - 4 \cdot 450 \cdot (-13243.5)}}{2 \cdot 450} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.188 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ο ογκομετρικός ρυθμός παροχής είναι:

$$Q := u \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} \right) = 3.689 \times 10^{-4} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

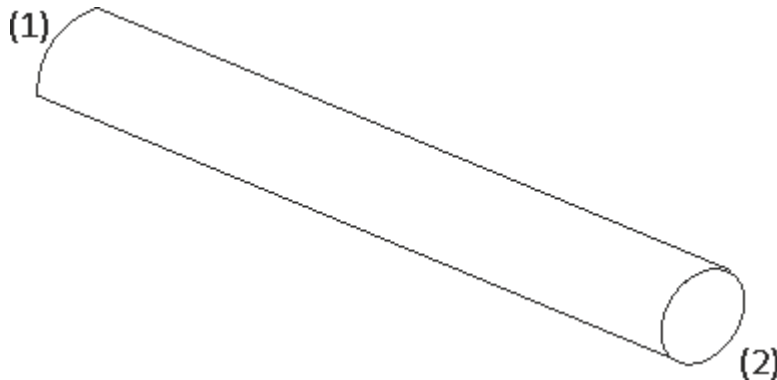
Επαλήθευση για στρωτή ροή: $Re := \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = 1691$

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Υπολογισμός διαμέτρου

Πετρέλαιο μεταφέρεται από τον αγωγό του σχήματος. Η πίεση στο σημείο 1 είναι 2500 kPa ενώ στο σημείο 2 το πετρέλαιο ρέει σε δεξαμενή. να βρεθεί η απαιτούμενη διάμετρος του αγωγού ώστε ο ρυθμός παροχής να είναι ίσος με 0.1 m³/s



Δεδομένα

Μήκος αγωγού:

$$L := 965.5 \cdot \text{m}$$

Υψόμετρο στη θέση (1):

$$z_1 := 82.65 \cdot \text{m}$$

Υψόμετρο στη θέση (2):

$$z_2 := 66.66 \cdot \text{m}$$

Τραχύτητα αγωγού:

$$\varepsilon := 0.5 \cdot \text{mm} = 5 \times 10^{-4} \cdot \text{m}$$

Πίεση στη θέση (1):

$$p_1 := 2500 \cdot \text{kPa} = 2.5 \times 10^6 \cdot \text{Pa}$$

Ογκομετρικός ρυθμός παροχής:

$$Q := 0.1 \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Πυκνότητα:

$$\rho := 900 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ιξώδες:

$$\mu := 9 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Επιτάχυνση βαρύτητας:

$$g := 9.81 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Λύση

Εξίσωση ενέργειας (γενικευμένη εξίσωση Bernoulli) σε όρους ύψους μεταξύ σημείων (1) και (2):

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2 \cdot g} + h_l$$

όπου:

$$p_2 = 0 \quad (\text{χρησιμοποιούνται σχετικές πιέσεις})$$

$$u_1 = u_2 = u \quad (\text{σταθερή ταχύτητα στο σωλήνα λόγω διατήρησης μάζας})$$

$$\text{με } u = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}$$

επομένως:

$$h_l := z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = 299.15 \text{ m}$$

Οι γραμμικές απώλειες δίνονται από:

$$h_l = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{u^2}{2 \cdot g} = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\left(\frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \right)^2}{2 \cdot g} = f \cdot \frac{8 \cdot L \cdot Q^2}{g \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{D^5} \quad (1)$$

όπου ο συντελεστής τριβών είναι συνάρτηση των:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{\rho \cdot \left(\frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \right) \cdot D}{\mu} \quad (2)$$

$$e_s = \frac{\varepsilon}{D} \quad (3)$$

Έχουμε 4 εξισώσεις (1, 2, 3 και το διάγραμμα Moody) και 4 αγνώστους (f , D , Re , e_s).

Επαναληπτική επίλυση

Αρχική εκτίμηση

$$f := 0.02$$

Υπολογισμοί

$$\text{από (1)} \Rightarrow D := \sqrt[5]{\frac{f \cdot \frac{8 \cdot L \cdot Q^2}{g \cdot \pi^2}}{h_l}} = 0.14 \text{ m}$$

$$\text{από (2)} \Rightarrow Re := \frac{\rho \cdot \left(\frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} \right) \cdot D}{\mu} = 91098$$

$$\text{από (3)} \Rightarrow e_s := \frac{\varepsilon}{D} = 0.00358$$

$$\text{Από Moody} \Rightarrow f_{\text{new}} := 0.028$$

Η νέα τιμή του f (f_{new}) δε συμπίπτει με την αρχική εκτίμηση.

Οι υπολογισμοί των σχέσεων (1) έως (3) επαναλαμβάνονται με τη νέα τιμή ως αρχική εκτίμηση μέχρι να προκύψει $f_{\text{new}} = f$.

Ρευστομηχανική

21^η Διάλεξη

Επαναληπτικά θέματα και ασκήσεις Α

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

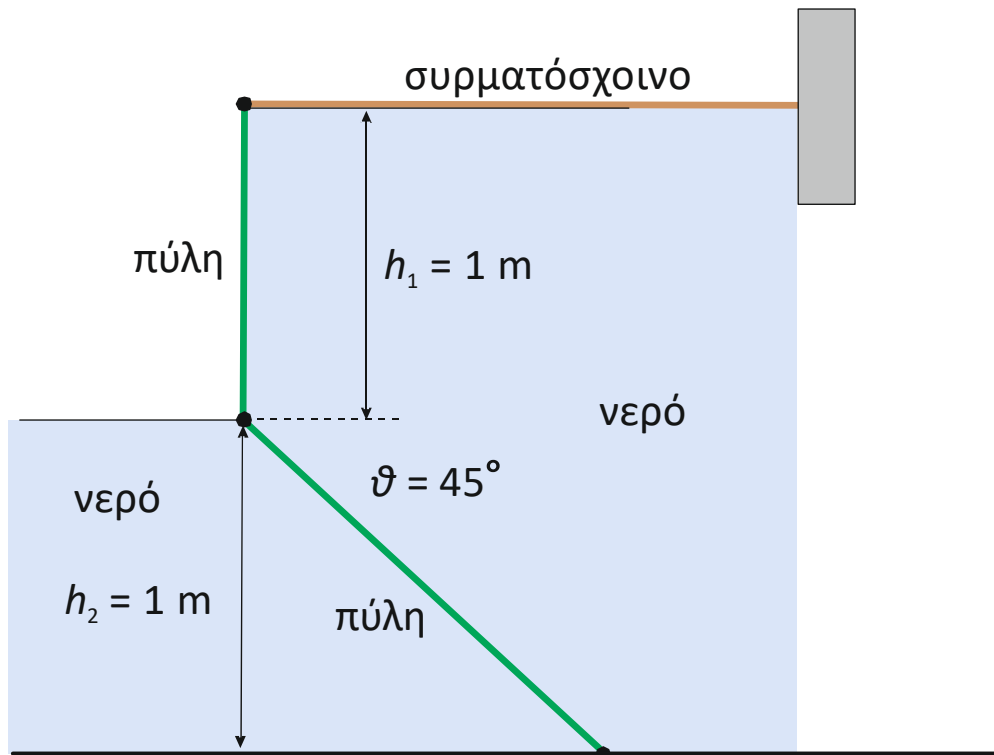
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Υπολογισμός δύναμης σε πύλη ξεξαμενής

Η ορθογωνική πύλη της δεξαμενής του σχήματος έχει πλάτος 1 m (κάθετα στο επίπεδο του σχήματος) και συγκρατείται στη θέση της με τη βοήθεια οριζώντιου συρματοσχοίνου. Αριστερά της πύλης υπάρχει νερό ύψους 1 m (από τη βάση της δεξαμενής), ενώ στα δεξιά της πύλης το νερό έχει ύψος 2 m

Να υπολογιστούν:

- (α) Τα μέτρα και τα σημεία εφαρμογής όλων των υδροστατικών δυνάμεων σε κάθε επίπεδο τμήμα της πύλης.
- (β) Η δύναμη που ασκείται στο συρματοσχοίνο αν αμεληθεί το βάρος της πύλης.



Δεδομένα

Πλάτος πύλης:

$$w := 1 \cdot \text{m}$$

Ύψος 1 νερού:

$$h_1 := 1 \text{ m}$$

Ύψος 2 νερού:

$$h_2 := 1 \cdot \text{m}$$

Γωνία πύλης:

$$\theta := 45^\circ$$

Ειδικό βάρος νερού:

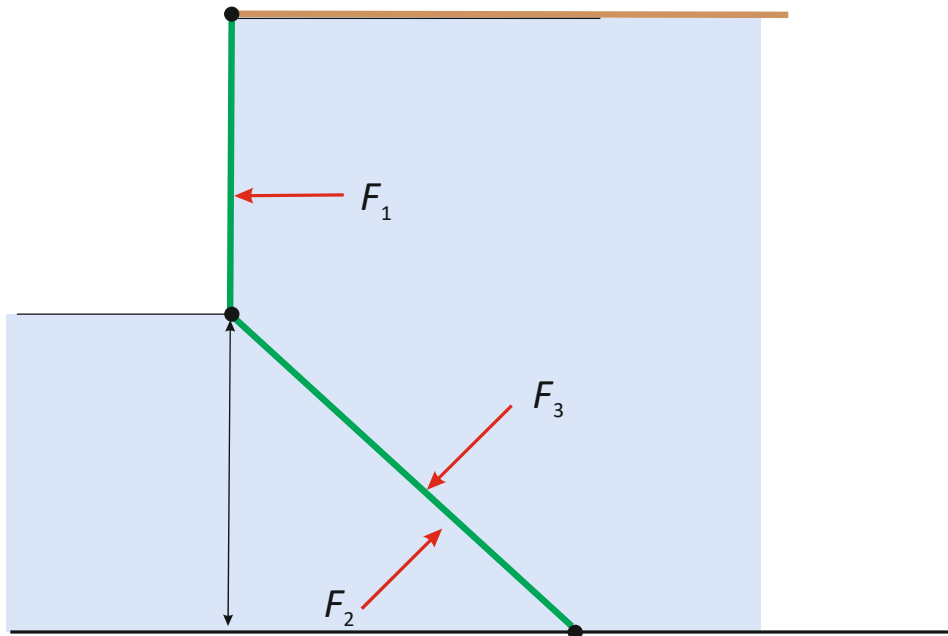
$$\gamma := 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Λύση

Οι υδροστατικές δυνάμεις που ασκούνται στην πύλη είναι:

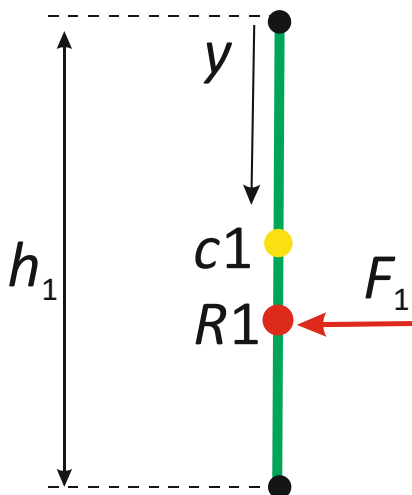
- F_1 : Δύναμη που ασκείται στο πάνω τμήμα της πύλης από το νερό που βρίσκεται δεξιά της πύλης.
 F_2 : Δύναμη που ασκείται στο κάτω τμήμα της πύλης από το νερό που βρίσκεται αριστερά της πύλης.
 F_3 : Δύναμη που ασκείται στο κάτω τμήμα της πύλης από το νερό που βρίσκεται δεξιά της πύλης.

Όλες οι δυνάμεις είναι κάθετες στις αντίστοιχες επιφάνειες με φορά προς τις επιφάνειες.



Υπολογισμός F_1

1ος Τρόπος



Το μέτρο της F_1 είναι ίσο με την πίεση που ασκείται στο κέντρο βάρους της επιφάνειας επί το εμβαδόν αυτής:

$$F_1 = \gamma \cdot h_{c1} \cdot A_1$$

όπου:

$$h_{c1} := \frac{h_1}{2} = 0.5 \text{ m}$$

$$A_1 := h_1 \cdot w = 1 \text{ m}^2$$

επομένως:

$$F_1 := \gamma \cdot h_{c1} \cdot A_1 = 4900 \cdot \text{N}$$

Το σημείο εφαρμογής της F_1 , ως απόσταση από την πάνω πλευρά της επιφάνειας (y), δίνεται από:

$$y_{R1} = y_{c1} + \frac{I_{xc1}}{y_{c1} \cdot A_1}$$

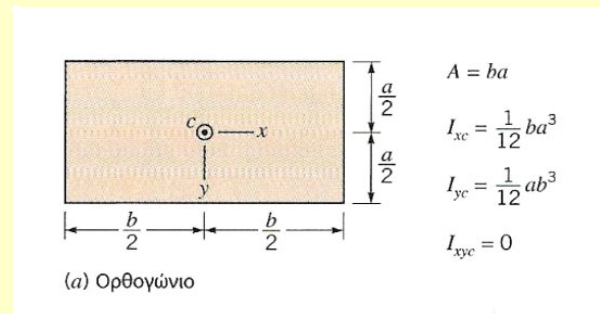
όπου:

$$y_{c1} := \frac{h_1}{2} = 0.5 \text{ m} \quad (\text{κατακόρυφη επιφάνεια})$$

$$I_{xc1} := \frac{1}{12} \cdot w \cdot h_1^3 = 0.083 \text{ m}^4 \quad (\text{βλ. Σχήμα με } a = h_1 \text{ και } b = w)$$

επομένως:

$$y_{R1} := y_{c1} + \frac{I_{xc1}}{y_{c1} \cdot A_1} = 0.667 \text{ m}$$

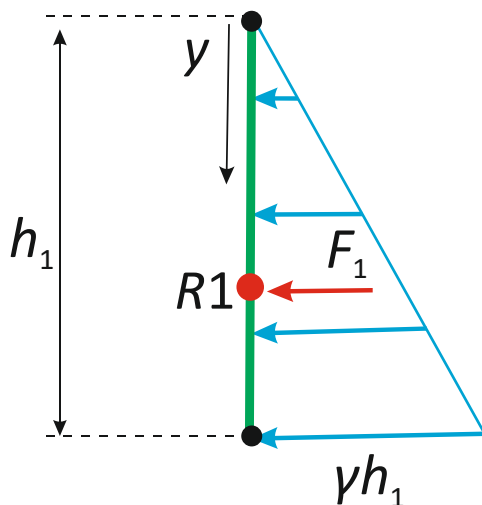


2ος Τρόπος (πρίσμα πίεσης)

Σχεδιάζεται το πρίσμα πίεσης στην κατακόρυφη επιφάνεια:

- Στην κορυφή της επιφάνειας η πίεση είναι μηδενική.
- Στον πυθμένα η πίεση είναι $\gamma \cdot h_1$.

Επομένως, το πρίσμα πίεσης έχει τριγωνική διατομή με βάση $\gamma \cdot h_1$, ύψος h_1 και πλάτος w .



Το μέτρο της F_1 είναι ίσο με τον όγκο του πρίσματος:

$$F_1 := \frac{1}{2}(\gamma \cdot h_1) \cdot (h_1 \cdot w) = 4900 \cdot \text{N}$$

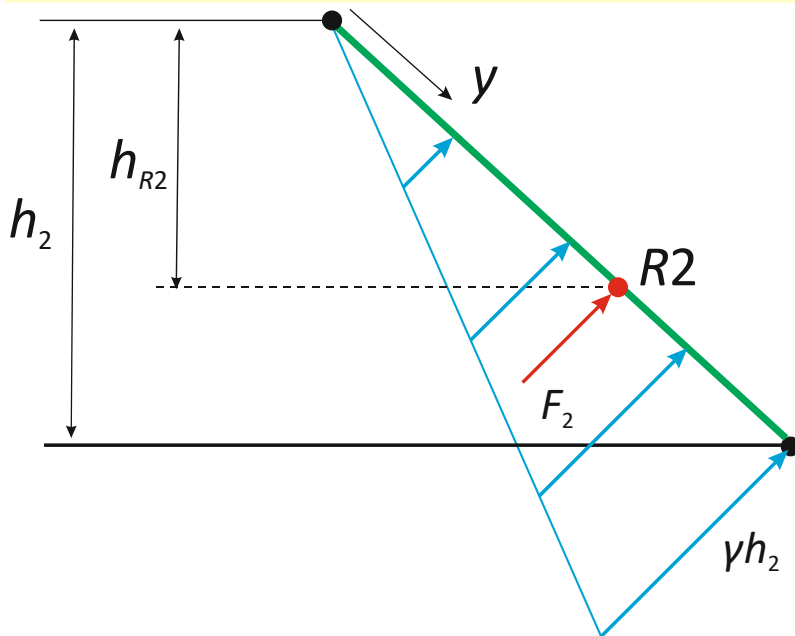
Το σημείο εφαρμογής της F_1 είναι το βαρύκεντρο του πρίσματος. Επομένως, η απόσταση από την πάνω πλευρά της επιφάνειας, δίνεται από:

$$y_{R1} := \frac{2 \cdot h_1}{3} = 0.667 \text{ m}$$

Υπολογισμός F_2

Η F_2 υπολογίζεται με το ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την τεχνική του πρίσματος πίεσης, σε κεκλιμένη επιφάνεια, μήκους:

$$L_2 := \frac{h_2}{\sin(\theta)} = 1.414 \text{ m}$$



- Στην κορυφή της επιφάνειας η πίεση είναι μηδενική.
- Στον πυθμένα η πίεση είναι $\gamma \cdot h_2$ (προσέξτε ότι χρησιμοποιείται το βάθος h).

Το μέτρο της F_2 είναι ίσο με τον όγκο του πρίσματος:

$$F_2 := \frac{1}{2}(\gamma \cdot h_2) \cdot (L_2 \cdot w) = 6930 \cdot \text{N}$$

Το σημείο εφαρμογής της F_2 είναι το βαρύκεντρο του πρίσματος. Επομένως, η απόσταση από την πάνω πλευρά της επιφάνειας, δίνεται από:

$$y_{R2} := \frac{2 \cdot L_2}{3} = 0.943 \text{ m}$$

και το βάθος (κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια) του σημείου εφαρμογής είναι:

$$h_{R2} := y_{R2} \cdot \sin(\theta) = 0.667 \text{ m}$$

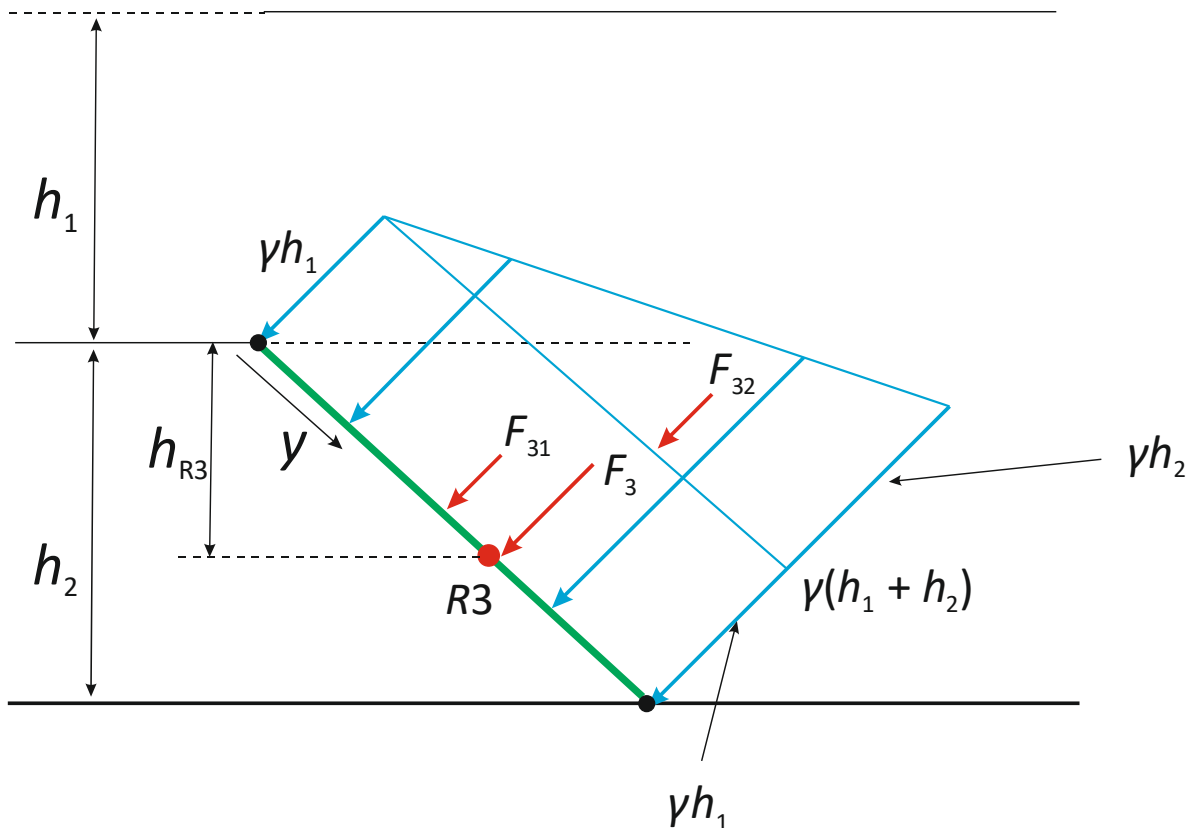
Υπολογισμός F_3

Για τον υπολογισμό της F_3 χρησιμοποιείται η τεχνική του πρίσματος πίεσης, σε βυθισμένη επιφάνεια.

- Στην κορυφή της επιφάνειας η πίεση είναι $\gamma \cdot h_1$.
- Στον πυθμένα η πίεση είναι $\gamma \cdot (h_1 + h_2)$.

Επομένως, το πρίσμα πίεσης αποτελείται από δύο τμήματα:

1. Ένα ορθογωνικής διατομής με βάση $\gamma \cdot h_1$, ύψος L_2 και πλάτος w
2. Ένα τριγωνικής διατομής με βάση $\gamma \cdot h_2$, ύψος L_2 και πλάτος w



Οι δύο επιμέρους δυνάμεις (των δύο τμημάτων) υπολογίζονται από τον όγκο των πρισμάτων:

$$F_{31} := (\gamma \cdot h_1) \cdot (L_2 \cdot w) = 13859 \cdot \text{N}$$

$$F_{32} := \frac{1}{2}(\gamma \cdot h_2) \cdot (L_2 \cdot w) = 6930 \cdot \text{N}$$

Η δύναμη F_3 είναι η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων:

$$F_3 := F_{31} + F_{32} = 20789 \cdot \text{N}$$

Τα σημεία εφαρμογής των F_{31} και F_{32} είναι τα βαρύκεντρο των πρισμάτων. Επομένως, οι απόστασεις από την πάνω πλευρά της επιφάνειας, δίνονται από:

$$y_{R31} := \frac{L_2}{2} = 0.707 \text{ m} \quad (\text{ορθογωνικής διατομής})$$

$$y_{R32} := \frac{2 \cdot L_2}{3} = 0.943 \text{ m} \quad (\text{τριγωνικής διατομής})$$

Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης F_3 υπολογίζεται από το άθροισμα των ροπών.
Άθροισμα ροπών ως προς το πάνω σημείο της επιφάνειας:

$$F_3 \cdot y_{R3} = F_{31} \cdot y_{R31} + F_{32} \cdot y_{R32}$$

επομένως:

$$y_{R3} := \frac{F_{31} \cdot y_{R31} + F_{32} \cdot y_{R32}}{F_3} = 0.786 \text{ m}$$

και το βάθος (κατακόρυφη απόσταση από το πάνω σημείο της επιφάνειας) του σημείου εφαρμογής είναι:

$$h_{R3} := y_{R3} \cdot \sin(\theta) = 0.556 \text{ m}$$

Υπολογισμός Δύναμης στο Συρματόσχοινο

Υπολογίζεται εφαρμόζοντας την ισορροπία ροπών ως προς το κάτω σημείο της πύλης:



ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

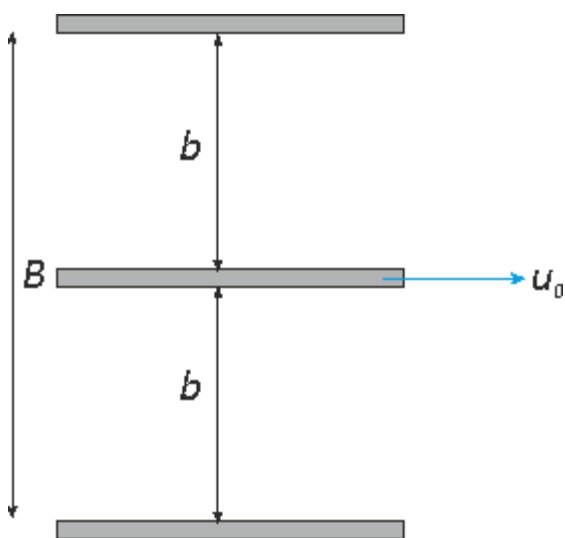
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Τρεις πλάκες

Στο χώρο μεταξύ δύο ακίνητων οριζόντιων πλακών περιέχεται ένα νευτωνικό ρευστό το οποίο έχει ιξώδες $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Η απόσταση ανάμεσα στις δύο πλάκες είναι $B = 10 \text{ cm}$. Στο μέσο της απόστασης των δύο πλακών τοποθετείται, παράλληλα προς αυτές, μια τρίτη πλάκα αμελητέου πάχους, η οποία έχει εμβαδόν $A = 0.1 \text{ m}^2$. Να υπολογιστεί η δύναμη που πρέπει να ασκείται στην τρίτη πλάκα ώστε να κινείται παράλληλα προς το επίπεδό της με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 0.02 \text{ m/s}$.

Υπενθυμίζεται ότι η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού μεταξύ μιας ακίνητης οριζόντιας πλάκας και μιας οριζόντιας πλάκας που κινείται με ταχύτητα u_0 και βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση $y = b$ από την ακίνητη, δίνεται από τη σχέση:

$$v_x = u_0 \cdot \frac{y}{b} \quad (1)$$



Δεδομένα

Ιξώδες ρευστού:

$$\mu := 1.5 \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Απόσταση ακίνητων πλακών:

$$B := 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

Απόσταση κινούμενης πλάκας από ακίνητες:

$$b := \frac{B}{2} = 0.05 \text{ m}$$

Εμβαδό πλάκας:

$$A := 0.1 \cdot \text{m}^2$$

Ταχύτητα πλάκας:

$$u_0 := 0.02 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Λύση

Η συνολική δύναμη που ασκείται στην κινούμενη πλάκα είναι το άθροισμα των διατμητικών δυνάμεων που ασκούνται από τις δύο περιοχές του ρευστού:

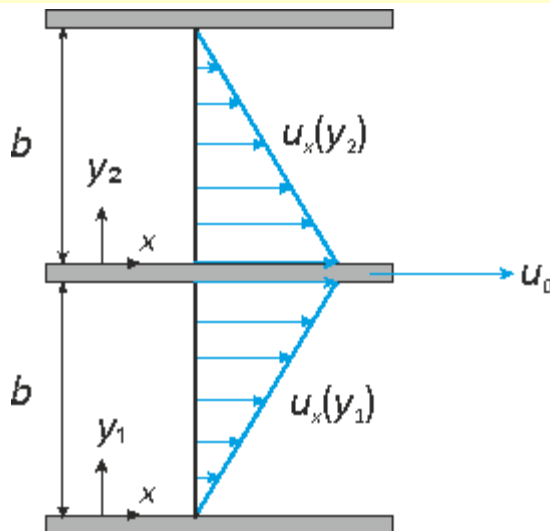
1: Περιοχή μεταξύ κάτω ακίνητης πλάκας και κινούμενης πλάκας

2: Περιοχή μεταξύ πάνω ακίνητης πλάκας και κινούμενης πλάκας

Η κατανομή της ταχύτητας είναι γραμμική σε κάθε μια από τις δύο περιοχές. Αν χρησιμοποιηθούν τα επιμέρους συστήματα συντεταγμένων του σχήματος, έχουμε:

$$v_x(y_1) = v_0 \cdot \frac{y_1}{b} \quad \text{από τη σχέση (1) για } y = y_1$$

$$v_x(y_2) = v_0 \cdot \frac{b - y_2}{b} \quad \text{από τη σχέση (1) για } y = b - y_2$$



Δύναμη από το ρευστό της περιοχής 1

Επειδή το ρευστό είναι νευτωνικό και η ροή μονοδιάστατη, η μόνη διατμητική τάση είναι η τ_{y1x} , η οποία δίνεται από τη σχέση του Newton:

$$\tau_{y1x} = \mu \cdot \frac{dv_x(y_1)}{dy_1}$$

και

$$\tau_{y1x} := \frac{\mu \cdot v_0}{b} = 0.6 \cdot \text{Pa}$$

σταθερή σε όλο το ύψος y_1 .

Η τάση τ_{y1x} έχει θετικό πρόσημο. Επομένως:

- Είναι προς τη θετική x-φορά όταν ασκείται σε θετική y_1 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.
- Είναι προς την αρνητική x-φορά όταν ασκείται σε αρνητική y_1 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.

Μας ενδιαφέρει η τάση που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια, η οποία είναι πάνω από το ρευστό. Επομένως η τάση έχει αρνητική φορά.

$$\tau_{w1} := -\tau_{y1x} = -0.6 \cdot \text{Pa}$$

και η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια είναι:

$$F_{w1} := \tau_{w1} \cdot A = -0.06 \cdot \text{N}$$

Δύναμη από το ρευστό της περιοχής 2

Με τον ίδιο τρόπο:

$$\tau_{y2x} = \mu \cdot \frac{dv_x(y_2)}{dy_2}$$

$$\tau_{y2x} := -\frac{\mu \cdot v_0}{b} = -0.6 \cdot \text{Pa}$$

Η τάση τ_{y2x} έχει αρνητικό πρόσημο. Επομένως:

- Είναι προς την αρνητική x-φορά όταν ασκείται σε θετική y_2 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.
- Είναι προς τη θετική x-φορά όταν ασκείται σε αρνητική y_2 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.

Μας ενδιαφέρει η τάση που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια, η οποία είναι κάτω από το ρευστό. Επομένως η τάση έχει αρνητική φορά.

$$\tau_{w2} := \tau_{y2x} = -0.6 \cdot \text{Pa}$$

και η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια είναι:

$$F_{w2} := \tau_{w2} \cdot A = -0.06 \cdot \text{N}$$

Συνολική δύναμη

$$F_w := F_{w1} + F_{w2} = -0.12 \cdot \text{N}$$

Αυτή είναι η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στην πλάκα όταν αυτή κινείται με ταχύτητα v_0 . Επομένως, για να μπορεί να κινηθεί η πλάκα πρέπει να εφαρμοστεί μια δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς:

$$F := -F_w = 0.12 \cdot \text{N}$$

Ρευστομηχανική

22^η Διάλεξη

Επαναληπτικά θέματα και ασκήσεις Β

Γεώργιος Αραμπατζής

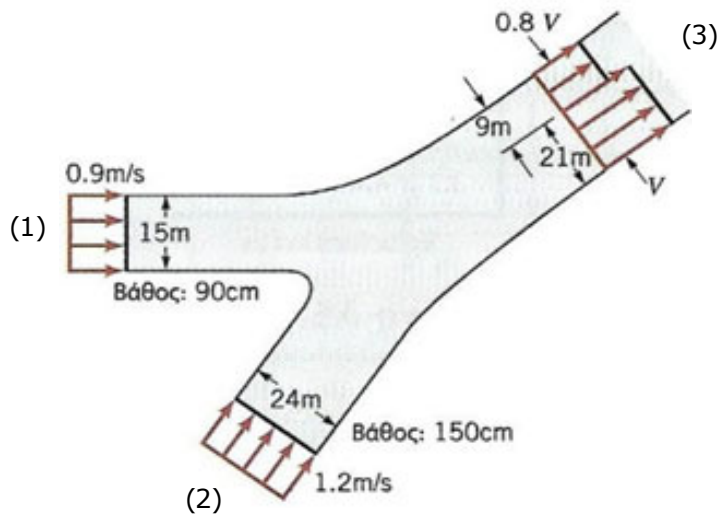
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Παραπόταμοι

Δύο παραπόταμοι ενώνονται σε έναν μεγαλύτερο ποταμό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε ένα σημείο κατάντι της ένωσης, και πριν τα ρεύματα «αναμειχθούν» πλήρως, το προφίλ της ταχύτητας είναι μη-ομοιόμορφο, όπως φαίνεται στο σχήμα και το βάθος εκεί είναι 180 cm. Να υπολογιστεί η τιμή του V



Δεδομένα

Ταχύτητα στον παραπόταμο 1:

$$v_1 := 0.9 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Πλάτος παραπόταμου 1:

$$w_1 := 15 \cdot \text{m}$$

Βάθος παραπόταμου 1:

$$h_1 := 90 \cdot \text{cm} = 0.9 \cdot \text{m}$$

Ταχύτητα στον παραπόταμο 2:

$$v_2 := 1.2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Πλάτος παραπόταμου 2:

$$w_2 := 24 \cdot \text{m}$$

Βάθος παραπόταμου 2:

$$h_2 := 150 \cdot \text{cm} = 1.5 \cdot \text{m}$$

Ταχύτητα στον ποταμό:

$$v_{3_1} = V \quad \text{για} \quad w_{3_1} := 21 \cdot \text{m}$$

$$v_{3_2} = 0.8 \cdot V \quad \text{για} \quad w_{3_2} := 9 \cdot \text{m}$$

Βάθος ποταμού:

$$h_3 := 180 \cdot \text{cm} = 1.8 \cdot \text{m}$$

Λύση

Εφαρμόζεται η μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας στον όγκο ελέγχου που περιλαμβάνει τους παραποτάμους και τον ποταμό. Το νερό θεωρείται ασυμπίεστο, οπότε η εξίσωση συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{in} Q_{in} = \sum_{out} Q_{out}$$

Είσοδο νερού στον ΟΕ έχουμε στις θέσεις 1 και 2 και έξοδο στη θέση 3. Επομένως:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

ή

$$v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2 = v_3 \cdot A_3$$

όπου v_3 είναι η μέση ταχύτητα στη διατομή:

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{A_3} \cdot \int_{A_3} v_3 \, dA = \frac{1}{A_3} \cdot \left(\int_{A_{3_1}} v_{3_1} \, dA + \int_{A_{3_2}} v_{3_2} \, dA \right) = \frac{1}{A_3} \cdot (v_{3_1} \cdot A_{3_1} + v_{3_2} \cdot A_{3_2}) \\ v_3 &= \frac{1}{A_3} \cdot (v_{3_1} \cdot A_{3_1} + v_{3_2} \cdot A_{3_2}) = \frac{1}{A_3} \cdot (V \cdot A_{3_1} + 0.8 \cdot V \cdot A_{3_2}) \\ v_3 &= \frac{A_{3_1} + 0.8 \cdot A_{3_2}}{A_3} \cdot V \end{aligned}$$

όπου:

$$A_1 := w_1 \cdot h_1 = 13.5 \text{ m}^2$$

$$A_2 := w_2 \cdot h_2 = 36 \text{ m}^2$$

$$A_{3_1} := w_{3_1} \cdot h_3 = 37.8 \text{ m}^2$$

$$A_{3_2} := w_{3_2} \cdot h_3 = 16.2 \text{ m}^2$$

$$A_3 := A_{3_1} + A_{3_2} = 54 \text{ m}^2$$

Επομένως:

$$v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2 = (A_{3_1} + 0.8 \cdot A_{3_2}) \cdot V$$

και

$$V := \frac{v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2}{A_{3_1} + 0.8 \cdot A_{3_2}} = 1.09 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

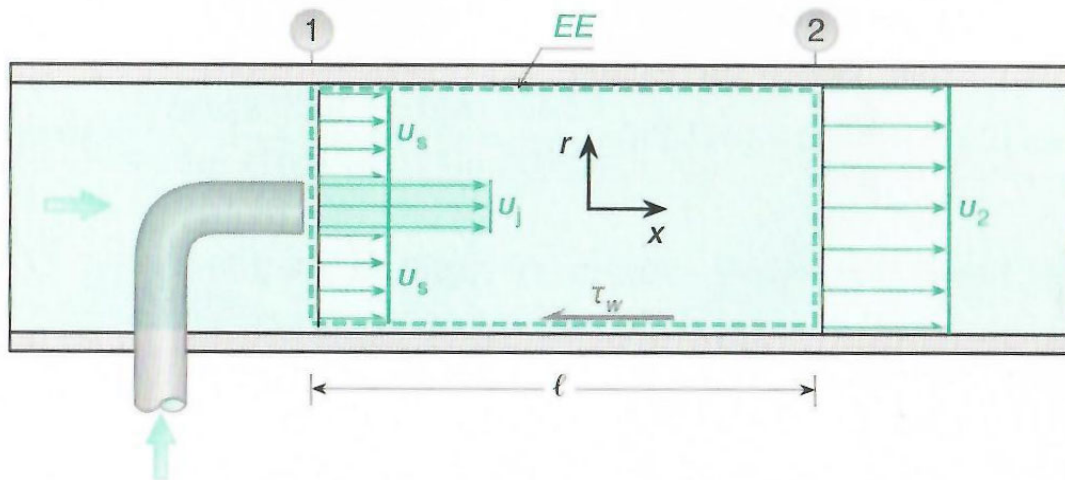
**ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Υδραντλία

Στο σχήμα εικονίζεται η αρχή λειτουργίας μιας υδραντλίας. Ο πίδακας νερού που εξέρχεται από τον μικρό αγωγό με ταχύτητα $u_j = 30 \text{ m/s}$ παρασύρει το κύριο ρεύμα νερού που ρέει μέσα στον μεγάλο αγωγό με ταχύτητα $u_s = 3 \text{ m/s}$. Τα δύο ρεύματα αναμειγνύονται πλήρως και σε απόσταση $l = 2.5 \text{ m}$ αποκτούν κοινή ταχύτητα u_2 . Ο μικρός αγωγός έχει διάμετρο $D_j = 0.1 \text{ m}$ και ο μεγάλος $D = 0.3 \text{ m}$. Η μέση διατμητική τάση που αναπτύσσεται στα τοιχώματα του αγωγού μεταξύ των διατομών 1 και 2 είναι $\tau_w = 131 \text{ Pa}$. Η ροή είναι μόνιμη και ασυμπίεστη.

- (α) Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του νερού στη διατομή 2 (u_2).
- (β) Αν η πίεση και των δύο ρευμάτων στη διατομή 1 είναι $p_1 = 120 \text{ kPa}$, πόση είναι η πίεση του ρεύματος στη διατομή 2 (p_2).



Δεδομένα

Ταχύτητα στον μικρό αγωγό:

$$u_j := 30 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ταχύτητα στον μεγάλο αγωγό στη διατομή 1:

$$u_s := 3 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Απόσταση μεταξύ 1 και 2:

$$l := 2.5 \cdot \text{m}$$

Διάμετρος μικρού αγωγού:

$$D_j := 0.1 \cdot \text{m}$$

Διάμετρος μεγάλου αγωγού:

$$D := 0.3 \cdot \text{m}$$

Διατμητική τάση στα τοιχώματα:

$$\tau_w := 131 \cdot \text{Pa}$$

Πίεση στη διατομή 1:

$$p_1 := 120 \cdot \text{kPa} = 120000 \cdot \text{Pa}$$

Πυκνότητα νερού:

$$\rho := 1000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Λύση

(α) Υπολογισμός ταχύτητας

Εφαρμόζεται η μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας στον όγκο ελέγχου που φαίνεται στο σχήμα:

$$\sum_{in} Q_{in} = \sum_{out} Q_{out}$$

ή

$$Q_s + Q_j = Q_2$$

ή

$$v_s \cdot A_s + v_j \cdot A_j = v_2 \cdot A_2$$

όπου:

$$A_j := \frac{\pi D_j^2}{4} = 0.008 \text{ m}^2$$

$$A_2 := \frac{\pi D^2}{4} = 0.071 \text{ m}^2$$

$$A_s := A_2 - A_j = 0.063 \text{ m}^2$$

Λύνοντας ως προς v_2 προκύπτει:

$$v_2 := \frac{v_s \cdot A_s + v_j \cdot A_j}{A_2} = 6 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(β) Υπολογισμός πίεσης

Για τον ίδιο όγκο ελέγχου εφαρμόζεται η x-συνιστώσα της μακροσκοπικής εξίσωσης ορμής:

$$F_x = \sum_{out} (m_{out} \cdot v_{out_x}) - \sum_{in} (m_{in} \cdot v_{in_x}) \quad (1)$$

όπου

$$\sum_{out} (m_{out} \cdot v_{out_x}) = (\rho \cdot v_2 \cdot A_2) \cdot v_2 = \rho \cdot v_2^2 \cdot A_2$$

$$\sum_{in} (m_{in} \cdot v_{in_x}) = (\rho \cdot v_j \cdot A_j) \cdot v_j + (\rho \cdot v_s \cdot A_s) \cdot v_s = \rho \cdot v_j^2 \cdot A_j + \rho \cdot v_s^2 \cdot A_s$$

και

$$F_x = F_{px} + F_\tau = (p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2) + (-\tau_w \cdot A_w)$$

με $A_w := \pi D \cdot l = 2.356 \text{ m}^2$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει:

$$p_1 \cdot A_2 - p_2 \cdot A_2 - \tau_w \cdot A_w = \rho \cdot v_2^2 \cdot A_2 - \rho \cdot v_j^2 \cdot A_j - \rho \cdot v_s^2 \cdot A_s$$

και επιλύοντας ως προς p_2 :

$$p_2 := \frac{p_1 \cdot A_2 - \tau_w \cdot A_w + \rho \cdot (v_j^2 \cdot A_j + v_s^2 \cdot A_s - v_2^2 \cdot A_2)}{A_2} = 187633.3 \cdot \text{Pa}$$

ή $p_2 = 187.6 \text{ kPa}$

**ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2019

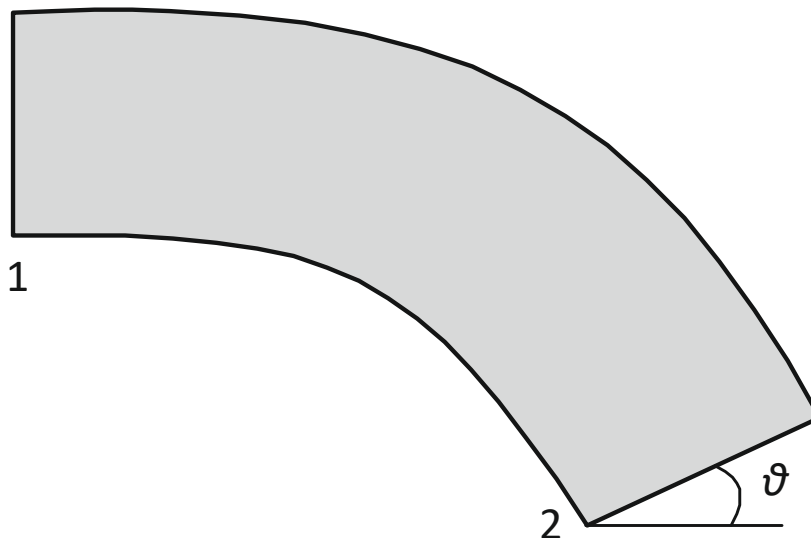
Άσκηση 2 - Ιούνιος 2019

Νερό (πυκνότητας $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$) εισέρχεται στον καμπύλο αγωγό του σχήματος από τη διατομή 1 με ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας και εξέρχεται στην ατμόσφαιρα από τη διατομή 2 επίσης με ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας. Η γωνία που σχηματίζει η διατομή 2 με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\theta=30^\circ$. Η διατομή 1 είναι κυκλική με διάμετρο $D_1=0.2 \text{ m}$ και η διατομή 2 είναι τετραγωνική με πλευρά $b_2=0.2 \text{ m}$. Στη διατομή 1 η ταχύτητα έχει μέτρο $u_1=3 \text{ m/s}$ και η σχετική πίεση είναι $p_{1,g}=5 \text{ kPa}$. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_a=100 \text{ kPa}$.

Να υπολογιστούν:

(α) Η ταχύτητα στην έξοδο του αγωγού (διατομή 2).

(β) Η δύναμη που ασκείται από το νερό στα τοιχώματα του αγωγού αν αμεληθεί το βάρος του νερού.



Δεδομένα

$$\theta := 30^\circ$$

$$D_1 := 0.2 \cdot \text{m}$$

$$b_2 := 0.2 \cdot \text{m}$$

$$u_1 := 3 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\rho := 1000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p_{1g} := 5000 \cdot \text{Pa}$$

$$p_a := 100000 \cdot \text{Pa}$$

Λύση

Ο όγκος ελέγχου περιλαμβάνει το ρευστό και δεν τέμνει τα τοιχώματα (επειδή το ζητούμενο είναι η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στα τοιχώματα):

(α) Ταχύτητα εξόδου

Ολοκληρωτική εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό:

$$V = u_1 \cdot A_1 = u_2 \cdot A_2 \quad A_1 := \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = 0.031 \text{ m}^2 \quad A_2 := b_2^2 = 0.04 \text{ m}^2$$

$$V := u_1 \cdot A_1 = 0.094 \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad u_2 := \frac{V}{A_2} = 2.36 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(β) Δύναμη που ασκείται στον αγωγό από το νερό

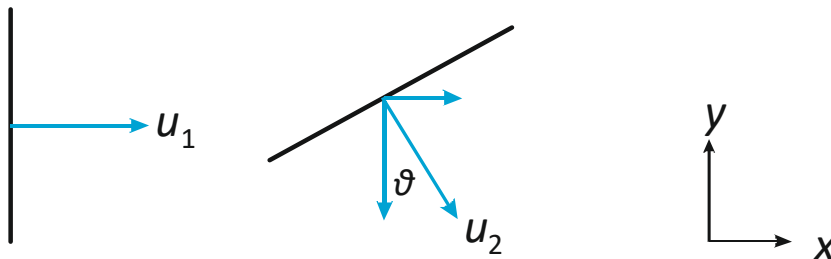
Ολοκληρωτική εξίσωση διατήρησης ορμής για όγκο ελέγχου :

$$F_x = \rho \cdot u_2 \cdot A_2 \cdot u_{2,x} - \rho \cdot u_1 \cdot A_1 \cdot u_{1,x} = M \cdot (u_{2,x} - u_{1,x})$$

$$F_y = \rho \cdot u_2 \cdot A_2 \cdot u_{2,y} - \rho \cdot u_1 \cdot A_1 \cdot u_{1,y} = M(u_{2,y} - u_{1,y})$$

$$\text{όπου} \quad M := \rho \cdot V = 94.248 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Ταχύτητες και συνιστώσες τους στις επιφάνειες:



$$u_{1,x} = u_1$$

$$u_{1,y} = 0$$

$$u_{2,x} = u_2 \sin(\vartheta)$$

$$u_{2,y} = -u_2 \cos(\vartheta)$$

$$u_{1x} := u_1 = 3 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

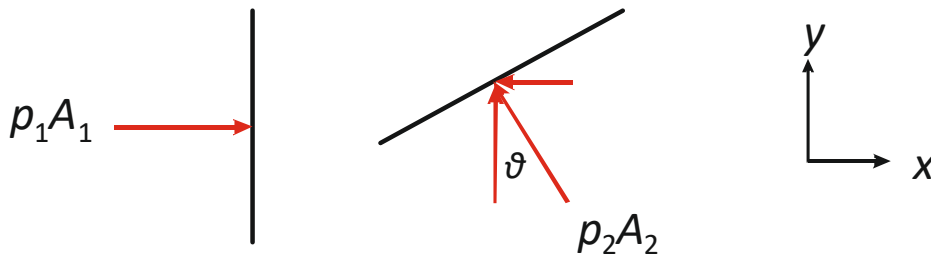
$$u_{1y} := 0$$

$$u_{2x} := u_2 \cdot \sin(\theta) = 1.18 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_{2y} := -u_2 \cdot \cos(\theta) = -2.04 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Δυνάμεις που ασκούνται στο νερό:

1. Δυνάμεις πίεσης στις διατομές εισόδου και εξόδου



$$F_{p,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \sin(\vartheta)$$

$$F_{p,y} = p_2 A_2 \cos(\vartheta)$$

$$p_1 := p_{1g} + p_a = 105000 \cdot \text{Pa}$$

$$p_2 := p_a = 100000 \cdot \text{Pa}$$

Πρέπει να χρησιμοποιηθούν απόλυτες πιέσεις (δεν συμπεριλαμβάνονται οι παράπλευρες επιφάνειες του ΟΕ):

$$F_{px} := p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot \sin(\theta) = 1.299 \times 10^3 \cdot \text{N}$$

$$F_{py} := p_2 \cdot A_2 \cdot \cos(\theta) = 3.464 \times 10^3 \cdot \text{N}$$

2. Δυνάμεις R_x και R_y που ασκούνται από τα τοιχώματα του αγωγού στο νερό.

Επομένως:

$$F_x = F_{px} + R_x = M \cdot (u_{2x} - u_{1x})$$

$$\text{και: } R_x := M \cdot (u_{2x} - u_{1x}) - F_{px} = -1470.4 \cdot \text{N}$$

$$F_y = F_{py} + R_y = M \cdot u_{2y}$$

$$\text{και: } R_y := M \cdot u_{2y} - F_{py} = -3656.4 \cdot \text{N}$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα του αγωγού (F_{wx} , F_{wy}) είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με τις R_x , R_y :

$$F_{wx} := -R_x = 1470.4 \cdot \text{N}$$

$$F_{wy} := -R_y = 3656.4 \cdot \text{N}$$

Η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο:

$$F_w := \sqrt{F_{wx}^2 + F_{wy}^2} = 3941 \cdot \text{N}$$

