

Ρευστομηχανική

22^η Διάλεξη

Επαναληπτικά θέματα και ασκήσεις Β

Γεώργιος Αραμπατζής

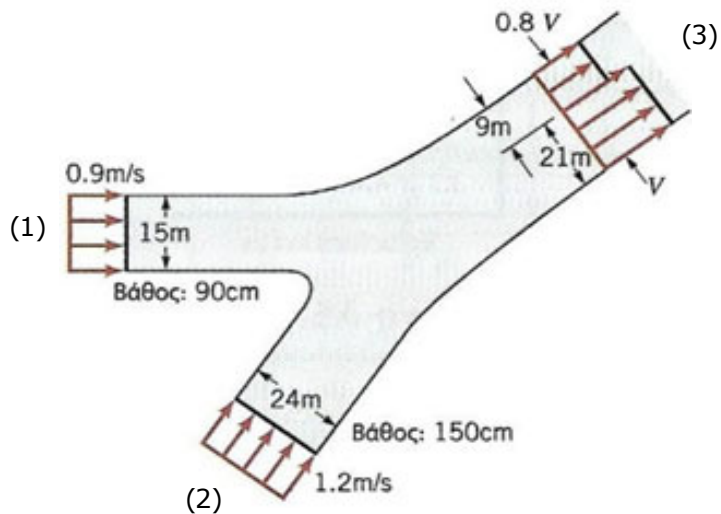
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Παραπόταμοι

Δύο παραπόταμοι ενώνονται σε έναν μεγαλύτερο ποταμό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε ένα σημείο κατάντι της ένωσης, και πριν τα ρεύματα «αναμειχθούν» πλήρως, το προφίλ της ταχύτητας είναι μη-ομοιόμορφο, όπως φαίνεται στο σχήμα και το βάθος εκεί είναι 180 cm. Να υπολογιστεί η τιμή του V



Δεδομένα

Ταχύτητα στον παραπόταμο 1:

$$v_1 := 0.9 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Πλάτος παραπόταμου 1:

$$w_1 := 15 \cdot \text{m}$$

Βάθος παραπόταμου 1:

$$h_1 := 90 \cdot \text{cm} = 0.9 \text{ m}$$

Ταχύτητα στον παραπόταμο 2:

$$v_2 := 1.2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Πλάτος παραπόταμου 2:

$$w_2 := 24 \cdot \text{m}$$

Βάθος παραπόταμου 2:

$$h_2 := 150 \cdot \text{cm} = 1.5 \text{ m}$$

Ταχύτητα στον ποταμό:

$$v_{3_1} = V \quad \text{για} \quad w_{3_1} := 21 \cdot \text{m}$$

$$v_{3_2} = 0.8 \cdot V \quad \text{για} \quad w_{3_2} := 9 \cdot \text{m}$$

Βάθος ποταμού:

$$h_3 := 180 \cdot \text{cm} = 1.8 \text{ m}$$

Λύση

Εφαρμόζεται η μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας στον όγκο ελέγχου που περιλαμβάνει τους παραποτάμους και τον ποταμό. Το νερό θεωρείται ασυμπίεστο, οπότε η εξίσωση συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{in} Q_{in} = \sum_{out} Q_{out}$$

Είσοδο νερού στον ΟΕ έχουμε στις θέσεις 1 και 2 και έξοδο στη θέση 3. Επομένως:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

ή

$$v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2 = v_3 \cdot A_3$$

όπου v_3 είναι η μέση ταχύτητα στη διατομή:

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{A_3} \cdot \int_{A_3} v_3 \, dA = \frac{1}{A_3} \cdot \left(\int_{A_{3_1}} v_{3_1} \, dA + \int_{A_{3_2}} v_{3_2} \, dA \right) = \frac{1}{A_3} \cdot (v_{3_1} \cdot A_{3_1} + v_{3_2} \cdot A_{3_2}) \\ v_3 &= \frac{1}{A_3} \cdot (v_{3_1} \cdot A_{3_1} + v_{3_2} \cdot A_{3_2}) = \frac{1}{A_3} \cdot (V \cdot A_{3_1} + 0.8 \cdot V \cdot A_{3_2}) \\ v_3 &= \frac{A_{3_1} + 0.8 \cdot A_{3_2}}{A_3} \cdot V \end{aligned}$$

όπου:

$$A_1 := w_1 \cdot h_1 = 13.5 \text{ m}^2$$

$$A_2 := w_2 \cdot h_2 = 36 \text{ m}^2$$

$$A_{3_1} := w_{3_1} \cdot h_3 = 37.8 \text{ m}^2$$

$$A_{3_2} := w_{3_2} \cdot h_3 = 16.2 \text{ m}^2$$

$$A_3 := A_{3_1} + A_{3_2} = 54 \text{ m}^2$$

Επομένως:

$$v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2 = (A_{3_1} + 0.8 \cdot A_{3_2}) \cdot V$$

και

$$V := \frac{v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2}{A_{3_1} + 0.8 \cdot A_{3_2}} = 1.09 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

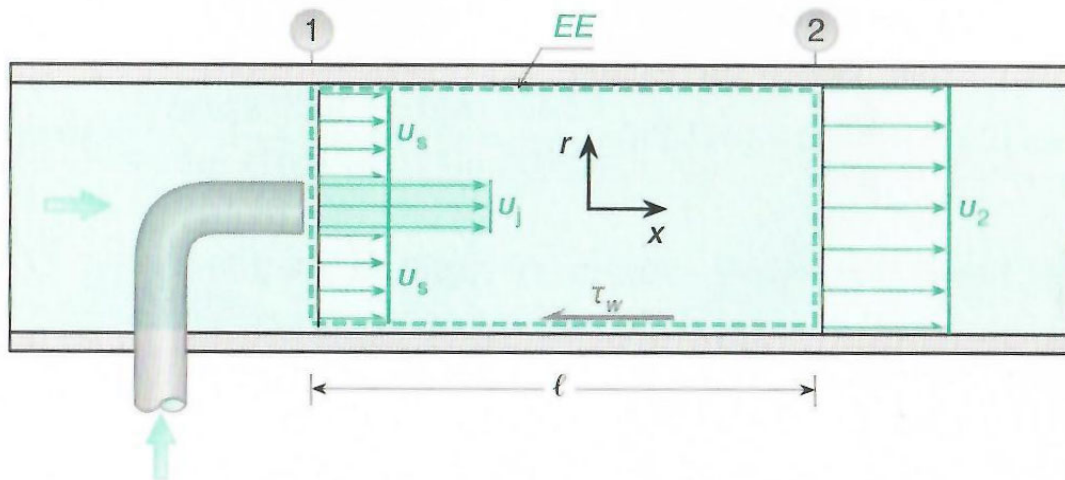
ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Υδραντλία

Στο σχήμα εικονίζεται η αρχή λειτουργίας μιας υδραντλίας. Ο πίδακας νερού που εξέρχεται από τον μικρό αγωγό με ταχύτητα $u_j = 30 \text{ m/s}$ παρασύρει το κύριο ρεύμα νερού που ρέει μέσα στον μεγάλο αγωγό με ταχύτητα $u_s = 3 \text{ m/s}$. Τα δύο ρεύματα αναμειγνύονται πλήρως και σε απόσταση $l = 2.5 \text{ m}$ αποκτούν κοινή ταχύτητα u_2 . Ο μικρός αγωγός έχει διάμετρο $D_j = 0.1 \text{ m}$ και ο μεγάλος $D = 0.3 \text{ m}$. Η μέση διατμητική τάση που αναπτύσσεται στα τοιχώματα του αγωγού μεταξύ των διατομών 1 και 2 είναι $\tau_w = 131 \text{ Pa}$. Η ροή είναι μόνιμη και ασυμπίεστη.

- (α) Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του νερού στη διατομή 2 (u_2).
- (β) Αν η πίεση και των δύο ρευμάτων στη διατομή 1 είναι $p_1 = 120 \text{ kPa}$, πόση είναι η πίεση του ρεύματος στη διατομή 2 (p_2).



Δεδομένα

Ταχύτητα στον μικρό αγωγό:

$$u_j := 30 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ταχύτητα στον μεγάλο αγωγό στη διατομή 1:

$$u_s := 3 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Απόσταση μεταξύ 1 και 2:

$$l := 2.5 \cdot \text{m}$$

Διάμετρος μικρού αγωγού:

$$D_j := 0.1 \cdot \text{m}$$

Διάμετρος μεγάλου αγωγού:

$$D := 0.3 \cdot \text{m}$$

Διατμητική τάση στα τοιχώματα:

$$\tau_w := 131 \cdot \text{Pa}$$

Πίεση στη διατομή 1:

$$p_1 := 120 \cdot \text{kPa} = 120000 \cdot \text{Pa}$$

Πυκνότητα νερού:

$$\rho := 1000 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Λύση

(α) Υπολογισμός ταχύτητας

Εφαρμόζεται η μακροσκοπική εξίσωση συνέχειας στον όγκο ελέγχου που φαίνεται στο σχήμα:

$$\sum_{in} Q_{in} = \sum_{out} Q_{out}$$

ή

$$Q_s + Q_j = Q_2$$

ή

$$v_s \cdot A_s + v_j \cdot A_j = v_2 \cdot A_2$$

όπου:

$$A_j := \frac{\pi D_j^2}{4} = 0.008 \text{ m}^2$$

$$A_2 := \frac{\pi D^2}{4} = 0.071 \text{ m}^2$$

$$A_s := A_2 - A_j = 0.063 \text{ m}^2$$

Λύνοντας ως προς v_2 προκύπτει:

$$v_2 := \frac{v_s \cdot A_s + v_j \cdot A_j}{A_2} = 6 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(β) Υπολογισμός πίεσης

Για τον ίδιο όγκο ελέγχου εφαρμόζεται η x-συνιστώσα της μακροσκοπικής εξίσωσης ορμής:

$$F_x = \sum_{out} (m_{out} \cdot v_{out_x}) - \sum_{in} (m_{in} \cdot v_{in_x}) \quad (1)$$

όπου

$$\sum_{out} (m_{out} \cdot v_{out_x}) = (\rho \cdot v_2 \cdot A_2) \cdot v_2 = \rho \cdot v_2^2 \cdot A_2$$

$$\sum_{in} (m_{in} \cdot v_{in_x}) = (\rho \cdot v_j \cdot A_j) \cdot v_j + (\rho \cdot v_s \cdot A_s) \cdot v_s = \rho \cdot v_j^2 \cdot A_j + \rho \cdot v_s^2 \cdot A_s$$

και

$$F_x = F_{px} + F_\tau = (p_1 \cdot A_1 - p_2 \cdot A_2) + (-\tau_w \cdot A_w)$$

με $A_w := \pi D \cdot l = 2.356 \text{ m}^2$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει:

$$p_1 \cdot A_2 - p_2 \cdot A_2 - \tau_w \cdot A_w = \rho \cdot v_2^2 \cdot A_2 - \rho \cdot v_j^2 \cdot A_j - \rho \cdot v_s^2 \cdot A_s$$

και επιλύοντας ως προς p_2 :

$$p_2 := \frac{p_1 \cdot A_2 - \tau_w \cdot A_w + \rho \cdot (v_j^2 \cdot A_j + v_s^2 \cdot A_s - v_2^2 \cdot A_2)}{A_2} = 187633.3 \cdot \text{Pa}$$

ή $p_2 = 187.6 \text{ kPa}$