

Ρευστομηχανική

21^η Διάλεξη

Επαναληπτικά θέματα και ασκήσεις Α

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

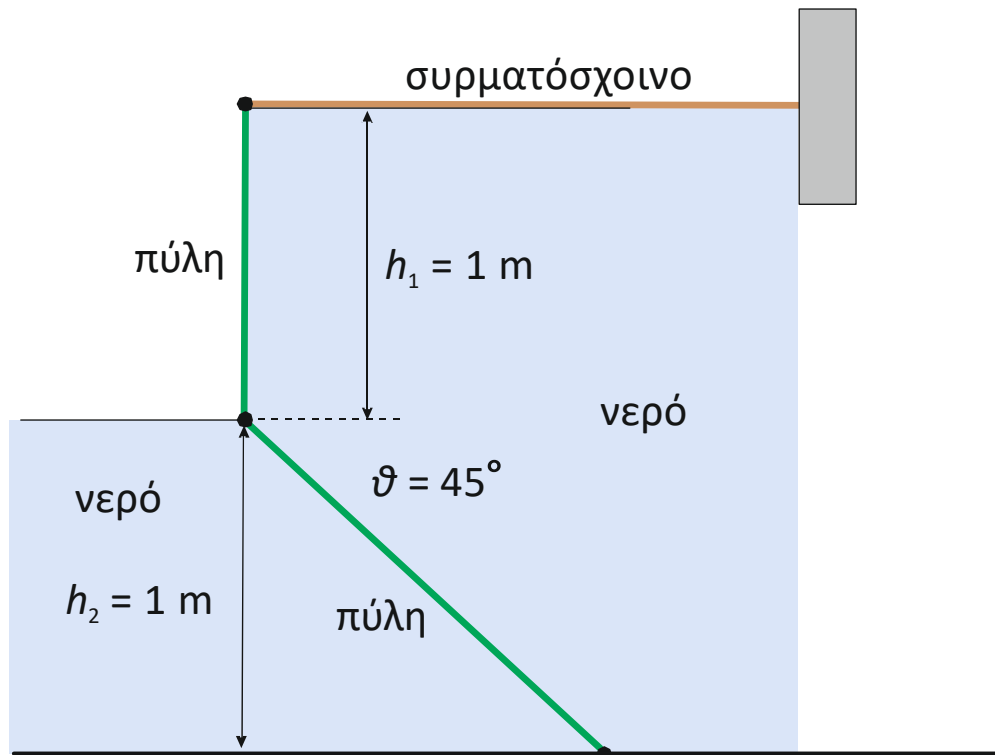
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Υπολογισμός δύναμης σε πύλη ξεξαμενής

Η ορθογωνική πύλη της δεξαμενής του σχήματος έχει πλάτος 1 m (κάθετα στο επίπεδο του σχήματος) και συγκρατείται στη θέση της με τη βοήθεια οριζόντιου συρματοσχοίνου. Αριστερά της πύλης υπάρχει νερό ύψους 1 m (από τη βάση της δεξαμενής), ενώ στα δεξιά της πύλης το νερό έχει ύψος 2 m

Να υπολογιστούν:

- (α) Τα μέτρα και τα σημεία εφαρμογής όλων των υδροστατικών δυνάμεων σε κάθε επίπεδο τμήμα της πύλης.
- (β) Η δύναμη που ασκείται στο συρματοσχοίνο αν αμεληθεί το βάρος της πύλης.



Δεδομένα

Πλάτος πύλης:

$$w := 1 \cdot \text{m}$$

Ύψος 1 νερού:

$$h_1 := 1 \text{ m}$$

Ύψος 2 νερού:

$$h_2 := 1 \cdot \text{m}$$

Γωνία πύλης:

$$\theta := 45^\circ$$

Ειδικό βάρος νερού:

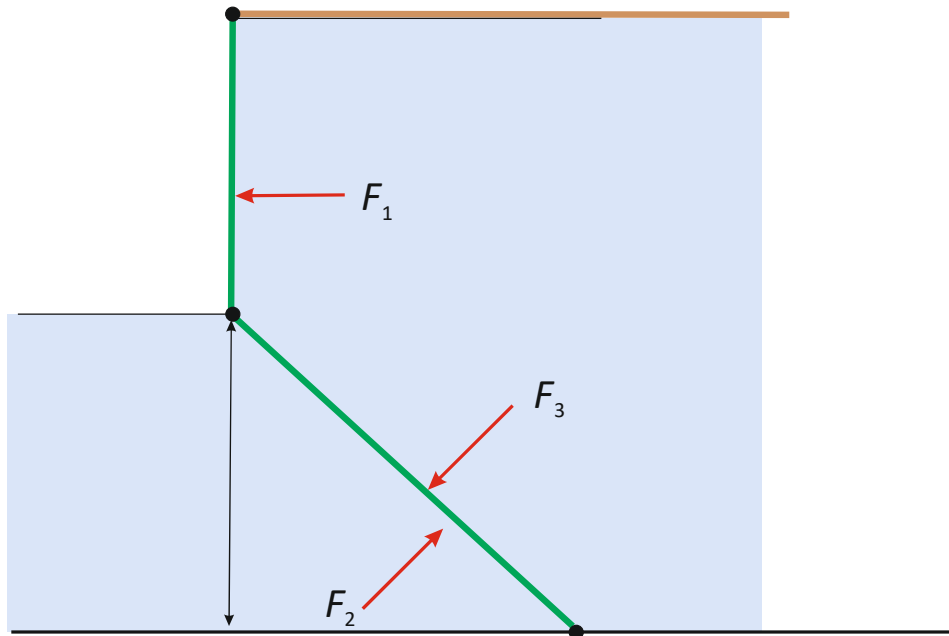
$$\gamma := 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

Λύση

Οι υδροστατικές δυνάμεις που ασκούνται στην πύλη είναι:

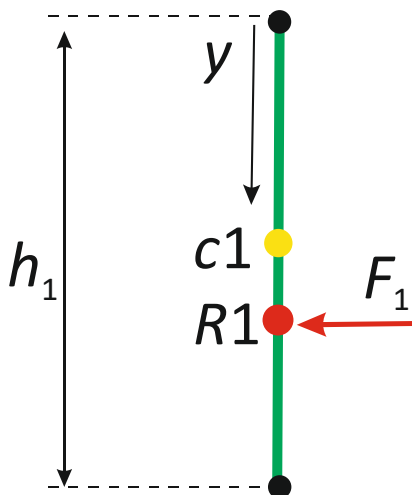
- F_1 : Δύναμη που ασκείται στο πάνω τμήμα της πύλης από το νερό που βρίσκεται δεξιά της πύλης.
 F_2 : Δύναμη που ασκείται στο κάτω τμήμα της πύλης από το νερό που βρίσκεται αριστερά της πύλης.
 F_3 : Δύναμη που ασκείται στο κάτω τμήμα της πύλης από το νερό που βρίσκεται δεξιά της πύλης.

Όλες οι δυνάμεις είναι κάθετες στις αντίστοιχες επιφάνειες με φορά προς τις επιφάνειες.



Υπολογισμός F_1

1ος Τρόπος



Το μέτρο της F_1 είναι ίσο με την πίεση που ασκείται στο κέντρο βάρους της επιφάνειας επί το εμβαδόν αυτής:

$$F_1 = \gamma \cdot h_{c1} \cdot A_1$$

όπου:

$$h_{c1} := \frac{h_1}{2} = 0.5 \text{ m}$$

$$A_1 := h_1 \cdot w = 1 \text{ m}^2$$

επομένως:

$$F_1 := \gamma \cdot h_{c1} \cdot A_1 = 4900 \cdot \text{N}$$

Το σημείο εφαρμογής της F_1 , ως απόσταση από την πάνω πλευρά της επιφάνειας (y), δίνεται από:

$$y_{R1} = y_{c1} + \frac{I_{xc1}}{y_{c1} \cdot A_1}$$

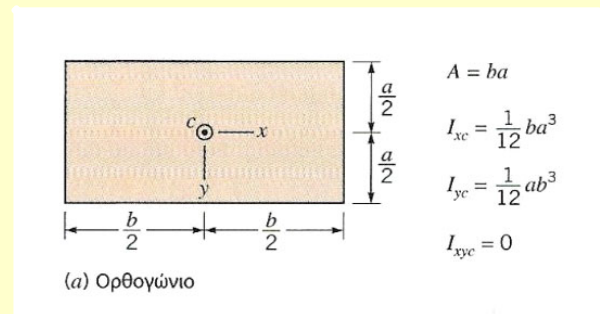
όπου:

$$y_{c1} := \frac{h_1}{2} = 0.5 \text{ m} \quad (\text{κατακόρυφη επιφάνεια})$$

$$I_{xc1} := \frac{1}{12} \cdot w \cdot h_1^3 = 0.083 \text{ m}^4 \quad (\text{βλ. Σχήμα με } a = h_1 \text{ και } b = w)$$

επομένως:

$$y_{R1} := y_{c1} + \frac{I_{xc1}}{y_{c1} \cdot A_1} = 0.667 \text{ m}$$

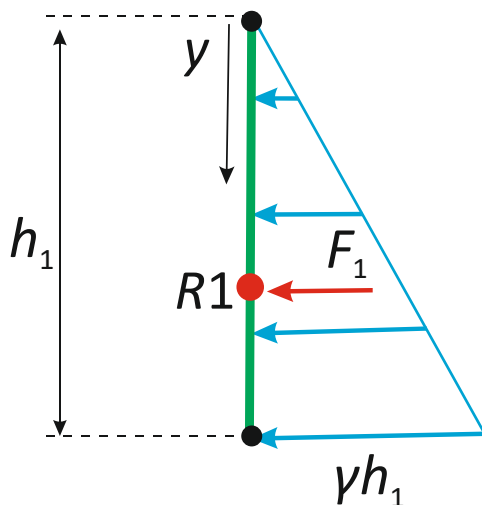


2ος Τρόπος (πρίσμα πίεσης)

Σχεδιάζεται το πρίσμα πίεσης στην κατακόρυφη επιφάνεια:

- Στην κορυφή της επιφάνειας η πίεση είναι μηδενική.
- Στον πυθμένα η πίεση είναι $\gamma \cdot h_1$.

Επομένως, το πρίσμα πίεσης έχει τριγωνική διατομή με βάση $\gamma \cdot h_1$, ύψος h_1 και πλάτος w .



Το μέτρο της F_1 είναι ίσο με τον όγκο του πρίσματος:

$$F_1 := \frac{1}{2}(\gamma \cdot h_1) \cdot (h_1 \cdot w) = 4900 \cdot \text{N}$$

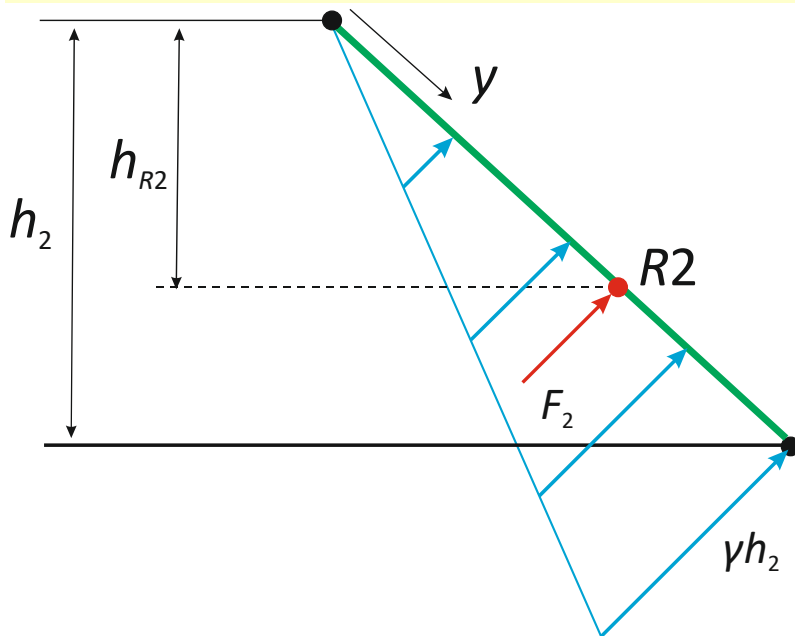
Το σημείο εφαρμογής της F_1 είναι το βαρύκεντρο του πρίσματος. Επομένως, η απόσταση από την πάνω πλευρά της επιφάνειας, δίνεται από:

$$y_{R1} := \frac{2 \cdot h_1}{3} = 0.667 \text{ m}$$

Υπολογισμός F_2

Η F_2 υπολογίζεται με το ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την τεχνική του πρίσματος πίεσης, σε κεκλιμένη επιφάνεια, μήκους:

$$L_2 := \frac{h_2}{\sin(\theta)} = 1.414 \text{ m}$$



- Στην κορυφή της επιφάνειας η πίεση είναι μηδενική.
- Στον πυθμένα η πίεση είναι $\gamma \cdot h_2$ (προσέξτε ότι χρησιμοποιείται το βάθος h).

Το μέτρο της F_2 είναι ίσο με τον όγκο του πρίσματος:

$$F_2 := \frac{1}{2}(\gamma \cdot h_2) \cdot (L_2 \cdot w) = 6930 \cdot \text{N}$$

Το σημείο εφαρμογής της F_2 είναι το βαρύκεντρο του πρίσματος. Επομένως, η απόσταση από την πάνω πλευρά της επιφάνειας, δίνεται από:

$$y_{R2} := \frac{2 \cdot L_2}{3} = 0.943 \text{ m}$$

και το βάθος (κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια) του σημείου εφαρμογής είναι:

$$h_{R2} := y_{R2} \cdot \sin(\theta) = 0.667 \text{ m}$$

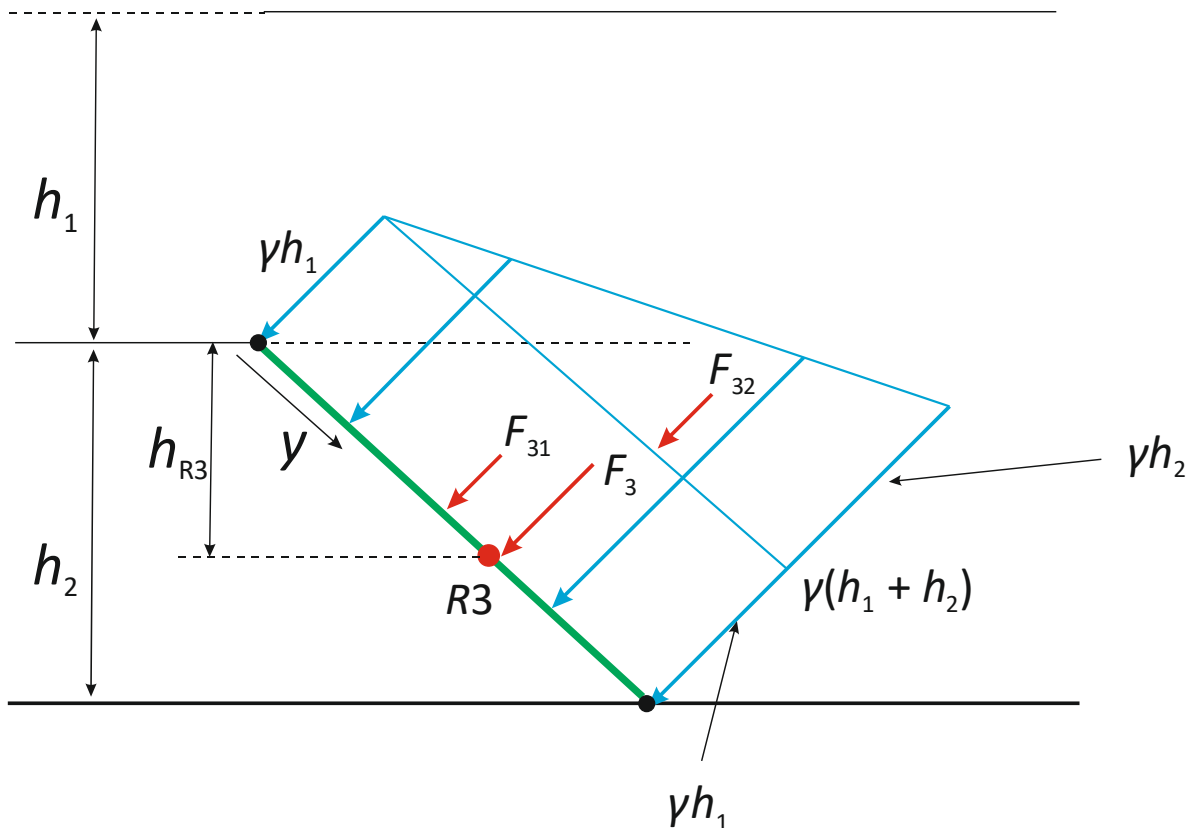
Υπολογισμός F_3

Για τον υπολογισμό της F_3 χρησιμοποιείται η τεχνική του πρίσματος πίεσης, σε βυθισμένη επιφάνεια.

- Στην κορυφή της επιφάνειας η πίεση είναι $\gamma \cdot h_1$.
- Στον πυθμένα η πίεση είναι $\gamma \cdot (h_1 + h_2)$.

Επομένως, το πρίσμα πίεσης αποτελείται από δύο τμήματα:

1. Ένα ορθογωνικής διατομής με βάση $\gamma \cdot h_1$, ύψος L_2 και πλάτος w
2. Ένα τριγωνικής διατομής με βάση $\gamma \cdot h_2$, ύψος L_2 και πλάτος w



Οι δύο επιμέρους δυνάμεις (των δύο τμημάτων) υπολογίζονται από τον όγκο των πρισμάτων:

$$F_{31} := (\gamma \cdot h_1) \cdot (L_2 \cdot w) = 13859 \cdot \text{N}$$

$$F_{32} := \frac{1}{2}(\gamma \cdot h_2) \cdot (L_2 \cdot w) = 6930 \cdot \text{N}$$

Η δύναμη F_3 είναι η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων:

$$F_3 := F_{31} + F_{32} = 20789 \cdot \text{N}$$

Τα σημεία εφαρμογής των F_{31} και F_{32} είναι τα βαρύκεντρο των πρισμάτων. Επομένως, οι απόστασεις από την πάνω πλευρά της επιφάνειας, δίνονται από:

$$y_{R31} := \frac{L_2}{2} = 0.707 \text{ m} \quad (\text{ορθογωνικής διατομής})$$

$$y_{R32} := \frac{2 \cdot L_2}{3} = 0.943 \text{ m} \quad (\text{τριγωνικής διατομής})$$

Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης F_3 υπολογίζεται από το άθροισμα των ροπών.
 Άθροισμα ροπών ως προς το πάνω σημείο της επιφάνειας:

$$F_3 \cdot y_{R3} = F_{31} \cdot y_{R31} + F_{32} \cdot y_{R32}$$

επομένως:

$$y_{R3} := \frac{F_{31} \cdot y_{R31} + F_{32} \cdot y_{R32}}{F_3} = 0.786 \text{ m}$$

και το βάθος (κατακόρυφη απόσταση από το πάνω σημείο της επιφάνειας) του σημείου εφαρμογής είναι:

$$h_{R3} := y_{R3} \cdot \sin(\theta) = 0.556 \text{ m}$$

Υπολογισμός Δύναμης στο Συρματόσχοινο

Υπολογίζεται εφαρμόζοντας την ισορροπία ροπών ως προς το κάτω σημείο της πύλης:



ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

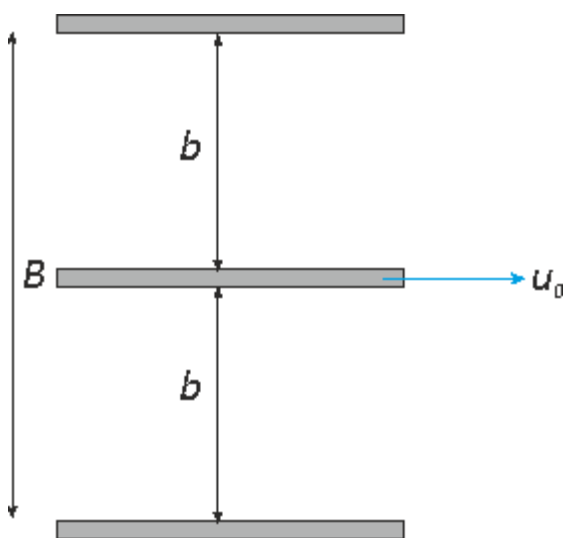
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ, ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Γ. ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ - 2020

Τρεις πλάκες

Στο χώρο μεταξύ δύο ακίνητων οριζόντιων πλακών περιέχεται ένα νευτωνικό ρευστό το οποίο έχει ιξώδες $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Η απόσταση ανάμεσα στις δύο πλάκες είναι $B = 10 \text{ cm}$. Στο μέσο της απόστασης των δύο πλακών τοποθετείται, παράλληλα προς αυτές, μια τρίτη πλάκα αμελητέου πάχους, η οποία έχει εμβαδόν $A = 0.1 \text{ m}^2$. Να υπολογιστεί η δύναμη που πρέπει να ασκείται στην τρίτη πλάκα ώστε να κινείται παράλληλα προς το επίπεδό της με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 0.02 \text{ m/s}$.

Υπενθυμίζεται ότι η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού μεταξύ μιας ακίνητης οριζόντιας πλάκας και μιας οριζόντιας πλάκας που κινείται με ταχύτητα u_0 και βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση $y = b$ από την ακίνητη, δίνεται από τη σχέση:

$$v_x = u_0 \cdot \frac{y}{b} \quad (1)$$



Δεδομένα

Ιξώδες ρευστού:

$$\mu := 1.5 \cdot \text{Pa} \cdot \text{s}$$

Απόσταση ακίνητων πλακών:

$$B := 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

Απόσταση κινούμενης πλάκας από ακίνητες:

$$b := \frac{B}{2} = 0.05 \text{ m}$$

Εμβαδό πλάκας:

$$A := 0.1 \cdot \text{m}^2$$

Ταχύτητα πλάκας:

$$u_0 := 0.02 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Λύση

Η συνολική δύναμη που ασκείται στην κινούμενη πλάκα είναι το άθροισμα των διατμητικών δυνάμεων που ασκούνται από τις δύο περιοχές του ρευστού:

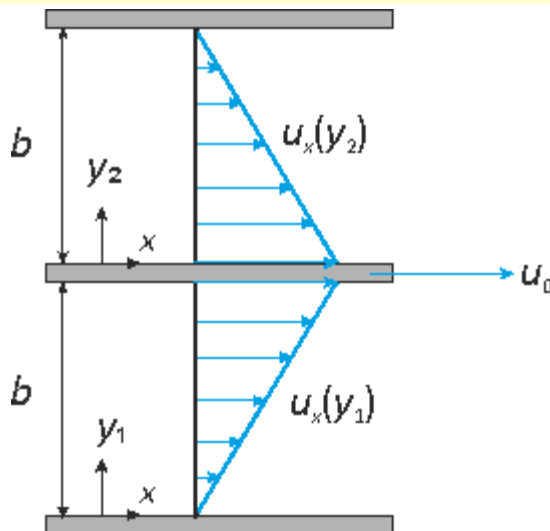
1: Περιοχή μεταξύ κάτω ακίνητης πλάκας και κινούμενης πλάκας

2: Περιοχή μεταξύ πάνω ακίνητης πλάκας και κινούμενης πλάκας

Η κατανομή της ταχύτητας είναι γραμμική σε κάθε μια από τις δύο περιοχές. Αν χρησιμοποιηθούν τα επιμέρους συστήματα συντεταγμένων του σχήματος, έχουμε:

$$v_x(y_1) = v_0 \cdot \frac{y_1}{b} \quad \text{από τη σχέση (1) για } y = y_1$$

$$v_x(y_2) = v_0 \cdot \frac{b - y_2}{b} \quad \text{από τη σχέση (1) για } y = b - y_2$$



Δύναμη από το ρευστό της περιοχής 1

Επειδή το ρευστό είναι νευτωνικό και η ροή μονοδιάστατη, η μόνη διατμητική τάση είναι η τ_{y1x} , η οποία δίνεται από τη σχέση του Newton:

$$\tau_{y1x} = \mu \cdot \frac{dv_x(y_1)}{dy_1}$$

και

$$\tau_{y1x} := \frac{\mu \cdot v_0}{b} = 0.6 \cdot \text{Pa}$$

σταθερή σε όλο το ύψος y_1 .

Η τάση τ_{y1x} έχει θετικό πρόσημο. Επομένως:

- Είναι προς τη θετική x-φορά όταν ασκείται σε θετική y_1 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.
- Είναι προς την αρνητική x-φορά όταν ασκείται σε αρνητική y_1 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.

Μας ενδιαφέρει η τάση που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια, η οποία είναι πάνω από το ρευστό. Επομένως η τάση έχει αρνητική φορά.

$$\tau_{w1} := -\tau_{y1x} = -0.6 \cdot \text{Pa}$$

και η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια είναι:

$$F_{w1} := \tau_{w1} \cdot A = -0.06 \cdot \text{N}$$

Δύναμη από το ρευστό της περιοχής 2

Με τον ίδιο τρόπο:

$$\tau_{y2x} = \mu \cdot \frac{dv_x(y_2)}{dy_2}$$

$$\tau_{y2x} := -\frac{\mu \cdot v_0}{b} = -0.6 \cdot \text{Pa}$$

Η τάση τ_{y2x} έχει αρνητικό πρόσημο. Επομένως:

- Είναι προς την αρνητική x-φορά όταν ασκείται σε θετική y_2 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.
- Είναι προς τη θετική x-φορά όταν ασκείται σε αρνητική y_2 -επιφάνεια, δηλαδή από τα πάνω τμήματα του ρευστού στα κάτω.

Μας ενδιαφέρει η τάση που ασκείται από το ρευστό στην επιφάνεια, η οποία είναι κάτω από το ρευστό. Επομένως η τάση έχει αρνητική φορά.

$$\tau_{w2} := \tau_{y2x} = -0.6 \cdot \text{Pa}$$

και η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια είναι:

$$F_{w2} := \tau_{w2} \cdot A = -0.06 \cdot \text{N}$$

Συνολική δύναμη

$$F_w := F_{w1} + F_{w2} = -0.12 \cdot \text{N}$$

Αυτή είναι η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στην πλάκα όταν αυτή κινείται με ταχύτητα v_0 . Επομένως, για να μπορεί να κινηθεί η πλάκα πρέπει να εφαρμοστεί μια δύναμη ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς:

$$F := -F_w = 0.12 \cdot \text{N}$$