

Ρευστομηχανική

19^η Διάλεξη

Ροή σε σωληνώσεις – Απώλειες ενέργειας

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Εξίσωση διατήρησης ενέργειας

Γενικευμένη εξίσωση Bernoulli

- Σε όρους ειδικής **ενέργειας**

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{u_2^2}{2} + w_s + w_l$$

(1) (2) (3) (4) (5)

- (1) Ενέργεια ροής
- (2) Δυναμική ενέργεια
- (3) Κινητική ενέργεια
- (4) Αξονικό έργο
- (5) Απώλειες ενέργειας

σε J/kg

- Σε όρους **ύψους**

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_s + h_l$$

(1) (2) (3) (4) (5)

- (1) Ύψος πίεσης
- (2) Ύψος στάθμης (θέσης)
- (3) Ύψος ταχύτητας
- (4) Αξονικό ύψος
- (5) Απώλειες ύψους

σε m = J/N

- Σε όρους **πίεσης**

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_s + p_l$$

(1) (2) (3) (4) (5)

- (1) Στατική πίεση
- (2) Υδροστατική (υψομετρική) πίεση
- (3) Δυναμική πίεση
- (4) Αξονική πίεση
- (5) Απώλειες πίεσης

σε Pa = J/m³

ή

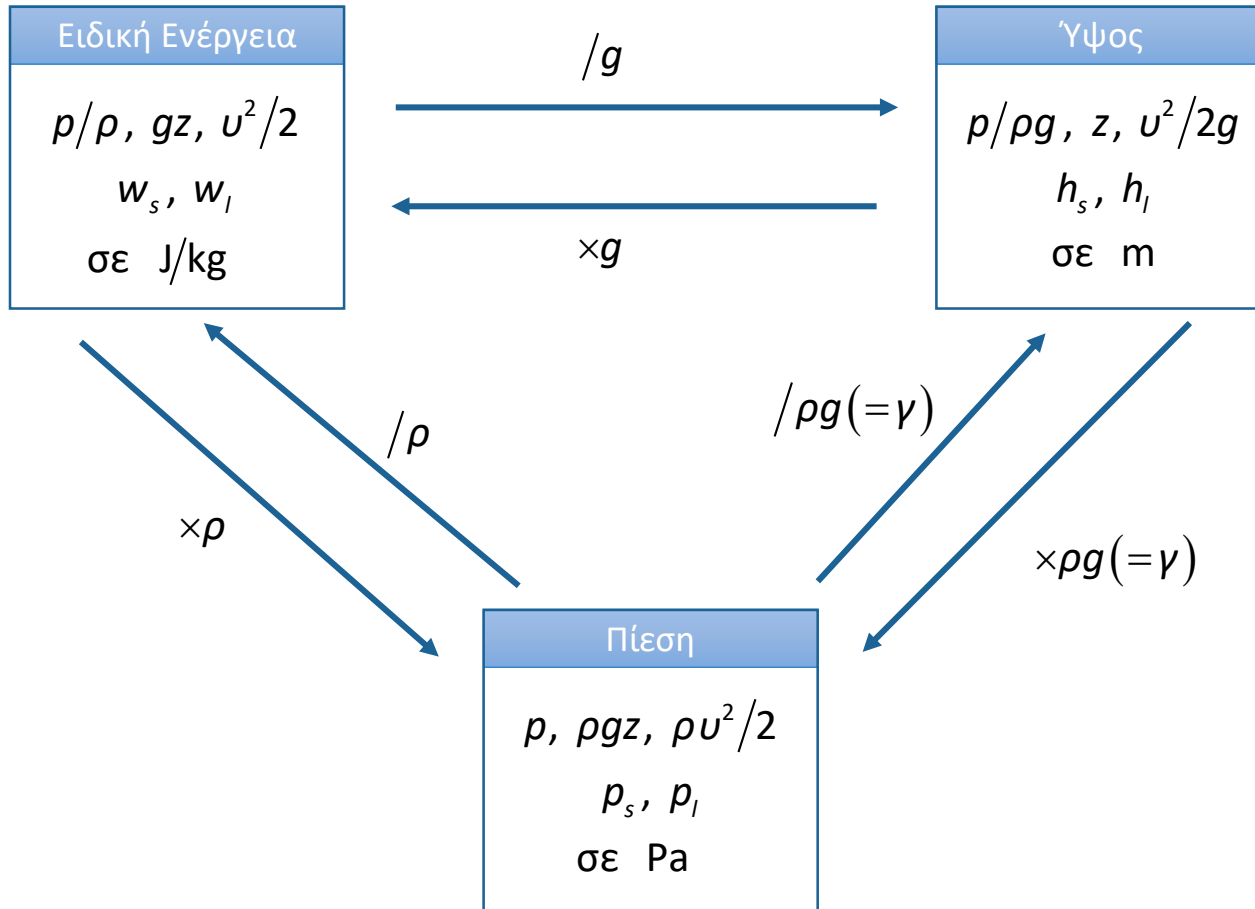
$$p_{t,1} = p_{t,2} + p_s + p_l \quad \text{όπου} \quad p_t = p + \rho g z + \frac{\rho u^2}{2} \quad \text{είναι η ολική πίεση}$$

$$h_l = w_l / g$$

$$p_l = \rho w_l$$

$$p_l = \gamma h_l$$

Μεγέθη και μετατροπές



Πτώση πίεσης σε αγωγό

Πλήρως ανεπτυγμένη ροή

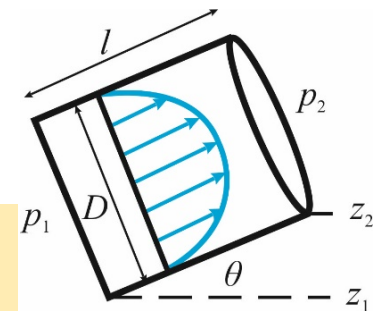
- Διατήρηση ενέργειας

$$p_1 + \rho g z_1 + \cancel{\frac{\rho u_1^2}{2}} = p_2 + \rho g z_2 + \cancel{\frac{\rho u_2^2}{2}} + p_l \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_2) = p_l + \rho g (z_2 - z_1) \Rightarrow$$

$$\Delta p = p_l + \rho g l \sin \theta$$

Για οριζόντιο αγωγό $\Delta p = p_l$
 Δηλαδή, οι απώλειες ενέργειας λόγω τριβής
 εκδηλώνονται μακροσκοπικά ως πτώση πίεσης



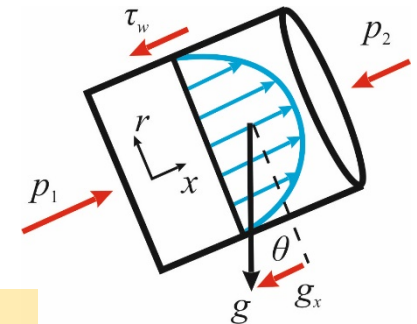
- Νόμος κίνησης Newton

$$p_1 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) - p_2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) - \tau_w (\pi D l) - \rho g_x \left(\frac{\pi D^2}{4} l \right) = 0 \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) = \tau_w (\pi D l) + \rho g \sin \theta \left(\frac{\pi D^2}{4} l \right) \Rightarrow$$

$$\Delta p = \frac{4 \tau_w l}{D} + \rho g l \sin \theta$$

Για οριζόντιο αγωγό $\Delta p = 4 \tau_w l / D$
 Δηλαδή, η δύναμη από την πτώση πίεσης
 εξισορροπεί τις ιξώδεις δυνάμεις



Απώλειες σε αγωγό (γραμμικές απώλειες)

- Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις

$$p_l = \frac{4\tau_w l}{D} = 4\tau_w \frac{l}{D} \frac{\rho u^2 / 2}{\rho u^2 / 2} = \frac{8\tau_w}{\rho u^2} \frac{l}{D} \frac{\rho u^2}{2}$$

Οι γραμμικές απώλειες πίεσης σχετίζονται με τη διατμητική τάση του τοιχώματος

ισοδύναμα

$$p_l = f \frac{l}{D} \frac{\rho u^2}{2}$$

Εξίσωση Darcy–Weisbach

με

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho u^2}$$

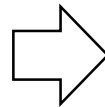
Συντελεστής γραμμικών απωλειών (τριβής / Darcy)

Παρατήρηση: Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν τόσο για στρωτή όσο και τυρβώδη ροή, σε αγωγούς κυκλικής διατομής (σωλήνες) αλλά και μη κυκλικής διατομής.

Στρωτή ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής

- Διατμητική τάση τοιχώματος

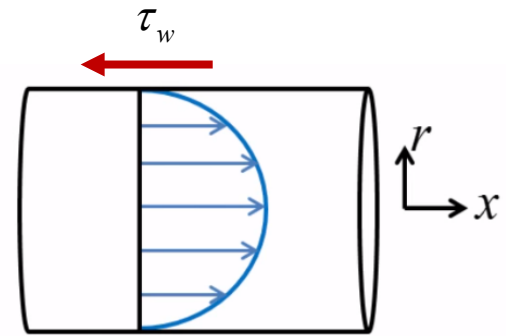
$$\tau_w = -\tau_{rx}|_{r=D/2} = -\mu \left. \frac{\partial u_x}{\partial r} \right|_{r=D/2}$$



$$\tau_w = \frac{8\mu\bar{u}}{D}$$

$$u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

! Τη μέση ταχύτητα $\bar{u}$
τη συμβολίζουμε με u



Προφίλ ταχύτητας σε στρωτή ροή (εξίσωση Hagen-Poiseuille)

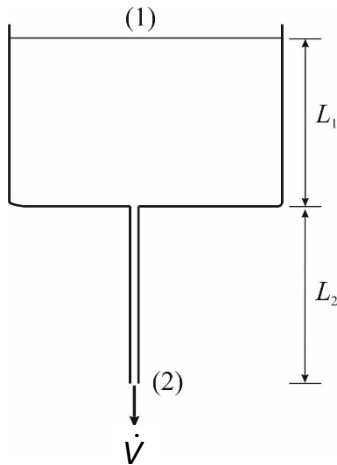
- Συντελεστής γραμμικών απωλειών

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2} = \frac{64\mu}{\rho\bar{u}D}$$

εναλλακτικά

$$f = \frac{64}{Re_D}$$

Παράδειγμα 1



Μέτρηση ιξώδους (συντελεστή συνεκτικότητας) ρευστού
μέσω τριχοειδούς σωλήνα

Το ρευστό ρέει λόγω βαρύτητας μέσα από τριχοειδή σωλήνα που προσαρμόζεται σε μια ανοιχτή στην ατμόσφαιρα δεξαμενή και μετριέται η ογκομετρική παροχή. Να υπολογιστεί το ιξώδες του.

Δίνονται

$$L_1 = L_2 = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

Ύψος δεξαμενής και μήκος σωλήνα

$$D = 1.2 \text{ mm} = 0.0012 \text{ m}$$

Διάμετρος σωλήνα

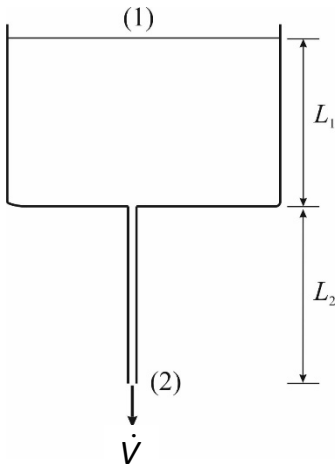
$$\dot{V} = 0.004 \text{ m}^3/\text{h} = 1.111 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Ογκομετρική παροχή

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Πυκνότητα ρευστού

Παράδειγμα – Λύση 1/2



Βήμα 1: Εφαρμογή εξίσωσης ενέργειας (γενικευμένη εξίσωση Bernoulli) για υπολογισμό απωλειών

Εξίσωση ενέργειας μεταξύ σημείων (1) και (2) (δεξαμενή και σωλήνα)

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_l$$

Απλοποιήσεις

$$p_1 = p_2 = p_0 \quad \text{Ατμοσφαιρική πίεση}$$

$$u_1 = 0 \quad \text{Αμελητέα ταχύτητα στη δεξαμενή σε σχέση με το σωλήνα}$$

$$\Downarrow$$
$$\rho g z_1 = \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_l \Rightarrow p_l = \rho g (z_1 - z_2) - \frac{\rho u_2^2}{2}$$

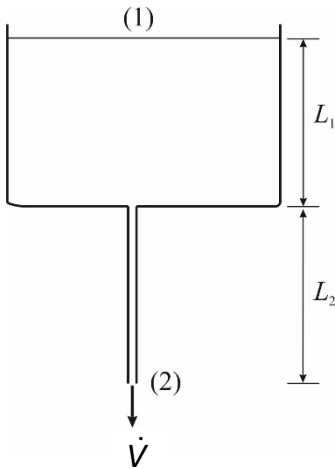
Υπολογισμός απωλειών

$$z_1 - z_2 = L_1 + L_2 = 0.6 \text{ m}$$

$$u_2 = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1.111 \times 10^{-6}}{3.142 \times 0.0012^2 / 4} = 0.982 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow p_l = 1000 \times 9.807 \times 0.6 - \frac{1000 \times 0.982^2}{2} = 5.401 \times 10^3 \text{ Pa}$$

Παράδειγμα – Λύση 2/2



Βήμα 2: Εφαρμογή εξίσωσης Darcy–Weisbach για υπολογισμό συντελεστή απωλειών

Εξίσωση Darcy–Weisbach για τον σωλήνα

$$p_l = f \frac{L_2}{D} \frac{\rho u_2^2}{2}$$

Επίλυση ως προς f

$$f = \frac{2p_l D}{L_2 \rho u_2^2}$$

$$f = \frac{2 \times 5.401 \times 10^3 \times 0.0012}{0.3 \times 1000 \times 0.982^2} = 0.045$$

Βήμα 3: Εφαρμογή σχέσης $f = f(Re_D)$ για υπολογισμό ιξώδους

Υποθέτουμε στρωτή ροή, επομένως:

$$f = \frac{64}{Re_D} \Rightarrow Re_D = \frac{64}{f}$$

$$Re_D = \frac{64}{0.045} = 1430$$

στρωτή ροή

Από τον Re_D υπολογίζουμε το μ :

$$Re_D = \frac{\rho u_2 D}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{\rho u_2 D}{Re_D}$$

$$\mu = \frac{1000 \times 0.982 \times 0.0012}{1430} = 8.247 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Τυρβώδης ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής

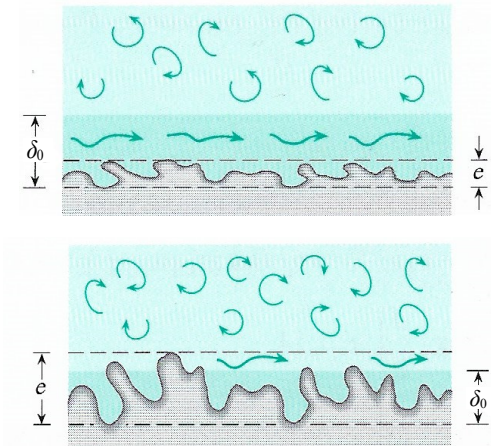
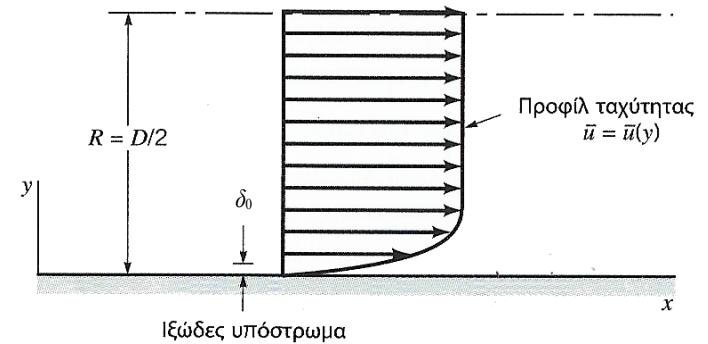
- Δεν έχει αναπτυχθεί θεωρητική μέθοδος καθορισμού του f
- Πειραματικές μετρήσεις και εμπειρικές συσχετίσεις
- Ο συντελεστής γραμμικών απωλειών εξαρτάται
 - Συνθήκες ροής $\rightarrow Re_D$
 - Υφή εσωτερικής επιφάνειας $\rightarrow$ σχετική τραχύτητα e_s

Μορφή εμπειρικών σχέσεων

$$f = f\left(Re_D, e_s = \frac{e}{D}\right)$$

Επίδραση τραχύτητας

- Ιξώδες υπόστρωμα
 - Σταθεροποιητική δράση στην εμφάνιση δινών
 - Πάχος δ_0 μειώνεται με τον Re_D
- Υδραυλικά **λείοι** σωλήνες
 - Τα στοιχεία της τραχύτητας σκεπάζονται από το ιξώδες υπόστρωμα ($\delta_0 > e$)
 - $f = f(Re_D)$
- **Τραχείς** σωλήνες
 - Μικρό πάχος υποστρώματος ($\delta_0 \leq e$)
 - $f = f(Re_D, e_s)$
- Πλήρως τυρβώδεις ροές
 - Πολύ λεπτό ιξώδες υπόστρωμα
 - $f = f(e_s)$



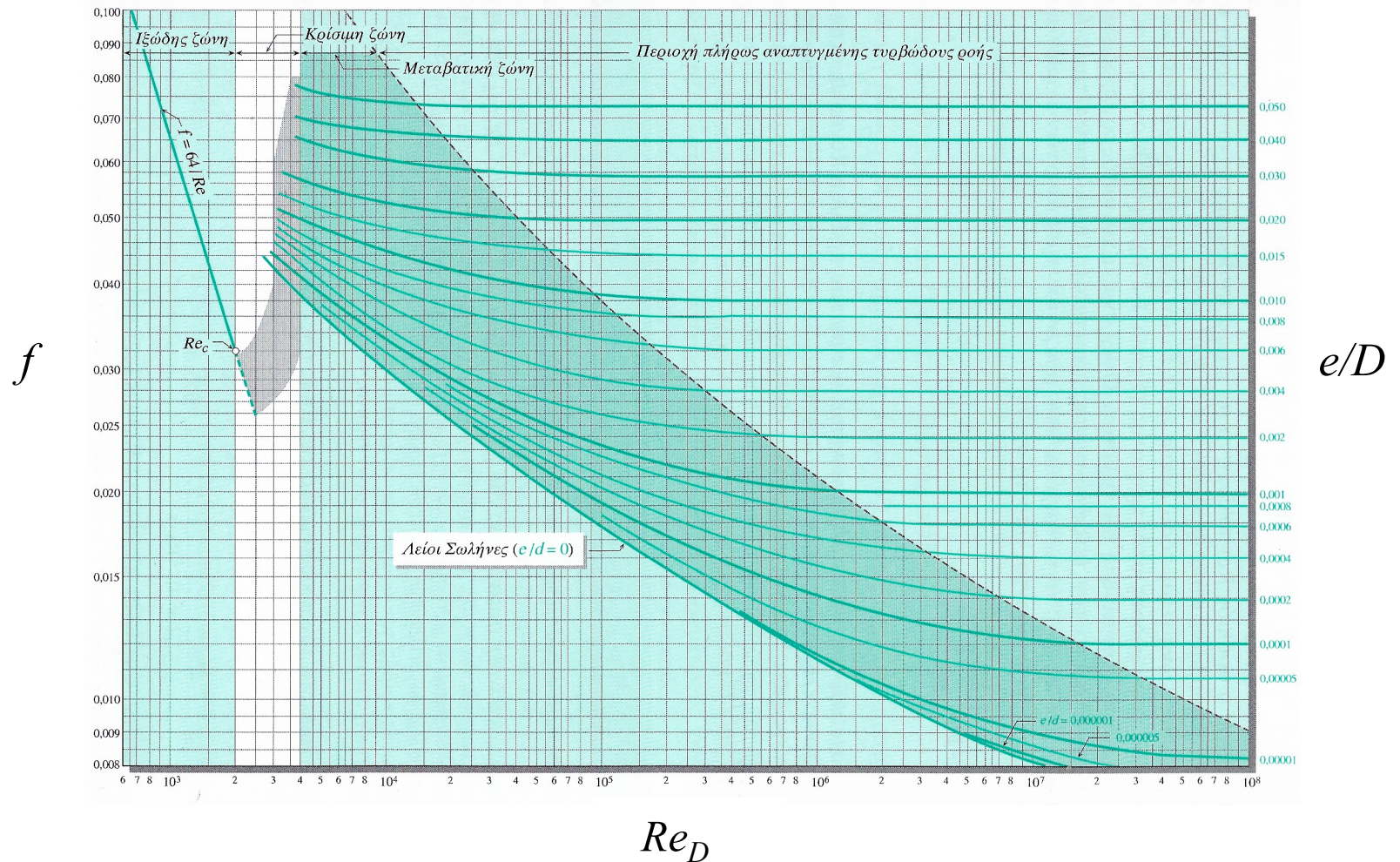
Εμπειρικές σχέσεις σε τυρβώδη ροή

Σχέση	Περιοχή ισχύος	Παρατηρήσεις
<i>Υδραυλικά λείοι σωλήνες</i>		
$f = \frac{0.3164}{Re_D^{1/4}}$	$4000 < Re_D < 10^5$	Σχέση Blasius
$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re_D \sqrt{f}) - 0.8$	$Re_D > 10^5$	Σχέση Prandtl
<i>Τραχείς σωλήνες</i>		
$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{D}{e}\right) + 1.14$	$\frac{D/e}{Re_D \sqrt{\lambda}} > 0.005$	Σχέση Nikuradse
$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}}\right)$	$Re_D > 4000$	Σχέση Colebrook

Σε πλήρως τυρβώδεις ροές εφαρμόζεται η σχέση Colebrook με $Re_D \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{3.7}{e/D}\right)$$

Διάγραμμα Moody

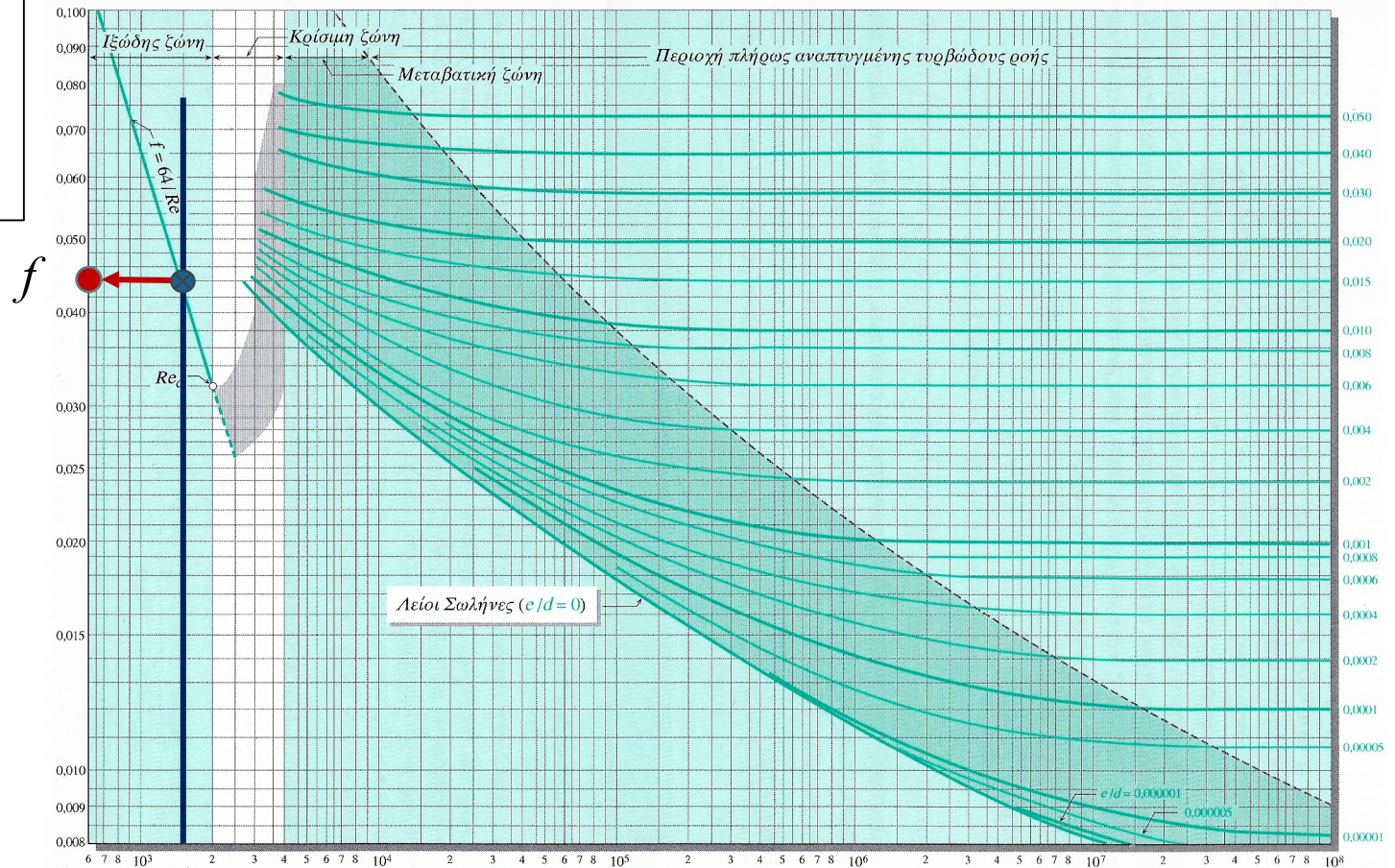


Χρήση διαγράμματος Moody – 1

Στρωτή ροή

$$Re_D = 1500$$

$$f = ?$$



$$Re_D = 1500$$

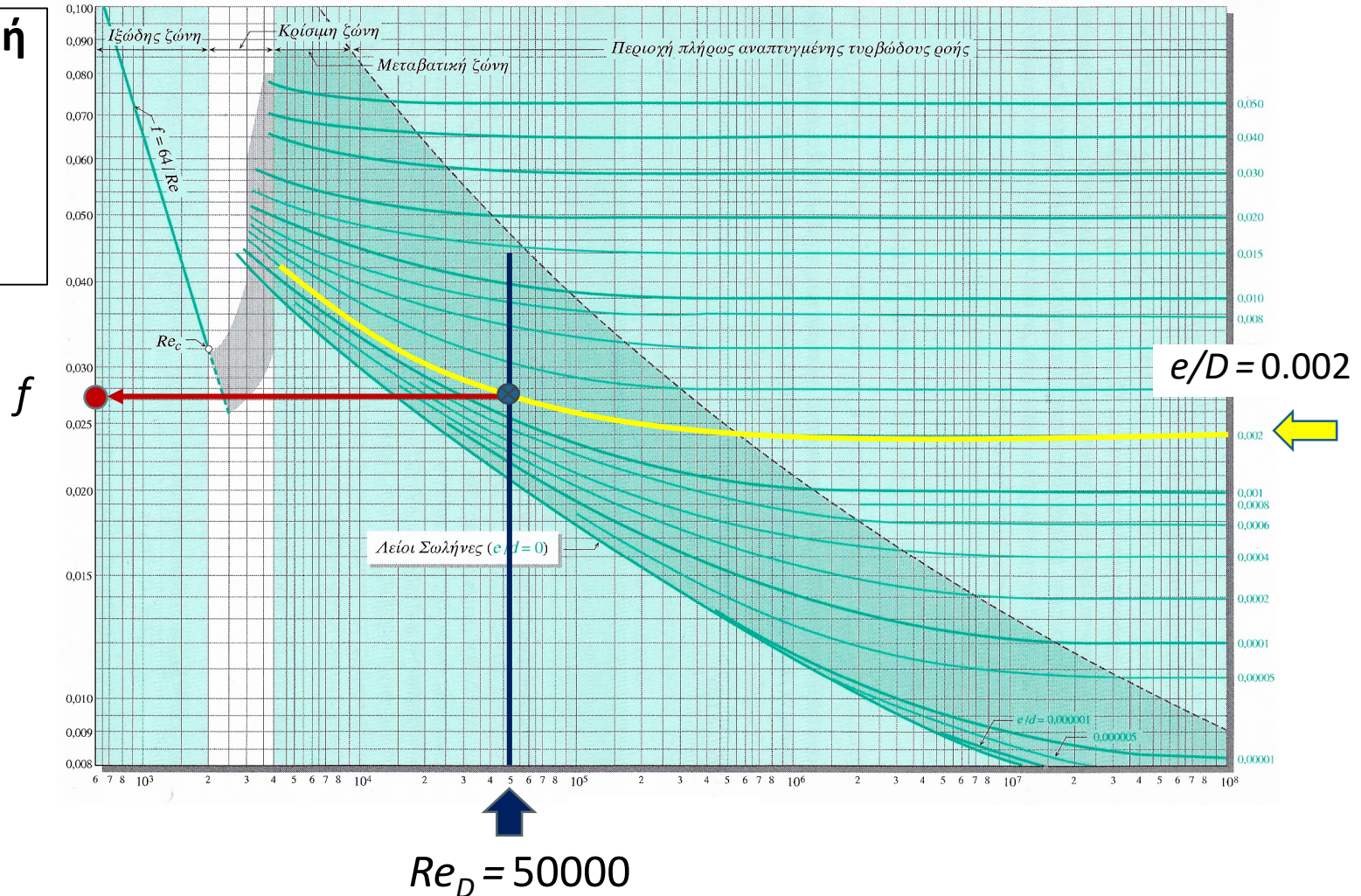
Χρήση διαγράμματος Moody – 2

Τυρβώδης ροή

$$Re_D = 50000$$

$$e/D = 0.002$$

$$f = ?$$



Αγωγοί μη κυκλικής διατομής

- Υδραυλική διάμετρος (αντί της διαμέτρου κυκλικού αγωγού $D_h \rightarrow D$)

$$D_h = \frac{4A}{S}$$

A: Εμβαδό βρεχόμενης επιφάνειας
S: Περίμετρος βρεχόμενης επιφάνειας

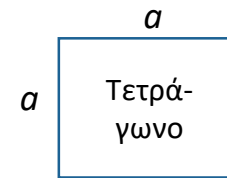


$$Re_D = \frac{\rho v D_h}{\mu}$$

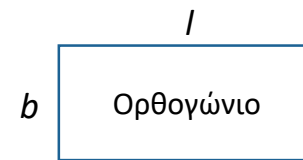
$$e_s = \frac{e}{D_h}$$

$$p_l = f \frac{l}{D_h} \frac{\rho v^2}{2}$$

Παράδειγμα



$$\left. \begin{array}{l} A = a^2 \\ S = 4a \end{array} \right\} D_h = a$$



$$\left. \begin{array}{l} A = bl \\ S = 2(b+l) \end{array} \right\} D_h = \frac{2bl}{b+l}$$

- Συντελεστής γραμμικών απωλειών

Στρωτή ροή

$$f = \frac{C}{Re_D}$$

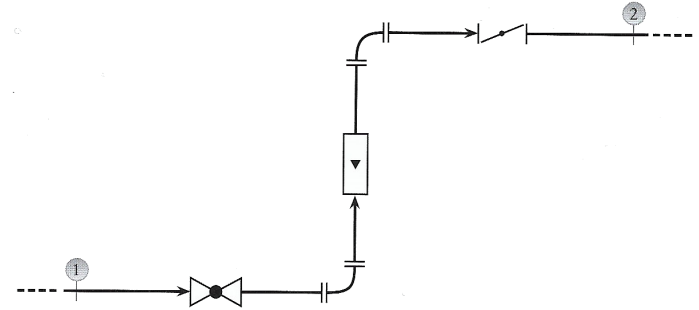
128	Ισόπλευρο τρίγωνο
57.2	Τετράγωνο
62	Ορθογώνιο $b/l = 1/2$
96	Ορθογώνιο $l \gg b$

Τυρβώδης ροή

Χρήση διαγράμματος Moody

Εξίσωση ενέργειας σε σωληνώσεις

Σύστημα **αγωγών** που ενώνονται σε σειρά με τη χρήση **εξαρτημάτων** όπου παρεμβάλλονται **συσκευές προσαγωγής/απαγωγής ενέργειας** (αντλίες, στρόβιλοι)



- Εξίσωση ενέργειας (τροποποιημένη εξίσωση Bernoulli)

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + p_{s,ΟΛΙΚΟ} + p_{l,ΟΛΙΚΟ}$$

$$\text{ή} \quad p_{t,1} = p_{t,2} + p_{s,ΟΛΙΚΟ} + p_{l,ΟΛΙΚΟ}$$

$$\text{Συνολικό αξονικό έργο: } p_{s,ΟΛΙΚΟ} = \sum p_s$$

Μηδενικό αν δεν παρεμβάλλονται αντλίες ή στρόβιλοι (απλές σωληνώσεις)

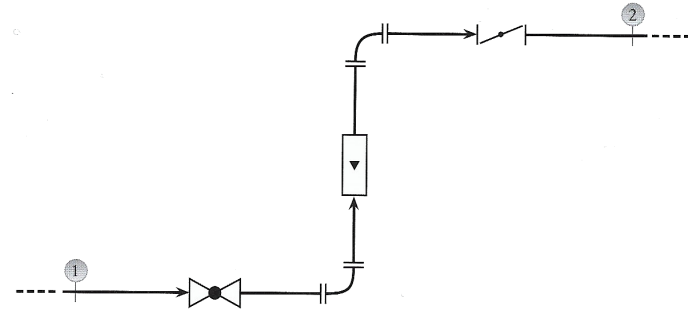
Γραμμικές και εντοπισμένες απώλειες

- Συνολικές απώλειες πίεσης

$$p_{I,ΟΛΙΚΟ} = \sum p_{I,Γ} + \sum p_{I,Ε}$$

↑
άθροιση για
όλους τους
αγωγούς

↑
άθροιση για
όλα τα
εξαρτήματα



$p_{I,Γ}$ (Γραμμικές ή κύριες απώλειες) + $p_{I,Ε}$ (Εντοπισμένες ή τοπικές απώλειες)

⇓
Απώλειες σε
αγωγούς

⇓
Απώλειες σε
εξαρτήματα

Εντοπισμένες αντιστάσεις

- Γραμμικές (ή κύριες) απώλειες

$$p_{l,\Gamma} = f \frac{l}{D_h} \frac{\rho u^2}{2}$$

- Εντοπισμένες (ή τοπικές) απώλειες

$$p_{l,E} = \zeta_E \frac{\rho u^2}{2}$$

ζ_E **Συντελεστής τοπικών απωλειών**

Υπολογίζεται πειραματικά και δίνεται από τον κατασκευαστή ως συνάρτηση του Re_D

- Συνολικές απώλειες σε σωλήνωση

$$p_{l,ΟΛΙΚΟ} = \sum \left(f \frac{l}{D_h} \frac{\rho u^2}{2} \right) + \sum \left(\zeta_E \frac{\rho u^2}{2} \right) \quad (= k \dot{V}^2)$$

Σχέσεις σε όρους ύψους

- Εξίσωση ενέργειας (τροποποιημένη εξίσωση Bernoulli)

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_{s,ΟΛΙΚΟ} + h_{l,ΟΛΙΚΟ}$$

- Συνολικές απώλειες ύψους

$$h_{l,ΟΛΙΚΟ} = \sum h_{l,\Gamma} + \sum h_{l,E}$$

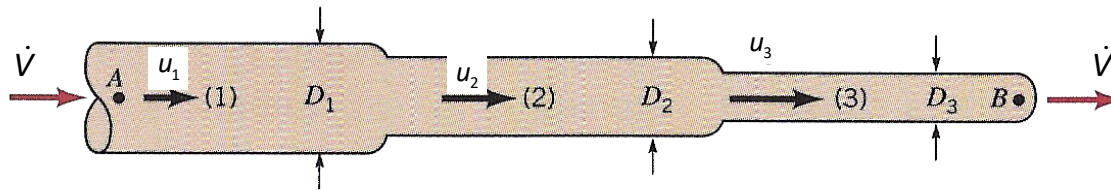
- Γραμμικές απώλειες ύψους

$$h_{l,\Gamma} = f \frac{l}{D_h} \frac{u^2}{2g}$$

- Εντοπισμένες απώλειες ύψους

$$h_{l,E} = \zeta_E \frac{u^2}{2g}$$

Σύνδεση αγωγών σε σειρά



1^{ος} Κανόνας

Ο ογκομετρικός ρυθμός παροχής είναι ίδιος σε όλους τους αγωγούς

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3 = \dot{V}$$

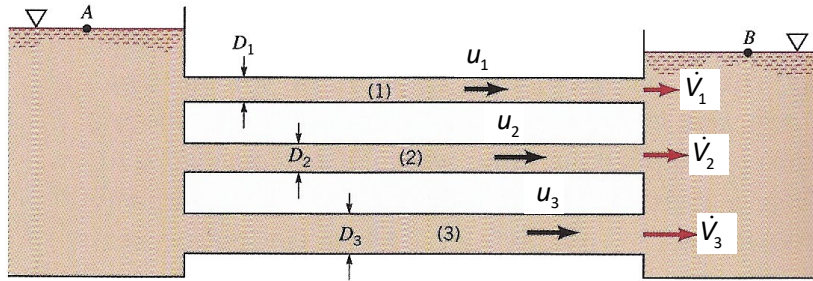
2^{ος} Κανόνας

Οι συνολικές απώλειες είναι ίσες με το άθροισμα των απωλειών σε κάθε αγωγό

$$p_{l,A \rightarrow B} = p_{l,1} + p_{l,2} + p_{l,3}$$

$$h_{l,A \rightarrow B} = h_{l,1} + h_{l,2} + h_{l,3}$$

Παράλληλη σύνδεση αγωγών



1^{ος} Κανόνας

Ο ολικός ογκομετρικός ρυθμός παροχής είναι ίσος με το άθροισμα του ρυθμού παροχής σε κάθε αγωγό

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

2^{ος} Κανόνας

Οι απώλειες είναι ίδιες σε κάθε αγωγό

$$p_{l,1} = p_{l,2} = p_{l,3}$$

$$h_{l,1} = h_{l,2} = h_{l,3}$$