

Ρευστομηχανική

17^η Διάλεξη

Εξισώσεις Euler και Navier-Stokes

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Εξισώσεις ορμής

- Ισχύουν για κάθε ροή ανεξάρτητα από το είδος του ρευστού

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

- Ειδικές μορφές προκύπτουν αν αντικατασταθούν οι ιξώδεις τάσεις από τις **υλικές σχέσεις** (βλ. Διάλεξη 10)

Άτριβη ροή – Εξισώσεις Euler

- **Άτριβη** (ή μη-συνεκτική) ροή είναι η ροή ενός **ιδανικού ρευστού** (ρευστού με μηδενικό ιξώδες)



- Μηδενικές ιξώδεις τάσεις ($\tau_{ij} = 0$)
- Οι εξισώσεις ορμής παίρνουν τη μορφή (Εξισώσεις Euler):

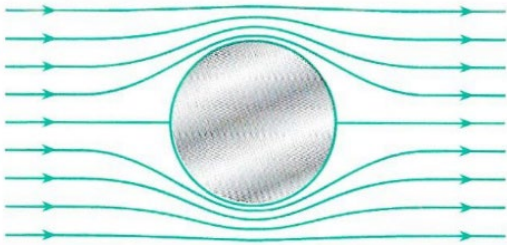
$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

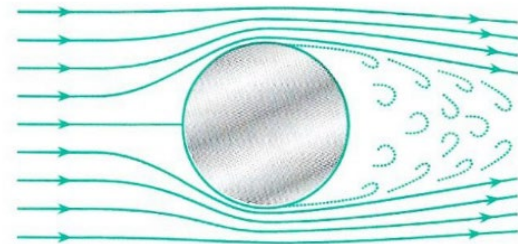
Άτριβη και ιξώδης ροή

- Άτριβη ροή γύρω από στερεό σώμα



- Το ιδανικό ρευστό ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια του στερεού

- Ιξώδης ροή γύρω από στερεό σώμα



- Σχηματισμός οριακού στρώματος κοντά στην επιφάνεια του στερεού
- Αποκόλληση της ροής από την επιφάνεια του στερεού και δημιουργία ολκού (ή απόρρους)
- Έξω από το οριακό στρώμα και τον ολκό, η ροή είναι άτριβη

Εξισώσεις Navier Stokes

- Για **ασυμπίεστα και νευτωνικά ρευστά** με χρήση της υλικής σχέσης του Stokes (Διάλεξη 10)

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right)$$

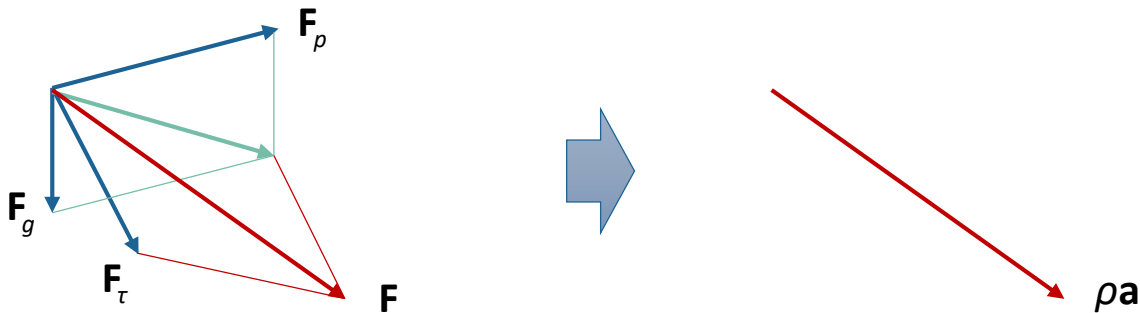
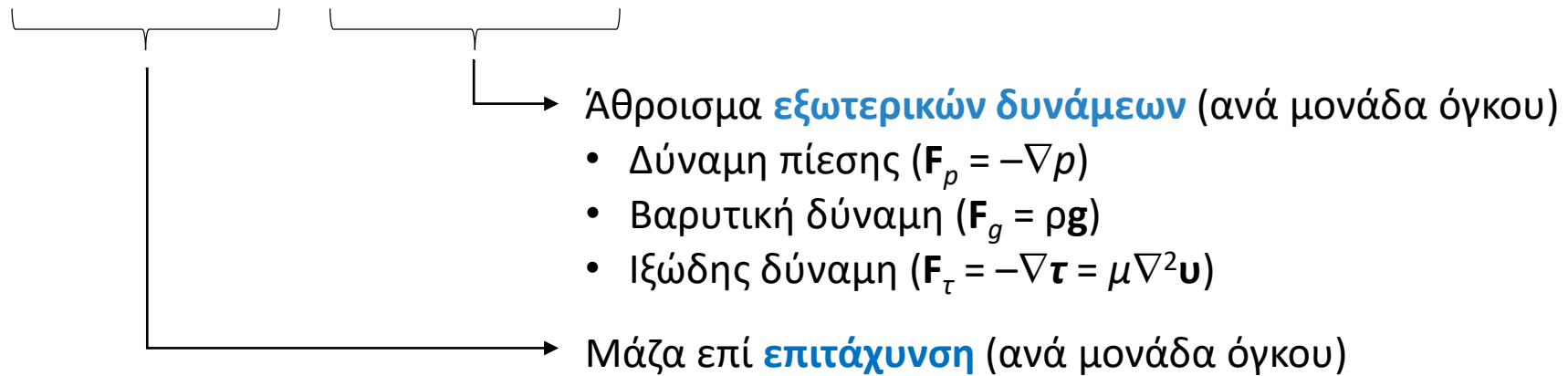
- Μαζί με την εξίσωση συνέχειας αποτελούν ένα κλειστό σύστημα 4 διαφορικών εξισώσεων με 4 αγνώστους (u_x, u_y, u_z, p)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Εξίσωση Navier-Stokes σε διανυσματικό συμβολισμό

- Φυσική σημασία A – Νόμος κίνησης του Newton

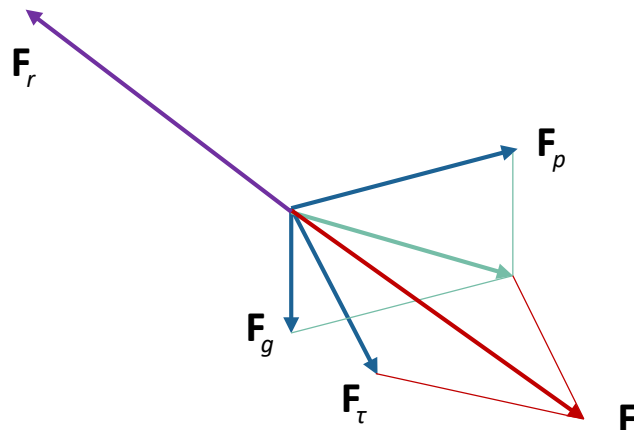
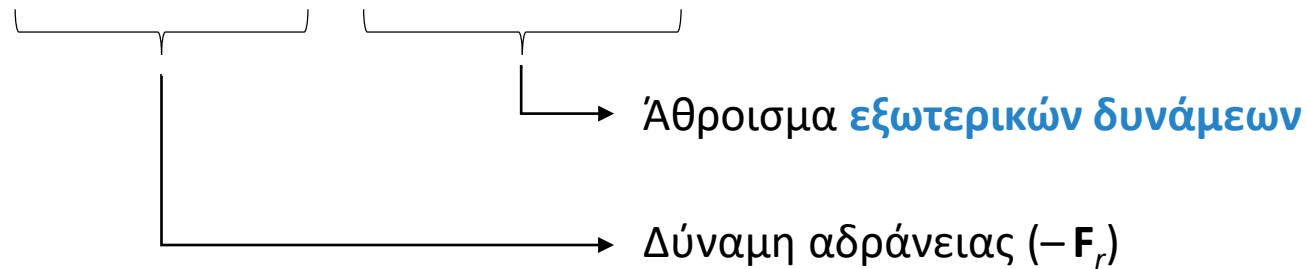
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$



Εξίσωση Navier-Stokes σε διανυσματικό συμβολισμό

- Φυσική σημασία B – Ισορροπία δυνάμεων

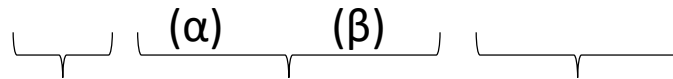
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$



Εξίσωση Navier-Stokes σε διανυσματικό συμβολισμό

- Φυσική σημασία Γ – Ισοζύγιο ορμής

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$



Ρυθμός **παραγωγής** ορμής

Ρυθμός καθαρής **εκροής** ορμής

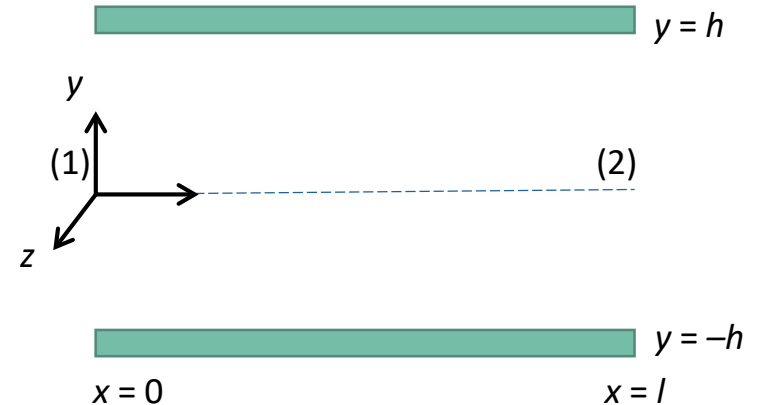
(α) «**Συναγωγή ορμής**» Μη-γραμμικός όρος – Η ταχύτητα τόσο το μέσο που συνάγει μια ποσότητα όσο και την ίδια την ποσότητα

(β) «**Διάχυση ορμής**» βλ. Διάλεξη 9 για Μοριακή Θεώρηση ιξωδών τάσεων

Ρυθμός **συσσώρευσης** ορμής

Αναλυτική λύση N-S 1/10

Μόνιμη στρωτή ροή μεταξύ ακίνητων παράλληλων πλακών απείρου μήκους



Παραδοχές

- | | |
|---------------------------|---|
| 1. Μόνιμη κατάσταση | $\partial/\partial t = 0$ |
| 2. Διδιάστατη ροή | $u_z = 0, \partial/\partial z = 0$ |
| 3. Οριζόντιες πλάκες | $g_x = g_z = 0, g_y = -g$ |
| 4. Πλήρως ανεπτυγμένη ροή | $\partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial x = 0$ |
| 5. Συνθήκη μη-ολίσθησης | $u_x(x, \pm h, z, t) = u_y(x, \pm h, z, t) = 0$ |

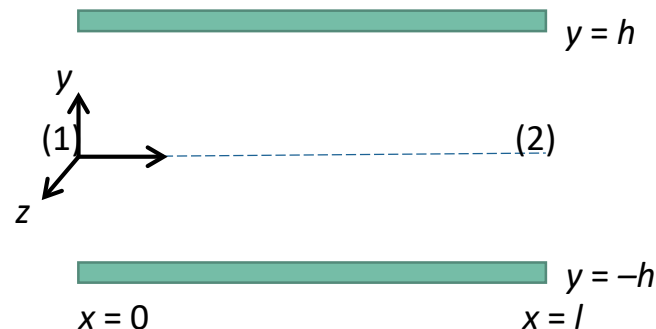
Αναλυτική λύση N-S 2/10

Ζητούμενα για έναν Μηχανικό

- Μέση ταχύτητα $\bar{u}$ (ή ογκομετρικός ρυθμός παροχής $\dot{V} = \bar{u}A$) ως συνάρτηση των παραμέτρων που την επηρεάζουν:

$$\bar{u} = f \left(\begin{array}{ccc} \text{Γεωμετρικά} & \text{Ιδιότητες} & \text{Επιβαλλόμενες} \\ \text{Χαρακτηριστικά} & \text{Ρευστού} & \text{Συνθήκες} \end{array} \right)$$
$$h, l \qquad \rho, \mu \qquad \Delta p = p_1 - p_2$$

- Δύναμη που ασκείται από το ρευστό στις πλάκες



Αναλυτική λύση N-S 3/10

Απλοποίηση εξισώσεων N-S

$$\frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial x}}^{(4)} + \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial y}}^{(5^*)} + \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} = 0$$

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u_x}{\partial t}}^{(1)} + u_x \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial x}}^{(4)} + u_y \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial y}}^{(5^*)} + u_z \frac{\cancel{\partial u_x}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\cancel{\partial^2 u_x}}{\cancel{\partial x^2}}^{(4)} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\cancel{\partial^2 u_x}}{\cancel{\partial z^2}}^{(2)} \right)$$

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u_y}{\partial t}}^{(1)} + u_x \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial x}}^{(4)} + u_y \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial y}}^{(5^*)} + u_z \frac{\cancel{\partial u_y}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\cancel{\partial^2 u_y}}{\cancel{\partial x^2}}^{(4)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_y}}{\cancel{\partial y^2}}^{(5^*)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_y}}{\cancel{\partial z^2}}^{(2)} \right)$$

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial u_z}{\partial t}}^{(1)} + u_x \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial x}}^{(2)} + u_y \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial y}}^{(2)} + u_z \frac{\cancel{\partial u_z}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} \right) = -\frac{\cancel{\partial p}}{\cancel{\partial z}}^{(2)} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\cancel{\partial^2 u_z}}{\cancel{\partial x^2}}^{(2)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_z}}{\cancel{\partial y^2}}^{(2)} + \frac{\cancel{\partial^2 u_z}}{\cancel{\partial z^2}}^{(2)} \right)$$

$$\cancel{u_x(x,y,z,t)}^{(4)}, \cancel{u_y(x,y,z,t)}^{(5^*)}, \cancel{u_z(x,y,z,t)}^{(2)}, \cancel{p(x,y,z,t)}^{(1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} (5^*) \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ u_y(y = \pm h) = 0 \end{array} \right\} u_y = 0$$

Αναλυτική λύση N-S 4/10

Τελική μορφή εξισώσεων

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$$

Εξίσωση x -ορμής $(F_{p,x} + F_{\tau,x} = 0)$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0$$

Εξίσωση y -ορμής $(F_{p,y} + F_{g,y} = 0)$

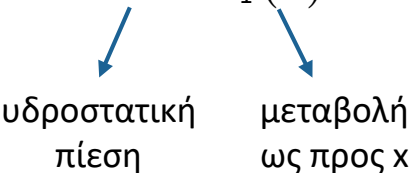
$$u_x(y), \quad p(x,y)$$

Αναλυτική λύση N-S 5/10

Ολοκλήρωση εξίσωσης y -ορμής

Δ.Ε. για τη μεταβολή της p ως προς y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g y + f_1(x)$$



Επειδή ολοκληρώνουμε ως προς y προσθέτουμε μια συνάρτηση μόνο του x

υδροστατική πίεση μεταβολή ως προς x

επίσης

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) = \frac{d}{dx} f_1(x) \quad (= f_2(x))$$

δηλαδή η $\partial p / \partial x$ δεν εξαρτάται από το y (θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια)

Αναλυτική λύση N-S 6/10

Ολοκλήρωση εξίσωσης x-ορμής

Δ.Ε. για τη μεταβολή της u_x ως προς y

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 u_x}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \Rightarrow u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2$$

Οριακές συνθήκες:
(μη-ολίσθηση)

$$u_x(h) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2 + c_1 h + c_2 = 0$$
$$u_x(-h) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (-h)^2 - c_1 h + c_2 = 0$$



$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h^2$$

Επομένως:

$$u_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (h^2 - y^2)$$

Αναλυτική λύση N-S 7/10

Βαθμίδα πίεσης

- Επειδή $u_x > 0$ (κατά τη θετική φορά του x) $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} < 0$
- Επειδή η u_x δε μεταβάλλεται κατά x (πλήρως ανεπτυγμένη) $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \text{σταθερή}$



Αν $\Delta p = p_1 - p_2$ είναι η πτώση πίεσης μεταξύ δύο σημείων της ίδιας ροϊκής γραμμής (ίδιου y) που απέχουν (κατά x) απόσταση l :

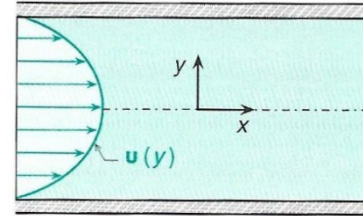
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{l}$$

Αναλυτική λύση N-S 8/10

Κατανομή ταχύτητας

$$u_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} (h^2 - y^2)$$

- Παραβολικό προφίλ
- Μηδενική ταχύτητα για $y = \pm h$
- Μέγιστη ταχύτητα για $y = 0$



$$u_{max} = \frac{h^2 \Delta p}{2\mu l}$$

Ογκομετρικός ρυθμός παροχής

$$\dot{V} = \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_A u_x dA = \int_{-h}^h \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} (h^2 - y^2) dy \Rightarrow$$

$$\dot{V} = \frac{2h^3 \Delta p}{3\mu l} \text{ σε } \frac{\text{m}^3/\text{s}}{\text{m βάθους}}$$

Αναλυτική λύση N-S 9/10

Μέση ταχύτητα

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{2h(1)} \Rightarrow \bar{u} = \frac{h^2 \Delta p}{3\mu l}$$

Παρατήρηση: $\frac{u_{max}}{\bar{u}} = \frac{3}{2}$

Κατανομή πίεσης

$$p = -\rho g y + f_1(x)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d}{dx} f_1(x) = -\frac{\Delta p}{l} \Rightarrow f_1(x) = -\frac{\Delta p}{l} x + c$$



$$p = -\rho g y - \frac{\Delta p}{l} x + c$$

- Η σταθερά c απαιτείται μόνο για υπολογισμούς απόλυτης τιμής της πίεσης και όχι διαφορών πίεσης
- Για τον προσδιορισμό της c πρέπει να είναι γνωστή η τιμή της πίεσης σε κάποιο σημείο

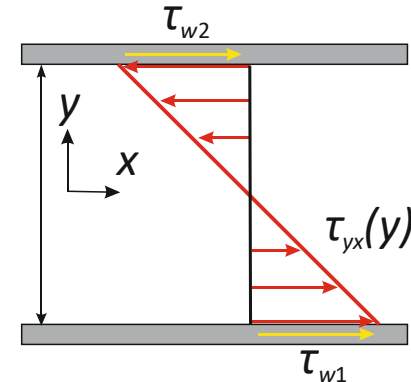
π.χ. για $x = 0, y = 0 \rightarrow p = p_0$ και:

$$p = -\rho g y - \frac{\Delta p}{l} x + p_0$$

Αναλυτική λύση N-S 10/10

Κατανομή διατμητικών τάσεων

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} \Rightarrow \tau_{yx}(y) = -\frac{\Delta p}{l\mu} y$$



- Η τάση μηδενίζεται στο $y = 0$ (μηδενική βαθμίδα u_x)
- Η τάση παίρνει μέγιστη (απόλυτη) τιμή στα $y = \pm h$

Η τάση που ασκεί το ρευστό στα τοιχώματα της κάθε πλάκας είναι:

$$\tau_w = \tau_{yx}(-h) = -\tau_{yx}(h) \Rightarrow \tau_w = \frac{\Delta p h}{l\mu}$$