

Ρευστομηχανική

16^η Διάλεξη

Διαφορική ανάλυση ροής

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Νόμος διατήρησης της μάζας

- Για σύστημα

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_\Sigma = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{Dm}{Dt} = 0$$

- Για όγκο ελέγχου

$$\frac{\partial m_{OE}}{\partial t} + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0$$

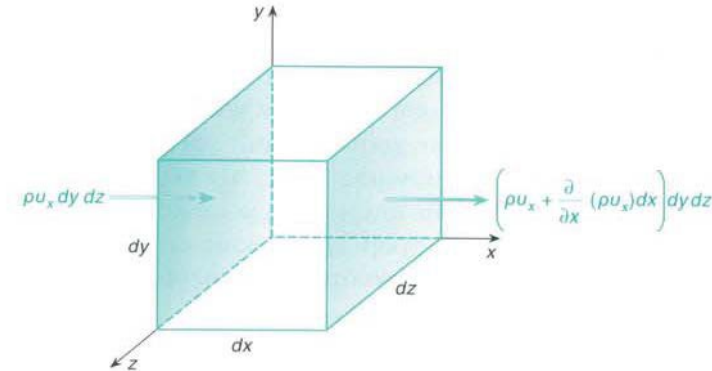
- Φραστική διατύπωση

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός συσσώρευσης} \\ \text{μάζας στον ΟΕ} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εκροής} \\ \text{μάζας στον ΟΕ} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός εισροής} \\ \text{μάζας στον ΟΕ} \end{array} \right\} = 0$$

Διατήρησης μάζας σε απειροστό ΟΕ

- Ρυθμός συσσώρευσης μάζας

$$\frac{\partial m_{OE}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$



- Ρυθμός εισροής μάζας (κατά τη x -διεύθυνση)

$$\dot{m}_{in,x} = (\rho u A)_x = \rho u_x dy dz$$

- Ρυθμός εκροής μάζας (κατά τη x -διεύθυνση)

$$\dot{m}_{out,x} = (\rho u A)_{x+dx} = \left(\rho u_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) dx \right) dy dz$$

- Ρυθμός εκροής – ρυθμός εισροής μάζας (κατά τη x -διεύθυνση)

$$\dot{m}_{out,x} - \dot{m}_{in,x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) dx dy dz$$

Εξίσωση συνέχειας

- Συνολικό ρυθμός εκροής – ρυθμός εισροής μάζας

$$\begin{aligned}\dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} &= (\dot{m}_{out,x} - \dot{m}_{in,x}) + (\dot{m}_{out,y} - \dot{m}_{in,y}) + (\dot{m}_{out,z} - \dot{m}_{in,z}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) dx dy dz\end{aligned}$$

Διαφορική εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

ρυθμός **καθαρής εκροής** μάζας (εισροή – εκροή)
(ανά μονάδα όγκου)

ρυθμός **συσσώρευσης** μάζας (ανά μονάδα όγκου)

Εξίσωση συνέχειας σε διανυσματικό συμβολισμό

- Τελεστής ∇

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

- Απόκλιση (div)

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i} \rho u_x + \mathbf{j} \rho u_y + \mathbf{k} \rho u_z) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)$$

Εξίσωση συνέχειας σε διανυσματικό συμβολισμό

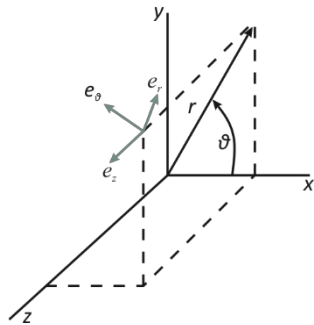
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

└── ρυθμός **καθαρής εκροής** μάζας (εισροή – εκροή)
(ανά μονάδα όγκου)

└── ρυθμός **συσσώρευσης** μάζας (ανά μονάδα όγκου)

Εξίσωση συνέχειας σε κυλινδρικές συντεταγμένες

- Διανυσματικοί τελεστές σε κυλινδρικές συντεταγμένες



Βαθμίδα

$$\nabla \psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Απόκλιση

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Τελεστής Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

- Διαφορική εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) = 0$$

Ειδικές μορφές εξίσωσης συνέχειας

- Μόνιμη ροή

Διανυσματική μορφή

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho u_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

- Ασυμπίεστη ροή

Διανυσματική μορφή

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(u_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z) = 0$$

Παράδειγμα 1

Έλεγχος έκφρασης πεδίου ταχύτητας

Το πεδίο πυκνότητας μιας διδιάστατης ροής ρευστού μεταβάλλεται γραμμικά με το y σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\rho = a - by$$

όπου a και b είναι μη-μηδενικές σταθερές.

Να εξεταστεί αν το πεδίο ταχύτητας της συγκεκριμένης ροής μπορεί να έχει τη μορφή:

$$\mathbf{u} = 2cx\mathbf{i} - cy\mathbf{j}$$

όπου c μη-μηδενική σταθερά.

Παράδειγμα 1 – Λύση 1/2

Οι αναλυτικές εκφράσεις του πεδίου πυκνότητας και του πεδίου ταχύτητας μιας ροής πρέπει να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση συνέχειας. Για μια διδιάστατη ροή, σε καρτεσιανές συντεταγμένες (επειδή η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες), η εξίσωση συνέχειας έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = 0$$

Εξετάζεται ο κάθε όρος της παραπάνω εξίσωσης.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(a - by) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) = \frac{\partial}{\partial x}[(a - by)2cx] = \frac{\partial}{\partial x}(2acx - 2bcxy) = 2ac - 2bcy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = \frac{\partial}{\partial y}[(a - by)(-cy)] = \frac{\partial}{\partial y}(-acy + bcy^2) = -ac + 2bcy$$

Παράδειγμα 1 – Λύση 2/2

Επομένως:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) = 0 + (2ac - 2bcy) + (-ac + 2bcy) = ac$$

Επειδή $a \neq 0$ και $c \neq 0 \Rightarrow ac \neq 0$

Δηλαδή η διαφορική εξίσωση συνέχειας δεν ικανοποιείται και το πεδίο ταχύτητας δεν μπορεί να έχει τη συγκεκριμένη μορφή.

Δεύτερος νόμος κίνησης του Newton

- Για σύστημα

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma} = \frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \frac{Dm\mathbf{u}}{Dt} = m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = m\mathbf{a} \quad \text{διανυσματική εξίσωση}$$

- Καρτεσιανές συνιστώσες

$$F_x = ma_x \quad F_y = ma_y \quad F_z = ma_z$$

- Για απειροστό όγκο ελέγχου ($m = dm = \rho dV = \rho dx dy dz$)

$$dF_x = \rho a_x dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$dF_y = \rho a_y dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$dF_z = \rho a_z dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Για την
έκφραση της
επιτάχυνσης
σωματιδίου
βλ. Διάλεξη 7

Σωματικές δυνάμεις

- Βαρυτική δύναμη

$$d\mathbf{F}_g = dm\mathbf{g} = \mathbf{g} \rho dV = \mathbf{g} \rho dx dy dz$$

- Καρτεσιανές συνιστώσες

$$dF_{g,x} = g_x \rho dx dy dz$$

$$dF_{g,y} = g_y \rho dx dy dz$$

$$dF_{g,z} = g_z \rho dx dy dz$$

Επιφανειακές δυνάμεις – 1/3

- Συνολική επιφανειακή δύναμη

$$d\mathbf{F}_s = \mathbf{i}dF_{s,x} + \mathbf{j}dF_{s,y} + \mathbf{k}dF_{s,z}$$

- Οι επιφανειακές δυνάμεις είναι αποτέλεσμα των (επιφανειακών) τάσεων
- Δυαδικός τάσεων
 - Υδροστατική πίεση
 - Ιξώδεις τάσεις

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Για την έκφραση
του δυαδικού τάσης
βλ. Διάλεξη 9

Επιφανειακές δυνάμεις – 2/3

- Επιφανειακή δύναμη κατά τη x-διεύθυνση

$$dF_{s,x} = \left(dF_{(+x)x} - dF_{(-x)x} \right) \quad \text{Δύναμη που ασκείται στις x-επιφάνειες}$$

$$+ \left(dF_{(+y)x} - dF_{(-y)x} \right) \quad \text{Δύναμη που ασκείται στις y- επιφάνειες}$$

$$+ \left(dF_{(+z)x} - dF_{(-z)x} \right) \quad \text{Δύναμη που ασκείται στις z- επιφάνειες}$$

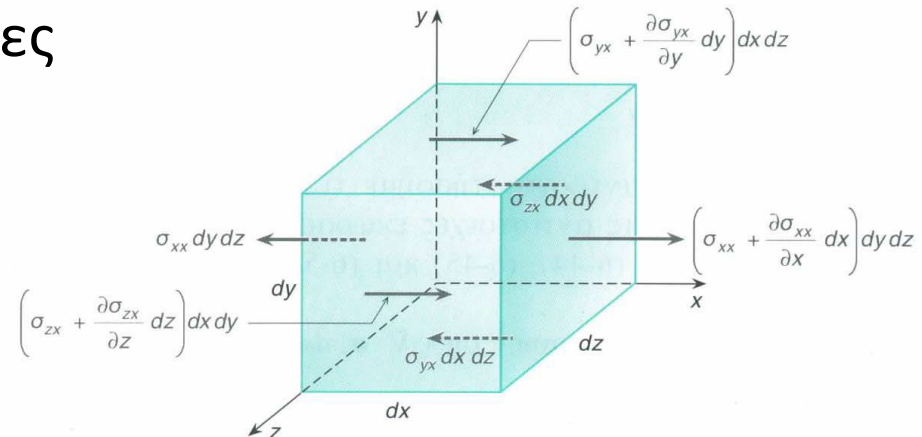
- Δύναμη κατά x σε x-επιφάνειες

$$dF_{(-x)x} = \sigma_{xx} dy dz$$

$$dF_{(+x)x} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz$$



$$\left(dF_{(+x)x} - dF_{(-x)x} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz$$

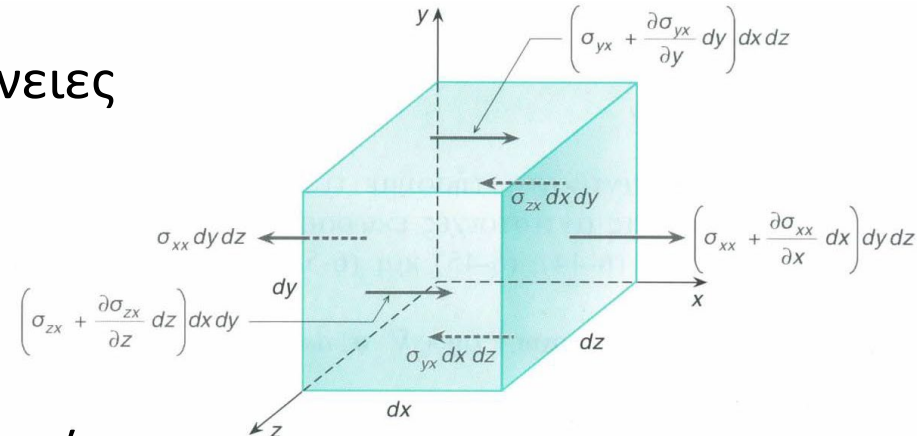


Επιφανειακές δυνάμεις – 3/3

- Δύναμη κατά x σε y- και z-επιφάνειες

$$\left(dF_{(+y)x} - dF_{(-y)x} \right) = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

$$\left(dF_{(+z)x} - dF_{(-z)x} \right) = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$



- Συνολική επιφανειακή δύναμη κατά x

$$dF_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

- Επιφανειακές δυνάμεις κατά y και z

$$dF_{s,y} = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$dF_{s,z} = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Εξισώσεις ορμής

- Εξίσωση x-ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

- Εξίσωση y-ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

- Εξίσωση z-ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Εξίσωση ορμής σε διανυσματικό συμβολισμό

- Φυσική σημασία – Νόμος κίνησης του Newton

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Άθροισμα **εξωτερικών δυνάμεων** (ανά μονάδα όγκου)

- Δύναμη πίεσης ($\mathbf{F}_p = -\nabla p$)
- Βαρυτική δύναμη ($\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g}$)
- Ιξώδης δύναμη ($\mathbf{F}_\tau = -\nabla \boldsymbol{\tau}$)

Μάζα επί **επιτάχυνση** (ανά μονάδα όγκου)

