

Ρευστομηχανική

15^η Διάλεξη

Μακροσκοπική εξίσωση ενέργειας

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Πρώτος θερμοδυναμικός νόμος

Η διαφορά μεταξύ καθαρού ποσού θερμότητας που προστίθεται σε ένα σύστημα από το περιβάλλον (δQ) και του καθαρού ποσού έργου που αποδίδεται από το σύστημα στο περιβάλλον (δW) κατά τη διάρκεια μιας απειροστής διεργασίας είναι ίση με τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος (dE)

$$\delta Q - \delta W = dE \quad \text{ή} \quad \dot{Q} - \dot{W} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_\Sigma$$

Μονάδες $Q, W, E \equiv \text{J}$

Μονάδες $\dot{Q}, \dot{W} \equiv \text{W} = \text{J/s}$

- Σύμβαση για το πρόσημο της θερμότητας και του έργου



$Q - W =$ Συνολική ενέργεια που προστίθεται στο σύστημα (με τη μορφή θερμότητας και έργου)

$$Q - W = \left(\sum Q_{in} + \sum W_{in} \right) - \left(\sum Q_{out} + \sum W_{out} \right)$$

Μακροσκοπική εξίσωση ενέργειας

- Εφαρμογή θεωρήματος μεταφοράς για $B = E$ και $b = e = E/m$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} ep dV + \oint_{EE} ep(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ρυθμός καθαρής εκροής ενέργειας από τον ΟΕ διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου

Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ρευστού που περιέχεται στον ΟΕ (ρυθμός συσσώρευσης ενέργειας στον ΟΕ)

Ρυθμός πρόσδοσης θερμότητας και έργου στον ΟΕ

Μορφές ενέργειας

- **Δυναμική ενέργεια**

Λόγω θέσης σε ένα δυναμικό πεδίο (π.χ. βαρύτητας)

$$e_\delta = g z$$

z : απόσταση κέντρου μάζας ρευστού από επίπεδο αναφοράς όπου η δυναμική ενέργεια θεωρείται μηδενική

- **Κινητική ενέργεια**

Λόγω ταχύτητας

$$e_k = \frac{u^2}{2}$$

u : ταχύτητα ρευστού ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς

- **Εσωτερική ενέργεια**

Κινητική και δυναμική ενέργεια των μορίων

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\rho, T)$$

- **Ειδική ενέργεια (συνολική)**

$$e = \tilde{u} + \frac{u^2}{2} + g z$$

Μορφές έργου

- **Αξονικό έργο** (shaft work)

Έργο που παράγεται (θετικό) ή προσφέρεται (αρνητικό) στο ρευστό από τμήματα της επιφάνειας όπου δεν υπάρχει ροή (π.χ. στρόβιλος, αντλία)

$$\dot{W}_s$$

- **Έργο κάθετων τάσεων** (normal stress work)

Έργο των δυνάμεων που είναι κάθετες (δυνάμεις πίεσης) στα τμήματα της επιφάνειας ελέγχου όπου υπάρχει ροή

$$\dot{W}_p = \oint_{EE} p(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

- **Έργο διατμητικών τάσεων** (shear stress work)

Έργο των δυνάμεων που είναι εφαπτομενικές στα τμήματα της επιφάνειας ελέγχου όπου υπάρχει ροή (μηδενικό αν ο ΟΕ επιλεγεί έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι κάθετη στις επιφάνειες)

$$\dot{W}_\tau \approx 0$$

Μορφές εξίσωσης ενέργειας

- Γενική μορφή

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} e \rho dV + \oint_{EE} \left(\tilde{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z \right) \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

- Μόνιμη ροή, πολλαπλές εισοδοι και έξοδοι, ομοιόμορφες ιδιότητες** στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \sum_{out} \dot{m}_{out} \left(\tilde{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z \right)_{out} - \sum_{in} \dot{m}_{in} \left(\tilde{u} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + g z \right)_{in}$$

- Μία είσοδος και μία έξοδος** ($\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} = \dot{m}$)

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} \left(\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} + \left(\frac{p}{\rho} \right)_{out} - \left(\frac{p}{\rho} \right)_{in} + \frac{u_{out}^2 - u_{in}^2}{2} + g(z_{out} - z_{in}) \right)$$

- Ασυμπίεστη ροή**

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} \left(\tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} + \frac{p_{out} - p_{in}}{\rho} + \frac{u_{out}^2 - u_{in}^2}{2} + g(z_{out} - z_{in}) \right) \quad \text{σε } W = J/s$$

Εξίσωση ενέργειας και απώλειες ενέργειας

- Διαιρώντας με $\dot{m}$

$$\tilde{u}_{in} + \frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \tilde{u}_{out} + \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out} + w_s - q$$

$$w_s = \dot{W} / \dot{m}$$

$$q = \dot{Q} / \dot{m}$$

- Εναλλακτικά

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out} + w_s + w_l$$

σε J/kg

- Απώλειες ενέργειας (απωλεσθέν έργο)

$$w_l = \tilde{u}_{out} - \tilde{u}_{in} - q$$

- Έργο των τριβών στο εσωτερικό του ρευστού λόγω ανάπτυξης ιξωδών τάσεων
- Προκαλούν αύξηση της εσωτερική ενέργειας (και της θερμοκρασίας) σε αδιάθερμες διεργασίες και μεταφορά θερμότητας στο περιβάλλον σε ισοθερμοκρασιακές διεργασίες

Εξίσωση Bernoulli

- Εξίσωση ενέργειας χωρίς αξονικό έργο

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out} + w_l$$

- Ιδανικά ρευστά $\Rightarrow$ απουσία ιξωδών τάσεων $\Rightarrow w_l = 0$

$$\frac{p_{in}}{\rho} + \frac{u_{in}^2}{2} + gz_{in} = \frac{p_{out}}{\rho} + \frac{u_{out}^2}{2} + gz_{out}$$

Εξίσωση Bernoulli

- Συνθήκες εφαρμογής εξίσωσης Bernoulli
 - Μόνιμη ροή
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ιδανικό ρευστό (ή εφαρμογή κατά μήκος μιας τροχιάς/ροϊκής γραμμής)

Παράδειγμα 1

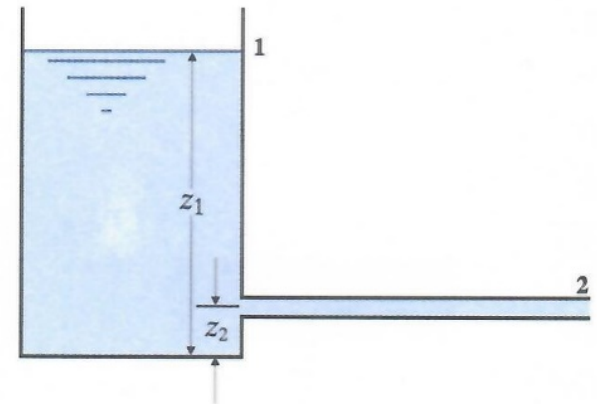
Ρυθμός εκροής από δεξαμενή

Η ελεύθερη επιφάνεια σε μια ανοιχτή δεξαμενή βρίσκεται σε ύψος $z_1 = 100 \text{ m}$. Σε ύψος $z_2 = 0.5 \text{ m}$ από τον πυθμένα της δεξαμενής υπάρχει οριζόντιος σωλήνας απορροής νερού διαμέτρου $D = 20 \text{ cm}$.

Να υπολογιστεί ο ρυθμός εκροής μάζας του νερού αν

- i) θεωρηθεί ιδανικό ρευστό,
- ii) οι απώλειες ενέργειας είναι $w_l = 20 \text{ J/kg}$.

Η πυκνότητα του νερού είναι 1000 kg/m^3



Παράδειγμα 2 – Λύση 1/2

Ανάλυση

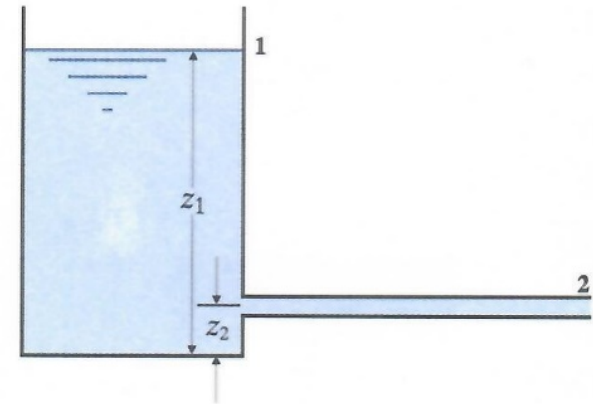
Επιλέγεται ο όγκος ελέγχου που περιλαμβάνει τη δεξαμενή και τον σωλήνα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζεται η εξίσωση ενέργειας για ασυμπίεστο ρευστό, χωρίς αξονικό έργο με επιφάνεια εισόδου (in) την 1 και επιφάνεια εξόδου (out) την 2:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + w_i$$

Όπου:

- $p_1 = p_2 = p_{\text{ατμοσφ}}$
- $u_1 = A_2/A_1 \cdot u_2 \approx 0$ (αμελητέα σε σχέση με την u_2)



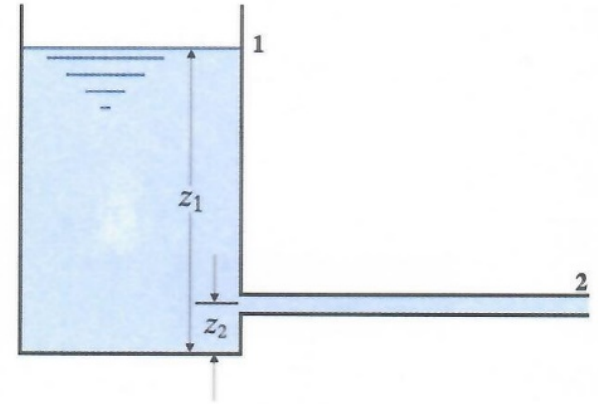
Παράδειγμα 2 – Λύση 2/2

Επομένως:

$$gz_1 = \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + w_l \Rightarrow u_2 = \sqrt{2(g(z_1 - z_2) - w_l)}$$

και:

$$\dot{m}_2 = \rho u_2 A_2 = \rho u_2 A_2 \pi D^2 / 4$$



Εφαρμογή

(i) Ιδανικό ρευστό $\Rightarrow w_l = 0$:

$$u_2 = \sqrt{2 \times (9.81 \times (100 - 0.5))} = 44.18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{m}_2 = 1000 \times 44.18 \times \pi \times 0.2^2 / 4 = 1387.8 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

(ii) Ιξώδεις ρευστό $\Rightarrow w_l = 20 \text{ J/kg}$:

$$u_2 = \sqrt{2 \times (9.81 \times (100 - 0.5) - 20)} = 43.72 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{m}_2 = 1000 \times 43.72 \times \pi \times 0.2^2 / 4 = 1373.5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Παράδειγμα 2

Έργο και απόδοση ανεμιστήρα

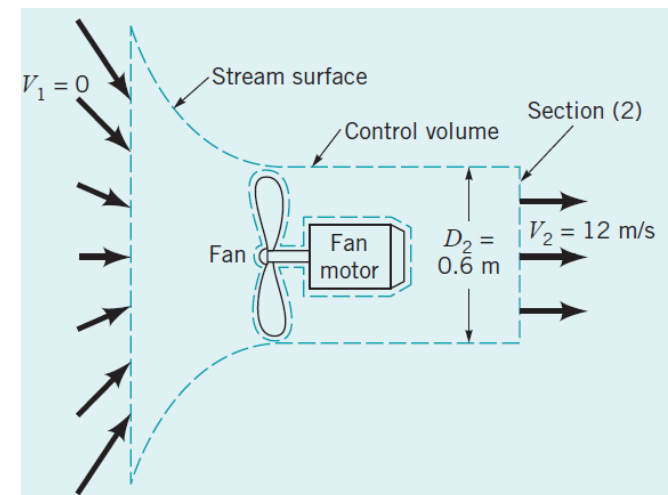
Ένας ανεμιστήρας εξαερισμού καταναλώνει 0.4 kW ισχύος και προκαλεί ένα οριζόντιο ρεύμα αέρα διαμέτρου 0.6 m και ταχύτητας 12 m/s. Η ταχύτητα του αέρα ανάντη του ανεμιστήρα είναι αμελητέα. Να υπολογιστούν:

- i) Το χρήσιμο έργο που παράγεται από τον ανεμιστήρα.
- ii) Το αξονικό έργο και οι απώλειες θερμότητας.
- iii) Ο βαθμός απόδοσης του ανεμιστήρα.
- iv) Η μεταβολή της θερμοκρασίας του αέρα.

Ιδιότητες αέρα:

Πυκνότητα 1.23 kg/m^3

Ειδική θερμότητα $1 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$



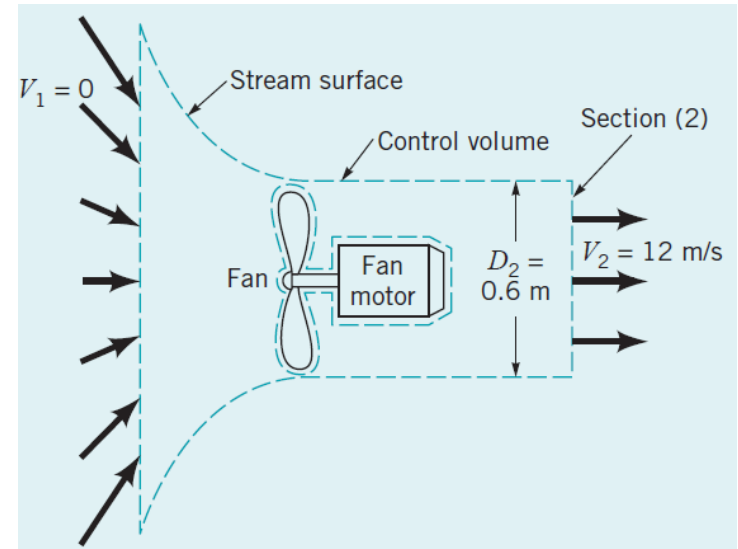
Παράδειγμα 2 – Λύση 1/3

(i) Υπολογισμός χρήσιμου έργου

Επιλέγεται ο όγκος ελέγχου όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι πάνω και κάτω επιφάνειες είναι ροϊκές γραμμές, επομένως δεν υπάρχει ροή αέρα από αυτές.

Εφαρμόζεται η εξίσωση ενέργειας για ασυμπίεστο ρευστό με επιφάνεια εισόδου (in) την 1 και επιφάνεια εξόδου (out) την 2:

$$\begin{array}{c} p_1 = p_2 = p_{\text{ατμοσφ}} \\ \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + w_s + w_l \Rightarrow w_s + w_l = -\frac{u_2^2}{2} \\ u_1 = 0 \quad z_1 = z_2 \text{ (οριζόντια ροή)} \end{array}$$



Παράδειγμα 2 – Λύση 2/3

Αριθμητική εφαρμογή:

$$w_s + w_l = -\frac{u_2^2}{2} = -\frac{12^2}{2} = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

w_s : Αξονικό έργο ανεμιστήρα (< 0 γιατί προστίθεται στον αέρα)

w_l : Απώλειες ενέργειας (> 0)

$|w_s + w_l|$: Χρήσιμο έργο που προστίθεται στον αέρα

Επομένως:

$$\text{χρήσιμο έργο} = w_{\text{useful}} = 72 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 3/3

(ii) Υπολογισμός αξονικού έργου και απωλειών ενέργειας

Το ειδικό έργο που παράγει ο ανεμιστήρας w_{fan} υπολογίζεται από την ισχύ λειτουργίας του και το ρυθμό ροής αέρα που παράγεται:

$$w_{fan} = \frac{P_{fan}}{\dot{m}} = \frac{P_{fan}}{\rho A u_2} = \frac{P_{fan}}{\rho (\pi D^2/4) u_2} = \frac{0.4}{1.23 \times (\pi \times 0.6^2/4) \times 12} = 95.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Το έργο αυτό προστίθεται στο σύστημα (αέρας), επομένως το αξονικό έργο είναι:

$$w_s = -w_{fan} = -95.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Το έργο απωλειών υπολογίζεται ως:

$$w_s + w_l = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \Rightarrow w_l = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}} - w_s = -72 \frac{\text{J}}{\text{kg}} - \left(-95.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right) = 23.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 3/3

(iii) Υπολογισμός απόδοσης

Ο συντελεστής απόδοσης ορίζεται ως:

$$\eta = \frac{\text{χρήσιμο έργο}}{\text{έργο ανεμιστήρα}} = \frac{w_{\text{useful}}}{w_{\text{fan}}} = \frac{72}{95.8} = 0.752 = 75.2\%$$

(iv) Μεταβολή θερμοκρασίας αέρα

Αν υποθέσουμε αδιαβατική διεργασία (ο αέρας δεν προλαβαίνει να ανταλλάξει θερμότητα με το περιβάλλον), το έργο απωλειών έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της εσωτερική ενέργειας του αέρα και επομένως της θερμοκρασία του

$$\dot{W}_l = \dot{m}c_p\Delta T \Rightarrow w_l = c_p\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{w_l}{c_p} = \frac{23.8}{1000} = 0.0238^\circ\text{C}$$