

Ρευστομηχανική

14^η Διάλεξη

Εφαρμογές της εξίσωσης ορμής

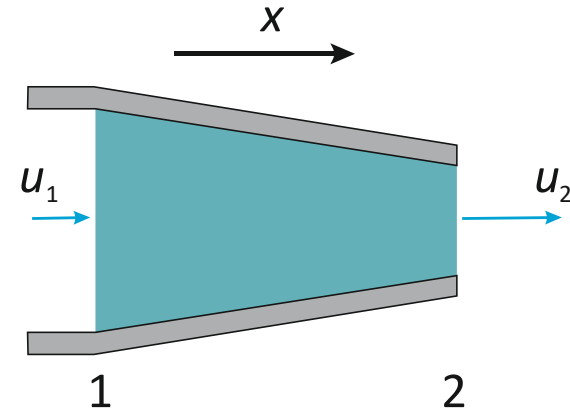
Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Δύναμη σε ακροφύσιο 1/6

Οριζόντιο συγκλίνον ακροφύσιο

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ομοιόμορφη ταχύτητα στις διατομές εισόδου και εξόδου (u_1 και u_2)
 - Ομοιόμορφη πίεση στις διατομές εισόδου και εξόδου (p_1 και p_2)
- Ζητούμενα
 - (α) Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο ακροφύσιο
 - (β) Η δύναμη στήριξης του ακροφυσίου



Δύναμη σε ακροφύσιο 2/6

(α) Δύναμη που ασκείται από το ρευστό στο ακροφύσιο

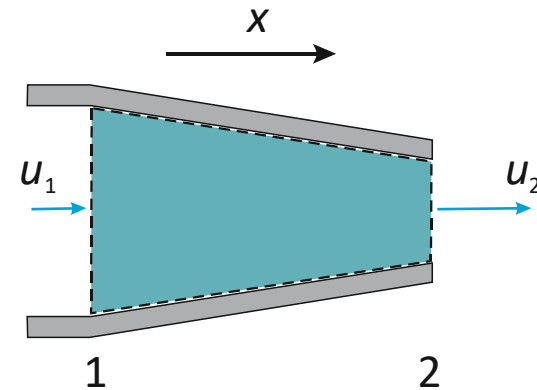
- Όγκος ελέγχου
 - Περιοχή ροής ρευστού μεταξύ διατομών 1 και 2
 - Η επιφάνεια ελέγχου δεν τέμνει τα στερεά τοιχώματα

- Εξίσωση συνέχειας

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \Rightarrow \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

- Εξίσωση ορμής
 - Η μόνη μη-μηδενική συνιστώσα της ταχύτητας (και της ορμής) είναι κατά τη διεύθυνση x , οπότε η δύναμη που ασκείται στον όγκο ελέγχου είναι κατά την ίδια διεύθυνση

$$F_x = \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_1 u_1 = \rho u_2 A_2 u_2 - \rho u_1 A_1 u_1 = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$



Δύναμη σε ακροφύσιο 3/6

- Η δύναμη F_x αποτελείται από:
 - Δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου

$$F_{p,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2$$

- Συνισταμένη δύναμη R_x που ασκείται από τα τοιχώματα του ακροφυσίου στο ρευστό του ΟΕ

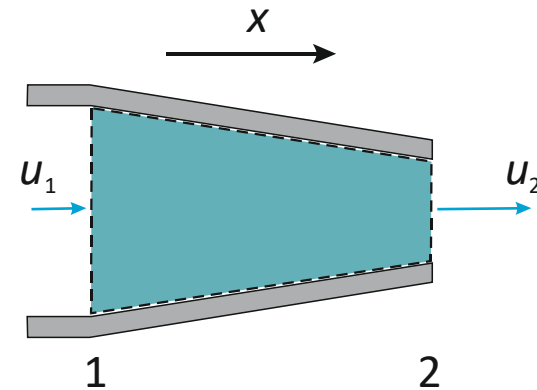
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής

$$F_{p,x} + R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 + R_x = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$

επομένως

$$R_x = -p_1 A_1 + p_2 A_2 - \rho A_1 u_1^2 + \rho A_2 u_2^2$$

$$R_x = -p_1 A_1 + p_2 A_2 - \dot{m}(u_1 - u_2)$$



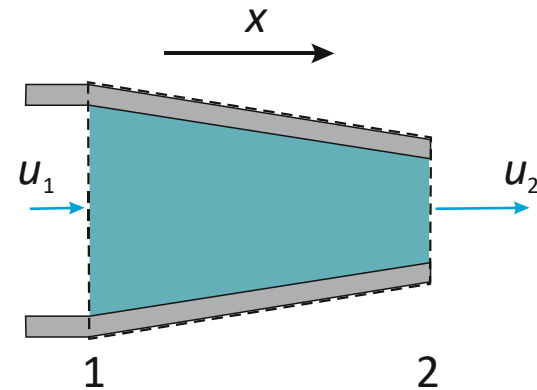
Δύναμη σε ακροφύσιο 4/6

- Δύναμη στο ακροφύσιο
 - Η δύναμη που ασκείται στα τοιχώματα του ακροφυσίου ($F_{w,x}$) είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με τη R_x

$$F_{w,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \dot{m}(u_1 - u_2)$$

(β) Δύναμη στήριξης του ακροφυσίου

- Όγκος ελέγχου
 - Περιοχή ροής ρευστού μεταξύ διατομών 1 και 2 μαζί με το ακροφύσιο
 - Η επιφάνεια ελέγχου τέμνει τα στερεά τοιχώματα



Δύναμη σε ακροφύσιο 5/6

- Εξίσωση συνέχειας. Δεν διαφοροποιείται από την προηγούμενη περίπτωση:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \Rightarrow \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

- Εξίσωση ορμής

$$F_x = \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_1 u_1 = \rho u_2 A_2 u_2 - \rho u_1 A_1 u_1 = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$

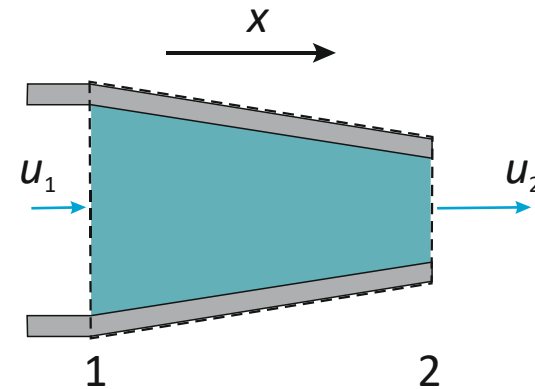
- Η δύναμη F_x αποτελείται από:

- Δυνάμεις πίεσης

- Ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου και στις επιφάνειες του ακροφυσίου
- Στις επιφάνειες του ακροφυσίου ασκείται ατμοσφαιρική πίεση
- Η συνισταμένη των δυνάμεων ατμοσφαιρικής πίεσης (σε όλη την κλειστή επιφάνεια ελέγχου) είναι μηδέν
- Επομένως, αφαιρείται η ατμοσφαιρική πίεση και μένουν μόνο οι σχετικές (μανομετρικές) πιέσεις που ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου

$$F_{p^*,x} = p_1^* A_1 - p_2^* A_2 \quad \text{όπου} \quad p_1^* = p_1 - p_b, \quad p_2^* = p_2 - p_b$$

- Δύναμη στήριξης $F_{A,x}$ που ασκείται στον ΟΕ



Δύναμη σε ακροφύσιο 6/6

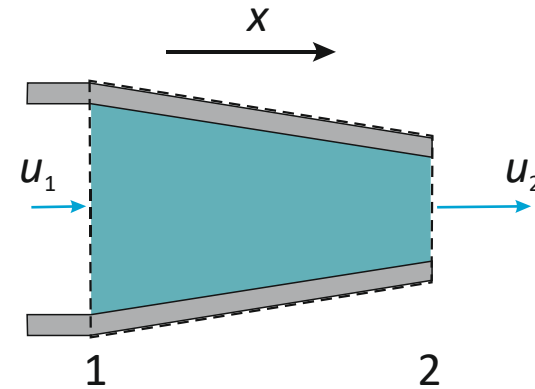
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής

$$F_{p^*,x} + F_{A,x} = p_1^* A_1 - p_2^* A_2 + F_w = \rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2$$

επομένως

$$F_{A,x} = -p_1^* A_1 + p_2^* A_2 - \rho A_1 u_1^2 + \rho A_2 u_2^2$$

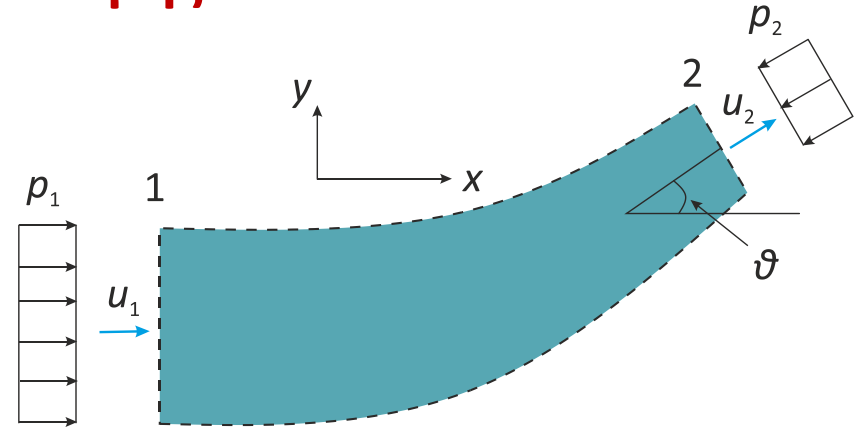
$$F_{A,x} = -p_1^* A_1 + p_2^* A_2 - \dot{m}(u_1 - u_2)$$



Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 1/4

Καμπύλος αγωγός μεταβλητής διατομής

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ομοιόμορφη ταχύτητα στις διατομές εισόδου και εξόδου (u_1 και u_2)
 - Ομοιόμορφη πίεση στις διατομές εισόδου και εξόδου (p_1 και p_2)
- Ζητούμενο
 - Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στον αγωγό
- Όγκος ελέγχου
 - Περιοχή ροής ρευστού μεταξύ διατομών 1 και 2 (βλ. σχήμα)



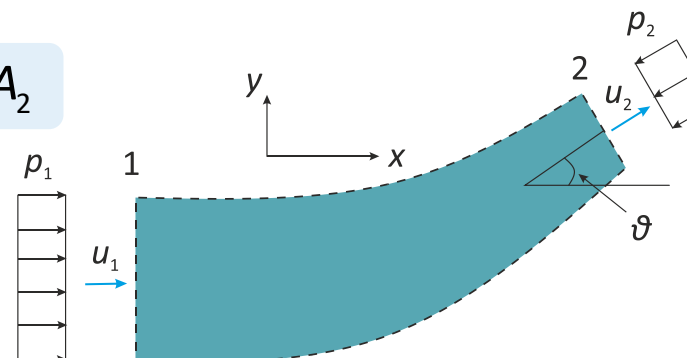
Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 2/4

- Εξίσωση συνέχειας

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \Rightarrow \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Rightarrow u_1 A_1 = u_2 A_2$$

- Εξισώσεις ορμής

- Η ταχύτητα (και η ορμή) μεταβάλλεται κατά τις x και y διευθύνσεις

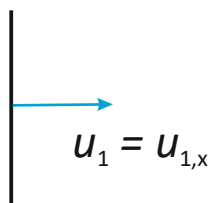


$$F_x = \dot{m}_2 u_{2,x} - \dot{m}_1 u_{1,x} = \rho u_2 A_2 u_{2,x} - \rho u_1 A_1 u_{1,x} = \dot{m} (u_{2,x} - u_{1,x})$$

$$F_y = \dot{m}_2 u_{2,y} - \dot{m}_1 u_{1,y} = \rho u_2 A_2 u_{2,y} - \rho u_1 A_1 u_{1,y} = \dot{m} (u_{2,y} - u_{1,y})$$

- Ταχύτητες

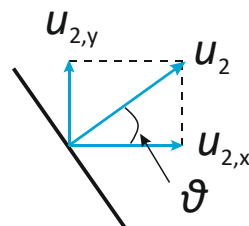
Διατομή 1



$$u_{1,x} = u_1 \quad (+)$$

$$u_{1,y} = 0$$

Διατομή 2



$$u_{2,x} = u_2 \cos \vartheta \quad (+)$$

$$u_{2,y} = u_2 \sin \vartheta \quad (+)$$

Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 3/4

- Οι δυνάμεις F_x και F_y αποτελούνται από:
 - Δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στις διατομές εισόδου και εξόδου

$$F_{p,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \vartheta$$

$$F_{p,y} = -p_2 A_2 \sin \vartheta$$



- Δυνάμεις R_x και R_y που ασκούνται από τα τοιχώματα του αγωγού στο ρευστό του ΟΕ
- Εφαρμογή εξισώσεων ορμής

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \vartheta + R_x = \dot{m}(u_2 \cos \vartheta - u_1)$$

$$-p_2 A_2 \sin \vartheta + R_y = \dot{m} u_2 \sin \vartheta$$

Επομένως

$$R_x = -p_1 A_1 + p_2 A_2 \cos \vartheta + \dot{m}(u_2 \cos \vartheta - u_1)$$

$$R_y = p_2 A_2 \sin \vartheta + \dot{m} u_2 \sin \vartheta$$

Δύναμη σε καμπύλο αγωγό 4/4

- Δυνάμεις στον αγωγό
 - Οι δυνάμεις που ασκούνται στα τοιχώματα του αγωγού ($F_{w,x}$, $F_{w,y}$) είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς με τις R_x , R_y

$$F_{w,x} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \vartheta + \dot{m}(u_1 - u_2 \cos \vartheta)$$

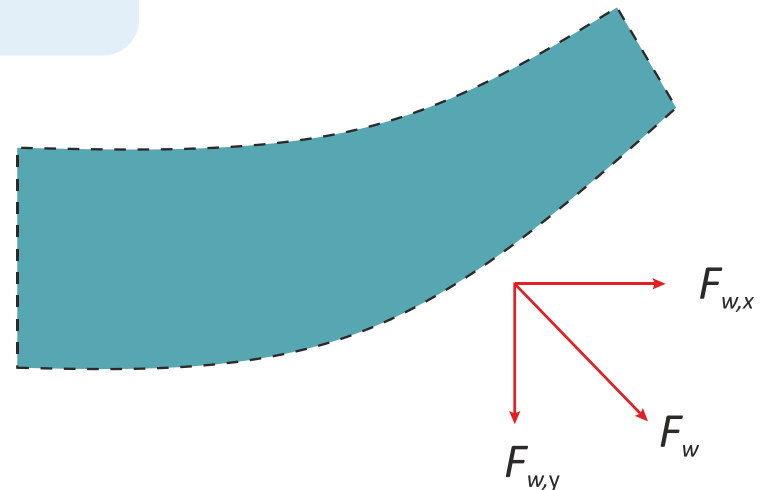
$$F_{w,y} = -p_2 A_2 \sin \vartheta - \dot{m} u_2 \sin \vartheta$$

- Η συνολική δύναμη είναι

$$\mathbf{F}_w = F_{w,x} \mathbf{i} + F_{w,y} \mathbf{j}$$

με μέτρο

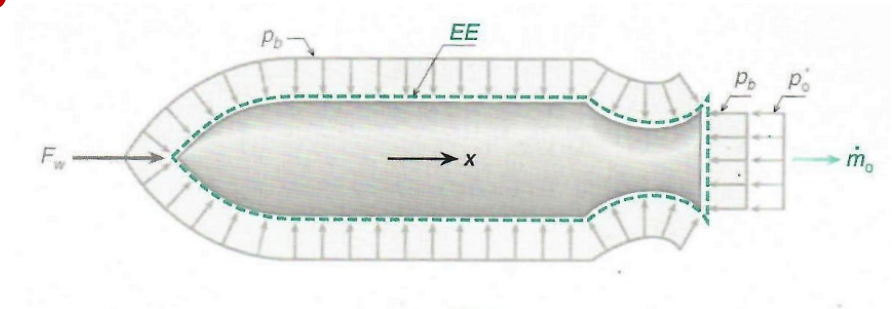
$$F_w = \sqrt{F_{w,x}^2 + F_{w,y}^2}$$



Δύναμη στήριξης 1/2

Πρωθητική δύναμη πυραύλου

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Οριζόντιος πύραυλος
 - Σταθερός ρυθμός ροής στη βάση του πυραύλου ($\dot{m}_0$)
 - Ομοιόμορφη ταχύτητα αερίων στη βάση του πυραύλου (u_0)
 - Ομοιόμορφη πίεση στη βάση του πυραύλου (p_0)
- Ζητούμενο
 - Η δύναμη στήριξης του πυραύλου
- Όγκος ελέγχου
 - Ο πύραυλος και τα αέρια (βλ. σχήμα)



Δύναμη στήριξης 2/2

- Εξίσωση ορμής
 - Η ταχύτητα (και η ορμή) μεταβάλλεται κατά x

$$F_x = F = \dot{m}_0 u_0$$

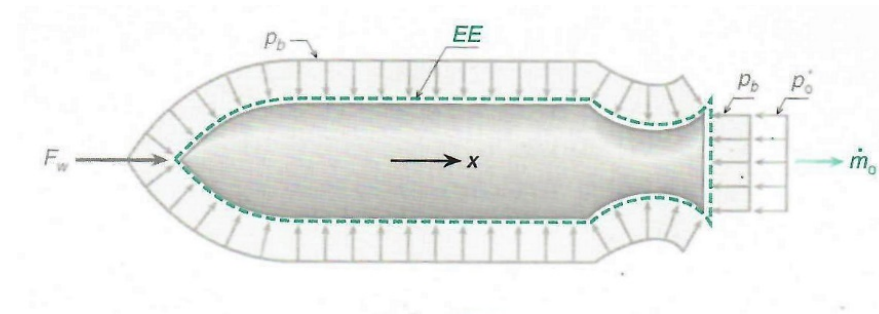
- Η δύναμη F αποτελείται από:
 - Δύναμη πίεσης. Αφαιρείται η ατμοσφαιρική πίεση που ασκείται σε όλη την επιφάνεια του πυραύλου.

$$F_p = -p_0^* A_0 = -(p_0 - p_b) A_0$$

- Δύναμη στήριξης F_A που ασκείται στον ΟΕ

- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής

$$F_A - (p_0 - p_b) A_0 = \dot{m}_0 u_0 \Rightarrow F_A = \dot{m}_0 u_0 + (p_0 - p_b) A_0$$

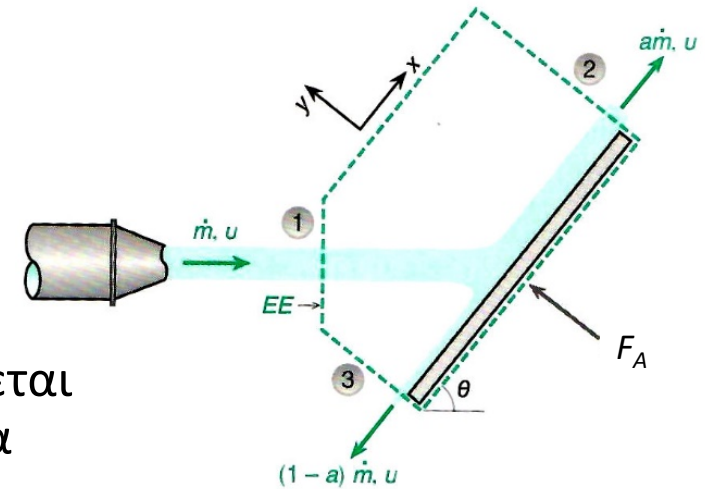


* Η δύναμη βαρύτητας αμελείται γιατί ο πύραυλος είναι οριζόντιος

Δύναμη πίδακα

Πίδακας ρευστού σε ακίνητη πλάκα

- Παραδοχές
 - Μόνιμη κατάσταση
 - Ασυμπίεστο ρευστό
 - Ο πίδακας μετά την πρόσκρουση χωρίζεται σε δύο ρεύματα που κινούνται αντίθετα με την ταχύτητα του πίδακα (u)
 - Αμελητέες δυνάμεις βαρύτητας
- Ζητούμενα
 - Οι ρυθμοί ροής μάζας στα δύο ρεύματα
 - Η δύναμη που απαιτείται για τη στήριξη της πλάκας



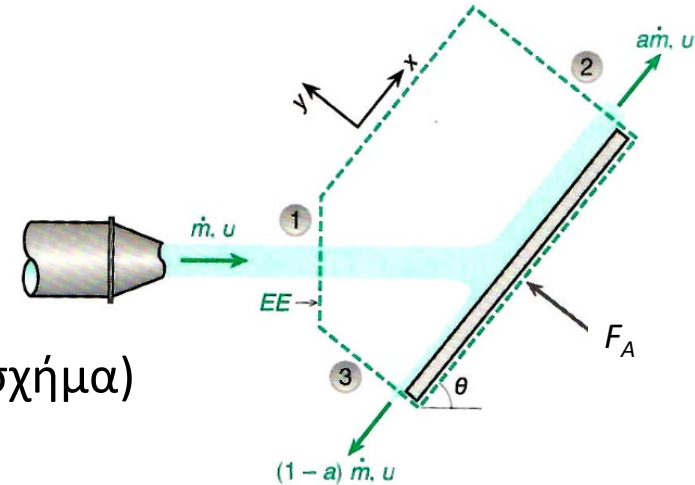
Δύναμη πίδακα

- Όγκος ελέγχου
 - Τέμνει κάθετα τα τρία ρεύματα και περιλαμβάνει την πλάκα (βλ. σχήμα)
- Σύστημα συντεταγμένων
 - Άξονας x παράλληλος με την πλάκα (βλ. σχήμα)
- Αν με a συμβολίσουμε το ποσοστό της ροής μάζας που ακολουθεί το ρεύμα 2

$$\dot{m}_2 = a\dot{m}$$

Η εξίσωση συνέχειας δίνει:

$$\dot{m} = \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \Rightarrow \dot{m}_3 = \dot{m} - \dot{m}_2 \Rightarrow \dot{m}_3 = (1 - a)\dot{m}$$



Δύναμη πίδακα

- Εξίσωση ορμής κατά x

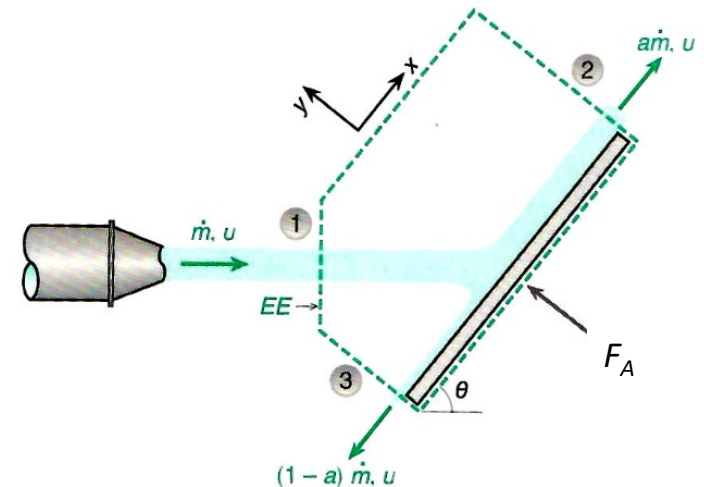
$$F_x = \underbrace{\dot{m}_2 u + \dot{m}_3 (-u)}_{\sum_{out} \dot{m}_{out} u_{out,x}} - \underbrace{\dot{m} u \cos \vartheta}_{\sum_{in} \dot{m}_{in} u_{in,x}}$$

- Η δύναμη F_x αποτελείται από:
 - Δυνάμεις ατμοσφαιρικής πίεσης, οι οποίες αλληλοαναιρούνται ($F_x = F_{p,x} = 0$)
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής κατά x

$$\dot{m}_2 u + \dot{m}_3 (-u) - \dot{m} u \cos \vartheta = 0$$

ή

$$a \dot{m} u - (1 - a) \dot{m} u - \dot{m} u \cos \vartheta = 0 \Rightarrow a = \frac{1 - \cos \vartheta}{2}$$



Δύναμη πίδακα

- Εξίσωση ορμής κατά y

$$F_y = \underbrace{-\dot{m}(-u \sin \vartheta)}$$

$$\sum_{in} \dot{m}_{in} u_{in,y} - \sum_{out} \dot{m}_{out} u_{out,y} = 0$$

- Η δύναμη F_y αποτελείται από:
 - Δυνάμεις ατμοσφαιρικής πίεσης, οι οποίες αλληλοαναιρούνται ($F_{p,y} = 0$)
 - Η δύναμη στήριξης F_A που ασκείται στον ΟΕ
- Εφαρμογή εξίσωσης ορμής κατά y

$$F_A = \dot{m} u \sin \vartheta$$

