

Ρευστομηχανική

13^η Διάλεξη

Μακροσκοπική εξίσωση ορμής

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Δεύτερος νόμος κίνησης του Newton

Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες ασκούνται πάνω σε ένα σύστημα από το περιβάλλον του είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος

$$\mathbf{F} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\Sigma}$$

- Ορμή συστήματος

$$\mathbf{P} = m\mathbf{u}$$

- Διανυσματικό μέγεθος με καρτεσιανές συνιστώσες

$$P_x = mu_x, \quad P_y = mu_y, \quad P_z = mu_z$$

Μακροσκοπική εξίσωση ορμής

- Εφαρμογή θεωρήματος μεταφοράς για $B = m\mathbf{u}$ και $b = \mathbf{u}$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \mathbf{u} \rho dV + \oint_{EE} \mathbf{u} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ρυθμός καθαρής εκροής ορμής από τον ΟΕ
διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου

Ρυθμός μεταβολής της ορμής του ρευστού που
περιέχεται στον ΟΕ (ρυθμός συσσώρευσης
ορμής στον ΟΕ)

Άθροισμα όλων των δυνάμεων που δρουν πάνω
στον ΟΕ από το περιβάλλον του

Συνιστώσες εξισώσεις ορμής

- Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} u_x \rho dV + \oint_{EE} u_x \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} u_y \rho dV + \oint_{EE} u_y \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} u_z \rho dV + \oint_{EE} u_z \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Το πρόσημο κάθε συνιστώσας της δύναμης εξαρτάται από το πρόσημο της αντίστοιχης συνιστώσας της ταχύτητας και το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$

Δυνάμεις στον όγκο ελέγχου

- Σωματικές δυνάμεις
 - Από αλληλεπιδράσεις του όγκου ελέγχου με εξωτερικά πεδία δυνάμεων
 - Η πιο συνηθισμένη το **βάρος**

$$\mathbf{F}_g = \int_{\text{OE}} \mathbf{g} \rho dV \quad \text{για } \rho, \mathbf{g} \text{ σταθερά:} \quad \mathbf{F}_g = \rho V \mathbf{g} = m \mathbf{g}$$

- Επιφανειακές δυνάμεις
 - Από αλληλεπιδράσεις του όγκου ελέγχου με το περιβάλλον διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου
 - Εξαρτώνται από τη φύση των σωμάτων που τέμνει η επιφάνεια ελέγχου

Επιφανειακές δυνάμεις – 1^η Περίπτωση

- **1^η Περίπτωση: Η επιφάνεια ελέγχου δεν τέμνει στερεά**

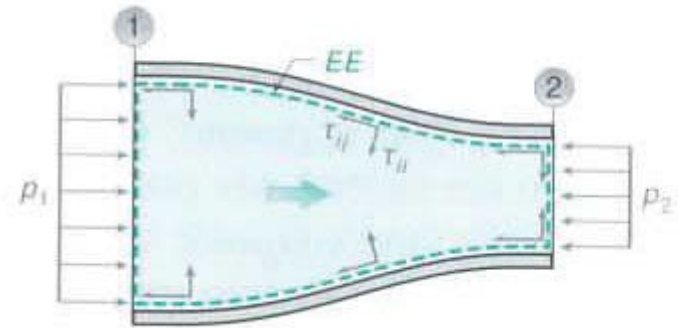
α. Δυνάμεις **πίεσης** (στις διατομές εισόδου-εξόδου)

$$\mathbf{F}_p = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA$$

π.χ. $F_{p,1,x} = p_1 A_1$
 $F_{p,2,x} = -p_2 A_2$

β. **Ιξώδεις** δυνάμεις

$$\mathbf{F}_\tau = \oint_{EE} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) dA$$



Συνισταμένη εξωτερικών δυνάμεων – 1^η Περίπτωση

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau$$

Ιξώδεις δυνάμεις – 1^η Περίπτωση

- Ο υπολογισμός των ιξωδών δυνάμεων προϋποθέτει τη γνώση των συνιστωσών του δυαδικού τάσης
- Συνήθως οι ιξώδεις δυνάμεις είναι το ζητούμενο οι οποίες υπολογίζονται με την επίλυση των εξισώσεων ορμής
- Όταν οι επιφάνειες του όγκου ελέγχου έρχονται σε επαφή με στερεά τοιχώματα, η δύναμη αυτή αφορά στη δύναμη που ασκείται στο ρευστό από τα τοιχώματα και συμβολίζεται με **R**

$$\mathbf{R} = iR_x + jR_y + kR_z$$

- Η δύναμη που ασκείται από το ρευστό στις στερεές επιφάνειες είναι ίσου μέτρου και αντίθετης φορά με την **R**

$$\mathbf{F}_w = -\mathbf{R}$$

Επιφανειακές δυνάμεις – 2^η Περίπτωση

- **2^η Περίπτωση: Η επιφάνεια ελέγχου τέμνει και στερεά**

α. Δυνάμεις **πίεσης** (στις διατομές εισόδου-εξόδου)

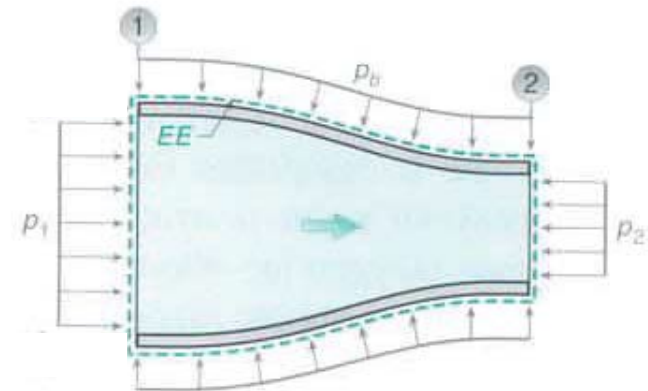
$$\mathbf{F}_p = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p dA$$

β. Δυνάμεις **ατμοσφαιρικής πίεσης**
(στις παράπλευρες επιφάνειες)

$$\mathbf{F}_{pb} = \oint_{A_\pi} (-\mathbf{n}) p_b dA$$

γ. Δυνάμεις **στήριξης** ($\mathbf{F}_A$)

Μεταφέρονται (προς και από τον ΟΕ) διαμέσου στερεών σωμάτων και ασκούνται στην επιφάνεια ελέγχου.



Δυνάμεις ατμοσφαιρικής πίεσης – 2^η Περίπτωση

- Ο υπολογισμός των δυνάμεων ατμοσφαιρικής πίεσης προϋποθέτει ότι είναι γνωστό το σχήμα της επιφάνειας
- Για ευκολία στους υπολογισμούς, η πίεση στις διατομές εισόδου-εξόδου αναλύεται την μανομετρική/σχετική (p^*) και βαρομετρική (ατμοσφαιρική) πίεση (p_b)

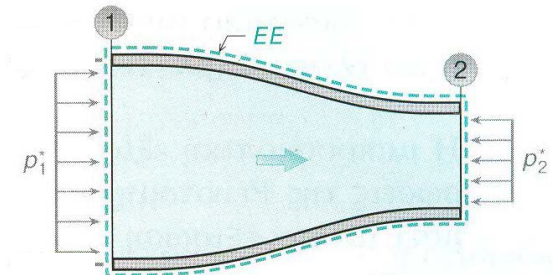
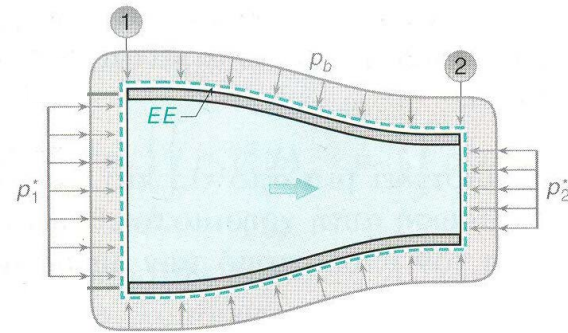
$$p = p^* + p_b$$

- Η συνισταμένη των δυνάμεων ατμοσφαιρικής πίεσης είναι μηδέν

$$\mathbf{F}_{pb} = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p_b dA = 0$$

- Οι μόνες δυνάμεις πίεσης είναι οι μανομετρικές

$$\mathbf{F}_{p^*} = \oint_{EE} (-\mathbf{n}) p^* dA = 0$$



π.χ.

$$F_{p^*,1,x} = (p_1 - p_b) A_1$$

$$F_{p^*,2,x} = -(p_2 - p_b) A_2$$

Συνισταμένη εξωτερικών δυνάμεων – 2^η Περίπτωση

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{p^*} + \mathbf{F}_A$$

Παρατηρήσεις

- Στις δυνάμεις $\mathbf{F}_A$, εκτός από τις δυνάμεις στήριξης, ανήκουν και οι δυνάμεις από επιφάνειες στερεών επάνω στις οποίες προσκρούουν πίδακες ρευστών
- Στις δυνάμεις $\mathbf{F}_g$, εκτός από το βάρος του ρευστού, συμπεριλαμβάνεται και το βάρος του στερεού που περικλείεται από την επιφάνεια ελέγχου

Γενική παρατήρηση (1^η και 2^η περίπτωση)

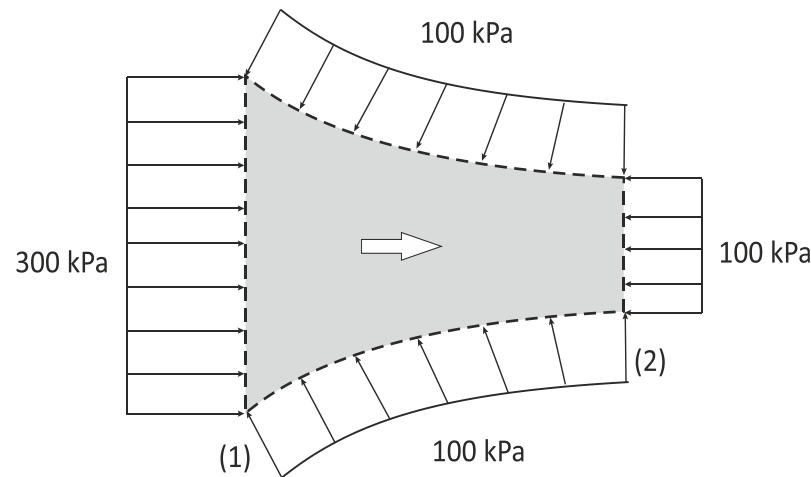
- Όταν το ρευστό εκρέει στην ατμόσφαιρα (πίδακας), η πίεση στην έξοδο του αγωγού είναι ίση με την ατμοσφαιρική (εκτός εάν η τάση ατμών είναι σημαντική, το ρευστό εξέρχεται με υπερηχητική ταχύτητα ή είναι ιξωδοελαστικό)

Ερώτηση 1

Στο σχήμα παρουσιάζεται η κατανομή πίεσης στην επιφάνεια ενός όγκου ελέγχου ο οποίος έχει σχήμα συγκλίνοντος ακροφυσίου.

Οι διατομές της εισόδου (1) και εξόδου (2) του ακροφυσίου είναι $A_1 = 0.4 \text{ m}^2$ και $A_2 = 0.2 \text{ m}^2$, αντίστοιχα.

Ποιο είναι το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων πίεσης που δρουν πάνω στον όγκο ελέγχου;



Ειδική μορφή εξίσωσης ορμής – Μόνιμη ροή

- Μόνιμη ροή: $\frac{\partial}{\partial t} \int_{OE} \mathbf{u} \rho dV = 0$

- Διανυσματική μορφή

$$\mathbf{F} = \oint_{EE} \mathbf{u} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στον ΟΕ είναι ίση με το ρυθμό καθαρής εκροής ορμής του ρευστού από τον ΟΕ

- ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ

$$F_x = \oint_{EE} u_x \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_y = \oint_{EE} u_y \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

$$F_z = \oint_{EE} u_z \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Εξίσωση ορμής – Απλή μορφή

- Μόνιμη ροή, πολλαπλές εισοδοι και έξοδοι, ομοιόμορφη ταχύτητα και πυκνότητα στις επιφάνειες εισόδου και εξόδου

$$\mathbf{F} = \sum_{out} \underbrace{(\rho_{out} u_{out,n} A_{out})}_{\mathbf{P}_{out} = \dot{m}_{out} \mathbf{u}_{out}} \mathbf{u}_{out} - \sum_{in} \underbrace{(\rho_{in} u_{in,n} A_{in})}_{\mathbf{P}_{in} = \dot{m}_{in} \mathbf{u}_{in}} \mathbf{u}_{in}$$

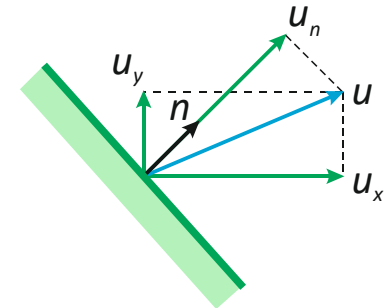
Οι $u_{out,n}$ και $u_{in,n}$ είναι οι κάθετες συνιστώσες στις επιφάνειες A_{out} και A_{in}

- Συνιστώσες

$$F_x = \sum_{out} (\rho_{out} u_{out,n} A_{out}) u_{out,x} - \sum_{in} (\rho_{in} u_{in,n} A_{in}) u_{in,x}$$

$$F_y = \sum_{out} (\rho_{out} u_{out,n} A_{out}) u_{out,y} - \sum_{in} (\rho_{in} u_{in,n} A_{in}) u_{in,y}$$

$$F_z = \sum_{out} (\rho_{out} u_{out,n} A_{out}) u_{out,z} - \sum_{in} (\rho_{in} u_{in,n} A_{in}) u_{in,z}$$



Ερώτηση 2

Ένα ρευστό διέρχεται με μόνιμη ροή από τους δύο αγωγούς του σχήματος.

Αν οι αγωγοί αυτοί δε στηρίζονται, προς ποια κατεύθυνση θα κινηθούν;

