

Ρευστομηχανική

11^η Διάλεξη

Επαναληπτικές ασκήσεις σε δυνάμεις
και παραμόρφωση ρευστών

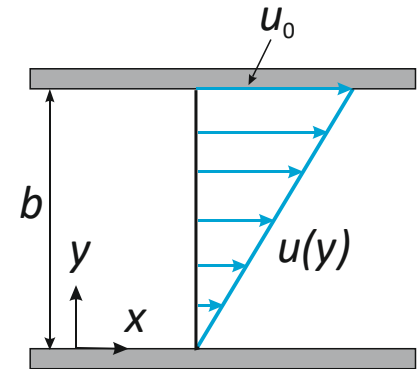
Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Άσκηση 1

Κατανομή διατμητικών τάσεων

Ένα νευτωνικό ρευστό με ιξώδες $\mu = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ βρίσκεται στο χώρο μεταξύ δύο παράλληλων οριζόντιων πλακών που απέχουν απόσταση $b = 0.5 \text{ mm}$. Η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα $u_0 = 0.7 \text{ m/s}$ ενώ η κάτω πλάκα παραμένει ακίνητη. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, αναπτύσσεται ένα γραμμικό προφίλ της ταχύτητας u_x σε μια εγκάρσια διατομή:



- (α) Να υπολογιστεί η αναλυτική έκφραση και να σχεδιαστεί η κατανομή της ταχύτητας σε μια εγκάρσια διατομή.
- (β) Να υπολογιστεί η αναλυτική έκφραση και να σχεδιαστεί η κατανομή της διατμητικής τάσης σε μια εγκάρσια διατομή.
- (γ) Να υπολογιστούν οι διατμητικές δυνάμεις ανά μονάδα επιφάνειας που ασκούνται από το ρευστό στις δύο πλάκες.

Άσκηση 1 – Λύση 1/3

(α) Κατανομή ταχύτητας

Η αναλυτική έκφραση της u_x ταχύτητας έχει τη μορφή:

$$u_x = a_0 + a_1 y$$

όπου y , η απόσταση από την κάτω πλάκα.

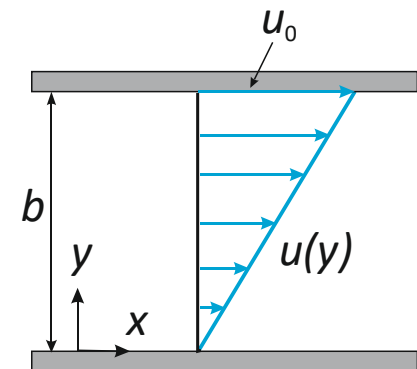
Οι σταθερές a_0 και a_1 υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες:

στη θέση $y = 0$ η ταχύτητα έχει τιμή 0: $u_x = a_0 + a_1 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

στη θέση $y = b$ η ταχύτητα έχει τιμή u_0 : $u_x = a_1 b = u_0 \Rightarrow a_1 = u_0 / b$

Επομένως, η κατανομή της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση:

$$u_x = u_0 \frac{y}{b}$$

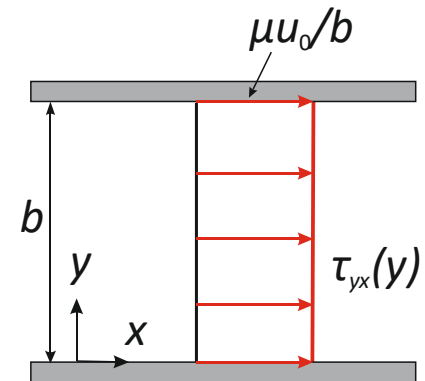


Άσκηση 1 – Λύση 2/3

(β) Κατανομή διατμητικών τάσεων

Επειδή το ρευστό είναι νευτωνικό και η ροή μονοδιάστατη, η μόνη διατμητική τάση είναι η τ_{yx} και δίνεται από τη σχέση του Newton:

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \mu \frac{du_x}{dy} = u_0 \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{y}{b} \right) = \frac{\mu u_0}{b} \frac{dy}{dy} = \frac{\mu u_0}{b} = \frac{0.1 \times 0.7}{0.0005} \\ &= 140 \text{ Pa} \quad (\text{σταθερή})\end{aligned}$$



Άσκηση 1 – Λύση 3/3

(γ) Δυνάμεις που ασκούνται στις πλάκες

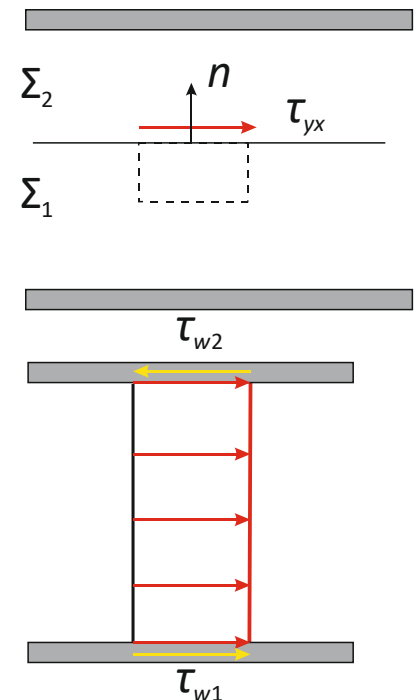
Η τάση τ_{yx} έχει θετικό πρόσημο. Επομένως

- Είναι προς τη θετική x-φορά όταν ασκείται σε θετική y-επιφάνεια.
- Είναι προς την αρνητική x-φορά όταν ασκείται σε αρνητική y-επιφάνεια.

Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί με θετική x-φορά. Άρα οι τάσεις αυτές ασκούνται σε θετικές y-επιφάνειες, δηλαδή ασκούνται από τα «επόμενα/πάνω» (Σ_2) στρώματα στα «προηγούμενα/κάτω» (Σ_1).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τάση που ασκείται στην κάτω επιφάνεια (τ_{w1}) έχει θετική φορά (από το ρευστό που βρίσκεται «πάνω» από το στερεό) ενώ η τάση που ασκείται στην πάνω επιφάνεια (τ_{w2}) έχει αρνητική φορά (από το ρευστό που βρίσκεται «κάτω» από το στερεό):

$$\tau_{w1} = \tau_{yx} = 140 \text{ Pa} \quad \tau_{w2} = -\tau_{yx} = -140 \text{ Pa}$$



Άσκηση 2

Κατανομή διατμητικών τάσεων σε παραβολικό προφίλ ταχύτητας

Να επαναληφθεί η άσκηση 1 για την περίπτωση που οι δύο πλάκες είναι ακίνητες και η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού σε μια εγκάρσια διατομή δίνεται από τη:

$$\mathbf{u} = u_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right) \mathbf{i}$$

όπου y η απόσταση από το μέσο μεταξύ των δύο πλακών.

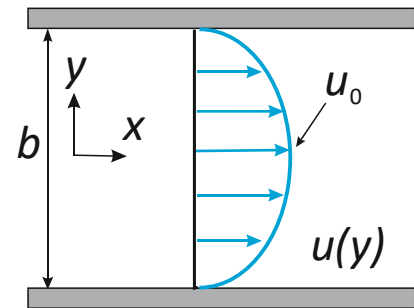
Άσκηση 2 – Λύση 1/1

(α) Κατανομή ταχύτητας

$$u_x = u_0 \left(1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right) \quad (\text{παραβολικό προφίλ})$$

$$u_x = 0 \quad \text{στις θέσεις } y = \pm b/2$$

$$u_x = u_0 \quad \text{στη θέση } y = 0$$



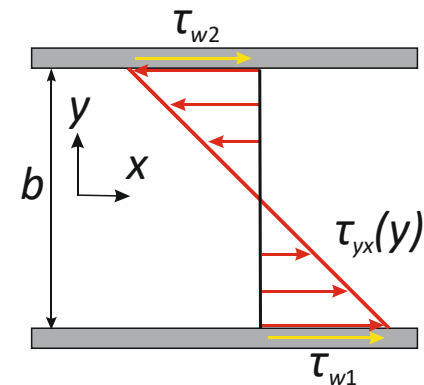
(β) Κατανομή διατμητικών τάσεων

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy} = -\frac{8\mu u_0}{b^2} y \quad (\text{γραμμική})$$

(γ) Δυνάμεις που ασκούνται στις πλάκες

$$\tau_{w1} = \tau_{yx}(y = -b/2) = 560 \text{ Pa}$$

$$\tau_{w2} = -\tau_{yx}(y = b/2) = 560 \text{ Pa}$$



Άσκηση 3

Υπολογισμός τάσεων από πεδίο ταχύτητας

Το πεδίο ταχύτητας ενός νευτωνικού ρευστού, το οποίο έχει ιξώδες $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, δίνεται από τη διανυσματική σχέση:

$$\mathbf{u} = 4xyz\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - 2yz^2\mathbf{k} \quad (\text{m/s})$$

Όπου οι χωρικές συντεταγμένες x, y, z είναι σε μέτρα (m).

Να υπολογιστούν:

(α) Οι κάθετες τάσεις ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$)

(β) Οι διατμητικές τάσεις ($\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}, \sigma_{zx}, \sigma_{xz}$)

που αναπτύσσονται στο σημείο (2, 1, 1) του πεδίου, αν η πίεση (στατική) στο σημείο αυτό είναι 8 kPa.

Άσκηση 3 – Λύση 1/4

(α) Κάθετες τάσεις

Η κάθετη τάση στη x-διεύθυνση (σ_{xx}) δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx}$$

Όπου τ_{xx} , η κάθετη ιξώδης τάση η οποία για ένα νευτωνικό ρευστό δίνεται από την υλική σχέση του Stokes:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

όπου:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(4xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz^2) = 4yz + 0 - 4yz = 0$$

Επομένως:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} = -p + 2\mu \frac{\partial}{\partial x}(4xyz) = -p + 8\mu yz$$

Άσκηση 3 – Λύση 2/4

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι:

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} = -p + 2\mu \frac{\partial}{\partial y} (z^2) = -p$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = -p + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} (-2yz^2) = -p - 8\mu yz$$

Και αντικαθιστώντας $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $p = 8000 \text{ Pa}$, $x = 2 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$ και $z = 1 \text{ m}$ προκύπτει:

$$\sigma_{xx} = -8000 + 8 \times 1.5 \times 1 \times 1 = -7988 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{yy} = -8000 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{zz} = -8000 - 8 \times 1.5 \times 1 \times 1 = -8012 \text{ Pa}$$

Άσκηση 3 – Λύση 3/4

(β) Διατμητικές τάσεις

Οι διατμητικές τάσεις (σ_{ij}) είναι ίσες με τις αντίστοιχες διατμητικές ιξώδεις τάσεις. Έτσι:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_{xy}$$

Όπου η ιξώδης τάση τ_{xy} , για ένα νευτωνικό ρευστό, δίνεται από την υλική σχέση του Stokes:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

Επομένως:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial}{\partial y} (4xyz) + \frac{\partial}{\partial x} (z^2) \right) = 4\mu xz$$

Άσκηση 3 – Λύση 4/4

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} (z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-2yz^2) \right) = 2\mu z(1-z)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} (-2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z} (4xyz) \right) = 4\mu xy$$

Και αντικαθιστώντας $\mu = 1.5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $p = 8000 \text{ Pa}$, $x = 2 \text{ m}$, $y = 1 \text{ m}$ και $z = 1 \text{ m}$ προκύπτει:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 4 \times 1.5 \times 2 \times 1 = 12 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2 \times 1.5 \times 1 \times (1-1) = 0 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 4 \times 1.5 \times 2 \times 1 = 12 \text{ Pa}$$