

Ρευστομηχανική

10^η Διάλεξη

Παραμόρφωση ρευστών και υλική σχέση

Γεώργιος Αραμπατζής

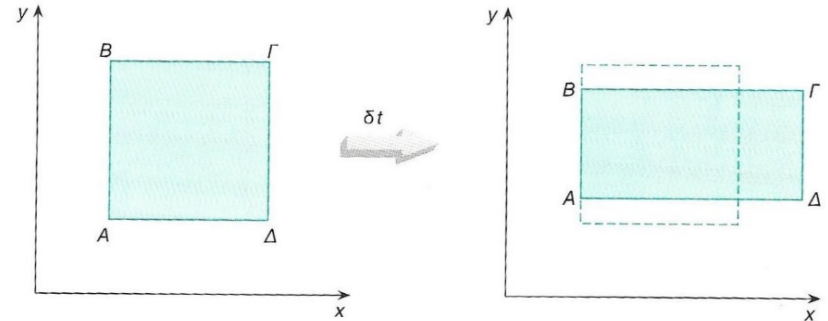
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Είδη παραμόρφωσης ρευστού

- **Γραμμική παραμόρφωση**

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε

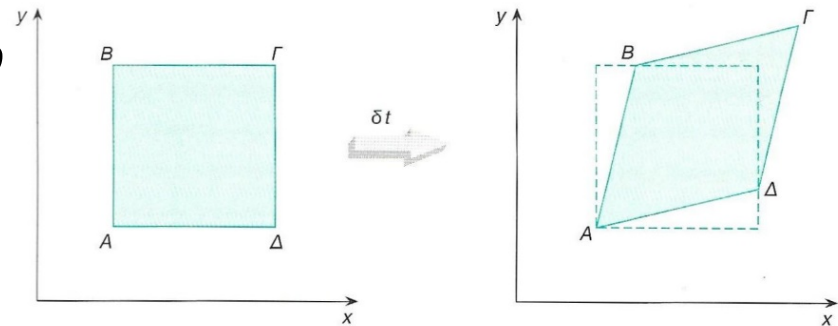
ο προσανατολισμός του να παραμένει ίδιος όχι όμως το σχήμα του



- **Γωνιακή παραμόρφωση**

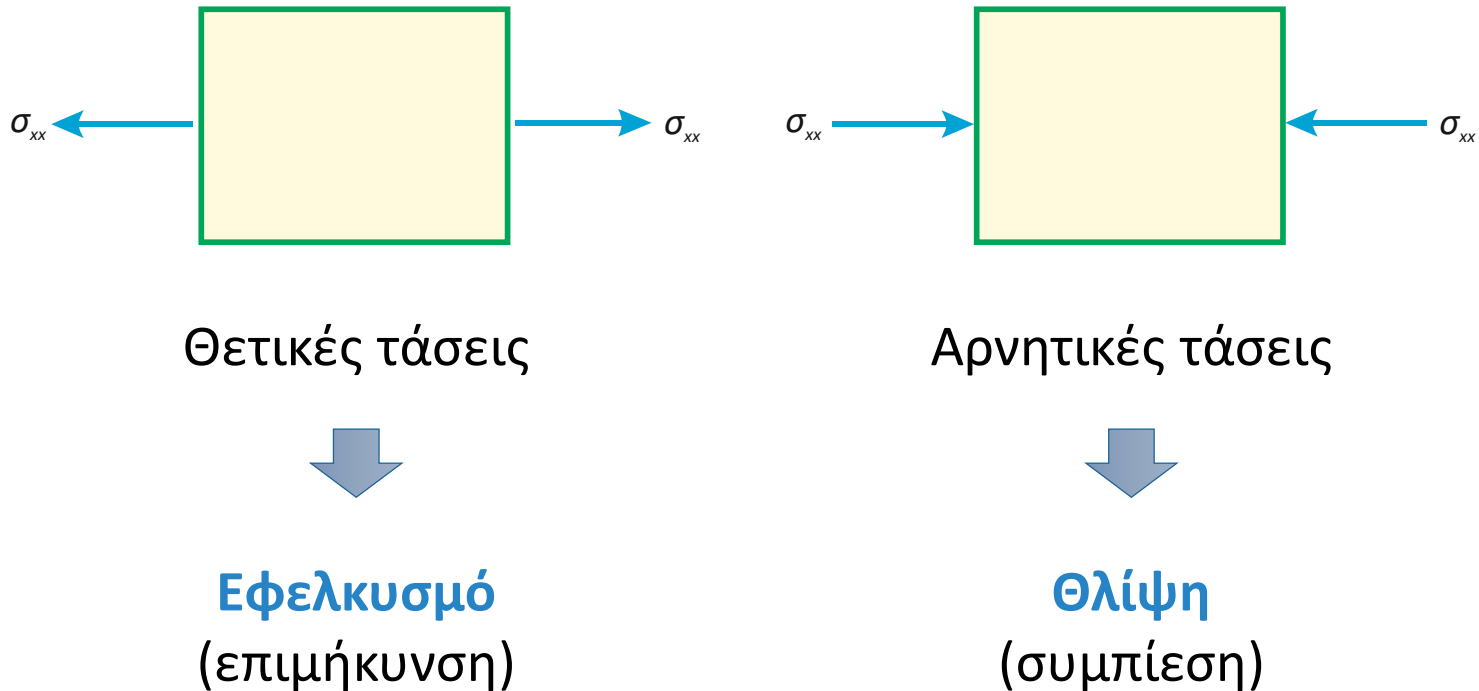
Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε

να μεταβάλλονται ταυτόχρονα και το σχήμα του και ο προσανατολισμός του



Γραμμική παραμόρφωση

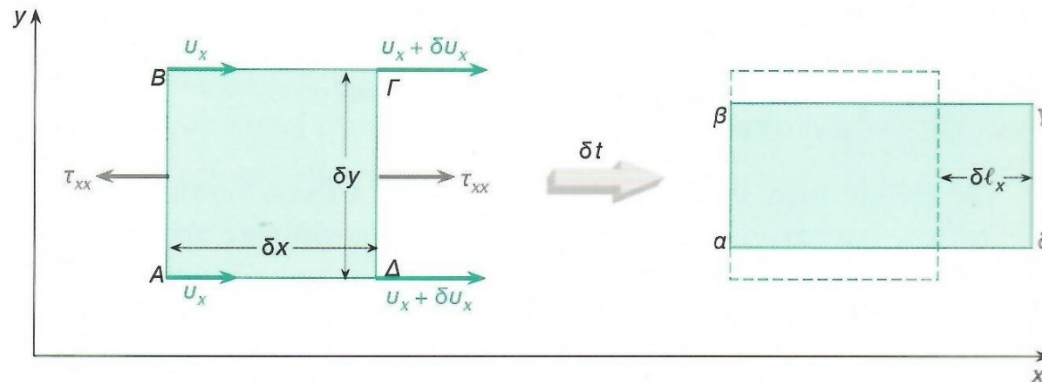
- Ένα σωματίδιο ρευστού υφίσταται γραμμική παραμόρφωση όταν ασκούνται σε αυτό **κάθετες τάσεις**



Ρυθμός γραμμικής παραμόρφωσης

- Στιγμαίος ρυθμός επιμήκυνσης ενός μοναδιαίου ευθύγραμμου τμήματος

Ρυθμός γραμμικής παραμόρφωσης κατά τη x-διεύθυνση



$$e_{xx} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta l_x / \delta x}{\delta t} \right) \quad \delta l_x = (\delta u_x)(\delta t) \quad = \quad \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u_x}{\delta x} \right)$$



$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

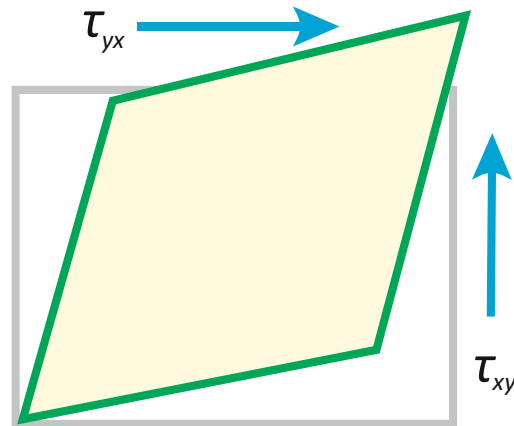
Παρόμοια:

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Γωνιακή παραμόρφωση

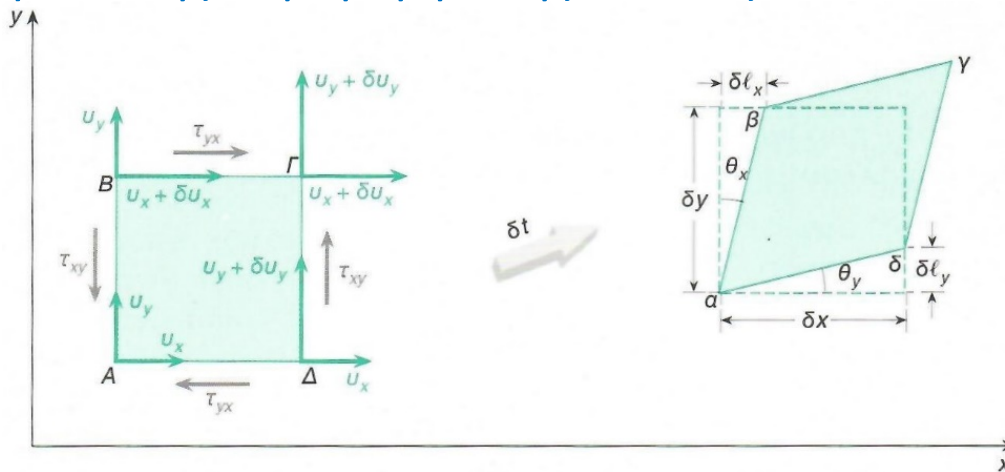
- Ένα σωματίδιο ρευστού υφίσταται γωνιακή παραμόρφωση όταν ασκούνται σε αυτό **διατμητικές τάσεις**



Ρυθμός γωνιακής παραμόρφωσης

- Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της γωνίας μεταξύ δύο ευθύγραμμων τμημάτων τα οποία ήταν αρχικά παράλληλα με τους άξονες

Ρυθμός γωνιακής παραμόρφωσης κατά τις διευθύνσεις x και y



$$\dot{\gamma}_{xy} = \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vartheta_x + \vartheta_y}{\delta t} \right) \quad \begin{aligned} \vartheta_x &= \tan \vartheta_x = \delta l_x / \delta y = \delta u_x \delta t / \delta y \\ \vartheta_y &= \tan \vartheta_y = \delta l_y / \delta x = \delta u_y \delta t / \delta x \end{aligned} \quad \lim_{\delta x, \delta y, \delta z, \delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u_x}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta x} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Παρόμοια:

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

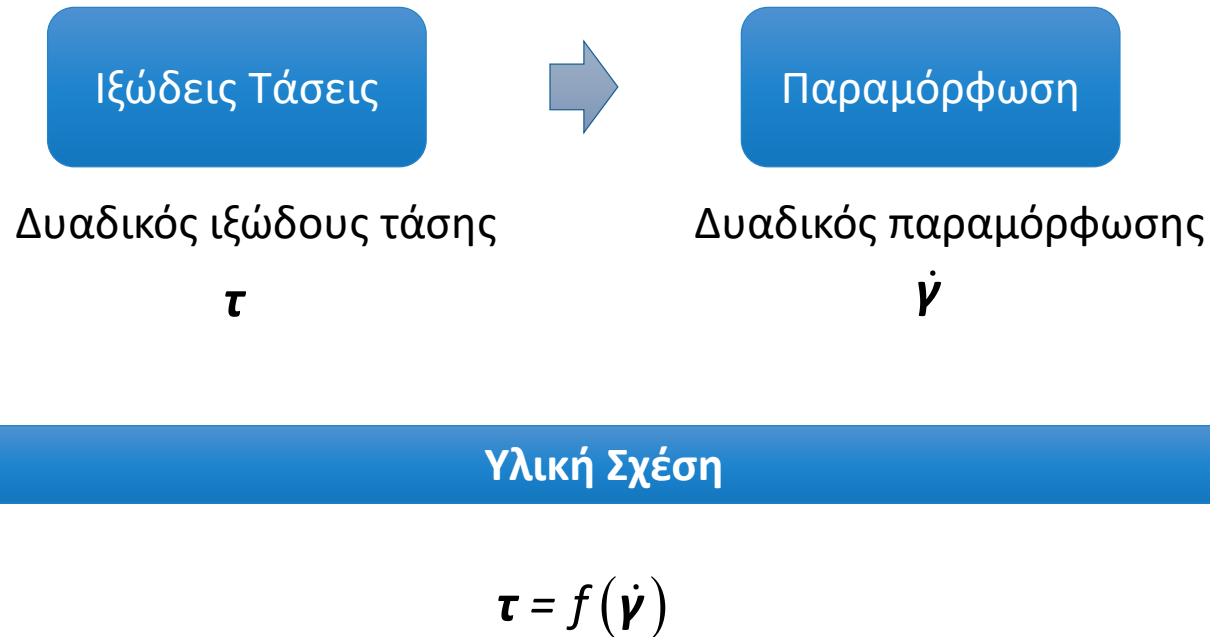
Δυαδικός ρυθμός παραμόρφωσης

- Ο συνολικός ρυθμός παραμόρφωσης ενός σωματιδίου ρευστού περιγράφεται πλήρως από τον **δυαδικό (τανυστή) παραμόρφωσης**

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\gamma}_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_{xx} &= 2e_{xx} = 2\frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_{yy} &= 2e_{yy} = 2\frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{zz} &= 2e_{zz} = 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\dot{\gamma}_{ij}] = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Η έννοια της υλικής σχέσης



Νόμος ιξώδους του Newton

- Υλική σχέση στην περίπτωση στρωτής, **μονοδιάστατης** ροής, νευτωνικού ρευστού

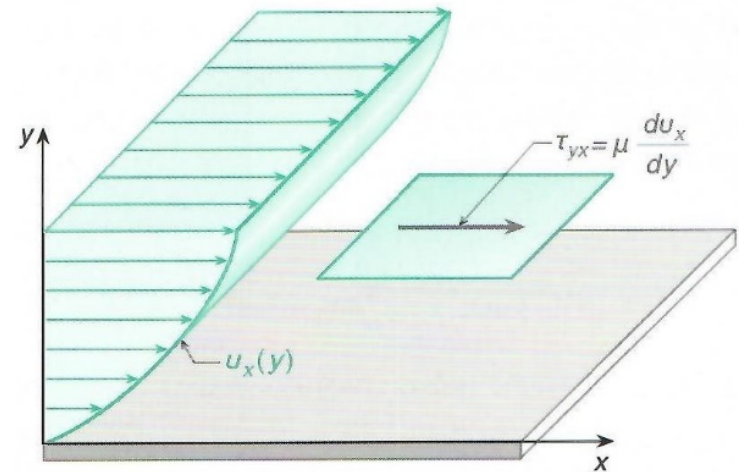
$$u_x = u_x(y), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0$$

$$\dot{\gamma}_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{du_x}{dy}$$

- Νόμος ιξώδους του Newton

$$\tau_{yx} = \mu \dot{\gamma}_{yx} = \mu \frac{du_x}{dy}$$

Η διατμητική τάση είναι ανάλογη του ρυθμού παραμόρφωσης



μ : δυναμικό **ιξώδες**

Σχέσεις ιξώδους του Stokes 1

- Επέκταση των ορίων ισχύος του νόμου του Newton σε τρισδιάστατη ροή
- Οι **διατμητικές (ιξώδεις) τάσεις** είναι ίσες με το γινόμενο του ιξώδους με τον αντίστοιχο ρυθμό παραμόρφωσης

$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall i \neq j$$



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)$$

Σχέσεις ιξώδους του Stokes 2

- Οι **κάθετες ιξώδεις τάσεις** δίνονται από:

$$\tau_{ii} = \mu \dot{\gamma}_{ii} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$



$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Υλική σχέση για ασυμπίεστη ροή

- Σε ασυμπίεστη ροή:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

- Επομένως:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & 2\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$