

Ρευστομηχανική

9^η Διάλεξη

Δυνάμεις σε ρευστά

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης

Πολυτεχνείο Κρήτης

Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

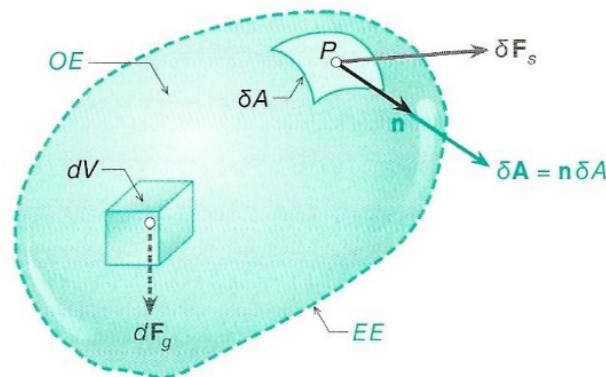
Είδη δυνάμεων

Σωματικές Δυνάμεις

- Ασκούνται σε όλο το «**σώμα**» του όγκου ελέγχου
- Προέρχονται από την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με εξωτερικά **πεδία δυνάμεων**

Επιφανειακές Δυνάμεις

- Ασκούνται στην **επιφάνεια** του όγκου ελέγχου
- Προέρχονται από την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με το **άμεσο περιβάλλον του**



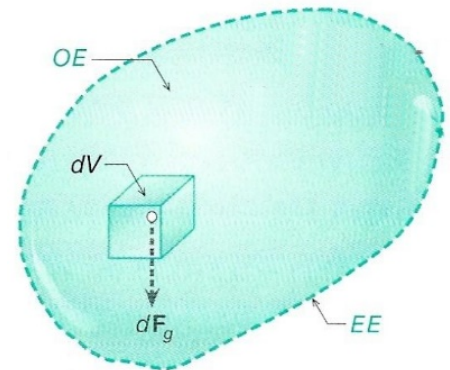
Σωματικές δυνάμεις

- Καθορίζονται από το διάνυσμα της **ανά μονάδα μάζας σωματικής δύναμης** σε κάθε σημείο **$\mathbf{f}$** (σε $\text{N/kg} = \text{m/s}^2$)
- Δυνάμεις βαρύτητας** – Συνηθέστερος τύπος σωματικών δυνάμεων

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{g} = \mathbf{i}g_x + \mathbf{j}g_y + \mathbf{k}g_z$$

- Δύναμη σε σωματίδιο ρευστού του όγκου ελέγχου μάζας dm

$$d\mathbf{F}_g = \mathbf{g} dm = \mathbf{g} \rho dV$$



- Συνισταμένη δυνάμεων που ασκούνται στον όγκο ελέγχου από το πεδίο βαρύτητας (ασκείται στο κέντρο μάζας του OE)

$$\mathbf{F}_g = \int_{OE} d\mathbf{F}_g = \int_{OE} \mathbf{g} \rho dV$$

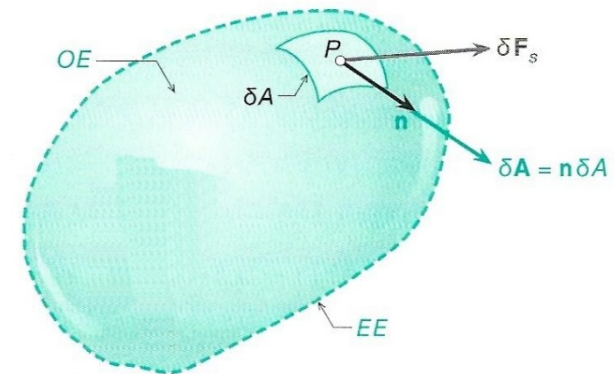
* Για $\mathbf{g}$ και ρ σταθερά

$$\mathbf{F}_g = \int_{OE} \mathbf{g} \rho dV = \mathbf{g} \rho \int_{OE} dV = \mathbf{g} \rho V = \mathbf{g} m$$

Επιφανειακές δυνάμεις

- Επιφανειακές δυνάμεις
 - **Κάθετες** (στην επιφάνεια)
 - **Εφελκυσμού** (επιμήκυνση)
 - **Θλίψης** (συμπίεση)
 - **Εφαπτομενικές** (στην επιφάνεια)
 - **Διατμητικές**
 - **Τυχαίας διεύθυνσης**
- Τάση σε σημείο της επιφάνειας ελέγχου

$$\text{τάση} = \lim_{\delta A \rightarrow \delta A_0} \frac{\delta F_s}{\delta A}$$



Συνιστώσες τάσης

- Η (επιφανειακή) δύναμη και η επιφάνεια είναι διανυσματικά μεγέθη

$$\delta \mathbf{F}_s = \mathbf{i} \delta F_x + \mathbf{j} \delta F_y + \mathbf{k} \delta F_z$$

$$\delta \mathbf{A} = \mathbf{i} \delta A_x + \mathbf{j} \delta A_y + \mathbf{k} \delta A_z$$

- Η τάση (πηλίκο $\delta \mathbf{F}_s / \delta \mathbf{A}$) έχει **9 συνιστώσες**:

$$\sigma_{xx} = \frac{\delta F_x}{\delta A_x} \quad \sigma_{xy} = \frac{\delta F_y}{\delta A_x} \quad \sigma_{xz} = \frac{\delta F_z}{\delta A_x}$$

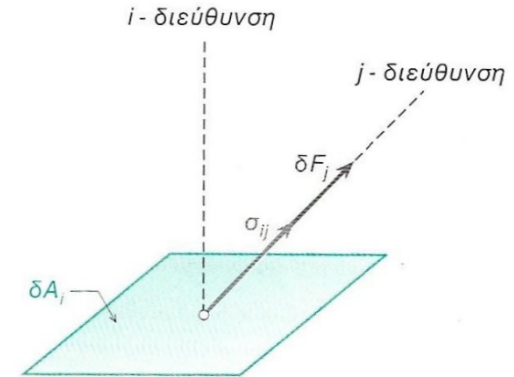
$$\sigma_{yx} = \frac{\delta F_x}{\delta A_y} \quad \sigma_{yy} = \frac{\delta F_y}{\delta A_y} \quad \sigma_{yz} = \frac{\delta F_z}{\delta A_y}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\delta F_x}{\delta A_z} \quad \sigma_{zy} = \frac{\delta F_y}{\delta A_z} \quad \sigma_{zz} = \frac{\delta F_z}{\delta A_z}$$

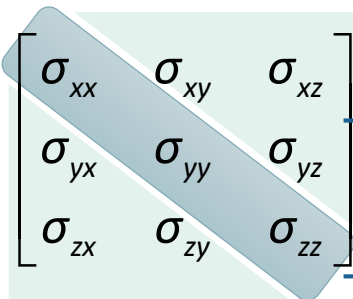
Δυαδικός (τανυστής) τάσης

$$\sigma_{ij} = \lim_{\delta A \rightarrow A_0} \frac{\delta F_j}{\delta A_i}$$

Δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας η οποία ασκείται σε μια i -επιφάνεια κατά τη διεύθυνση j του χώρου



- **Καρτεσιανές συνιστώσες** δυαδικού τάσης



Διατμητικές τάσεις

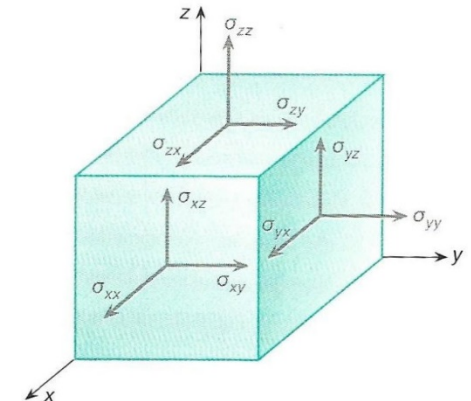
Κάθετες τάσεις

- Ο δυαδικός τάσης είναι **συμμετρικός**

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$



Έξι ανεξάρτητες συνιστώσες

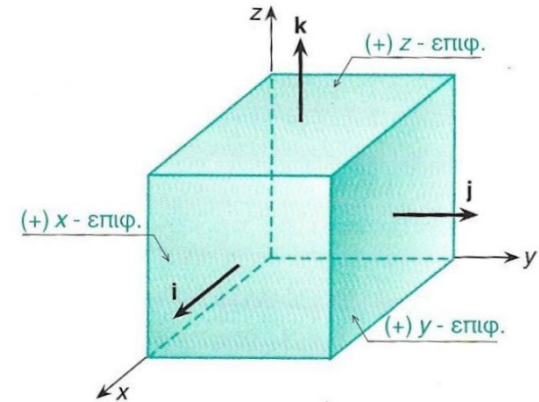


Πρόσημο επιφάνειας

Θετική επιφάνεια



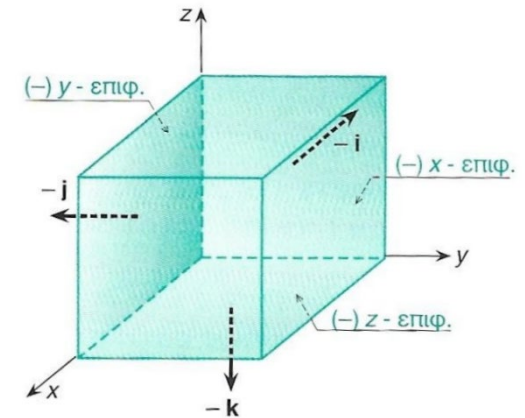
Θετικό μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$



Αρνητική επιφάνεια



Αρνητικό μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$



Πρόσημο τάσης

Θετική τάση

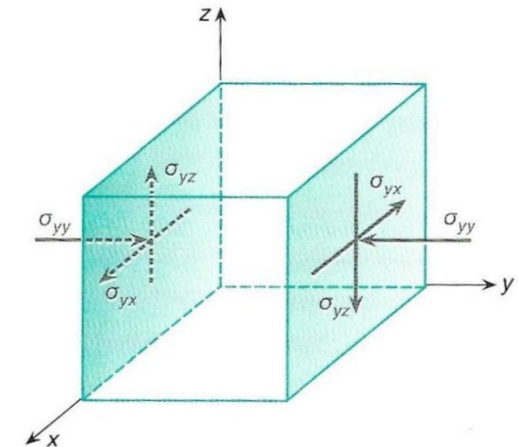
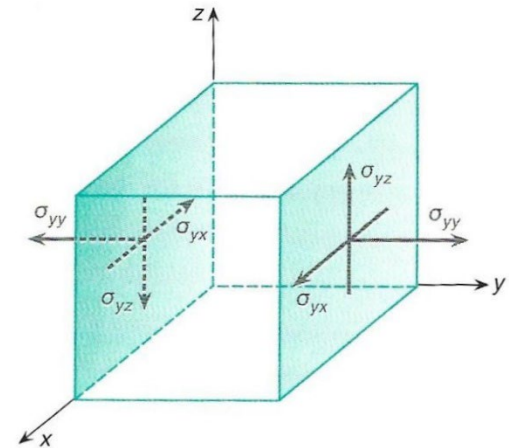


Θετική δύναμη σε θετική επιφάνεια
ή
Αρνητική δύναμη σε αρνητική επιφάνεια

Αρνητική τάση



Αρνητική δύναμη σε θετική επιφάνεια
ή
Θετική δύναμη σε αρνητική επιφάνεια

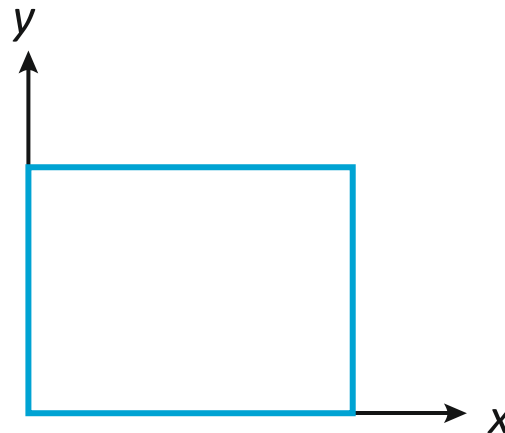


Παράδειγμα 1

Διεύθυνση και φορά τάσης

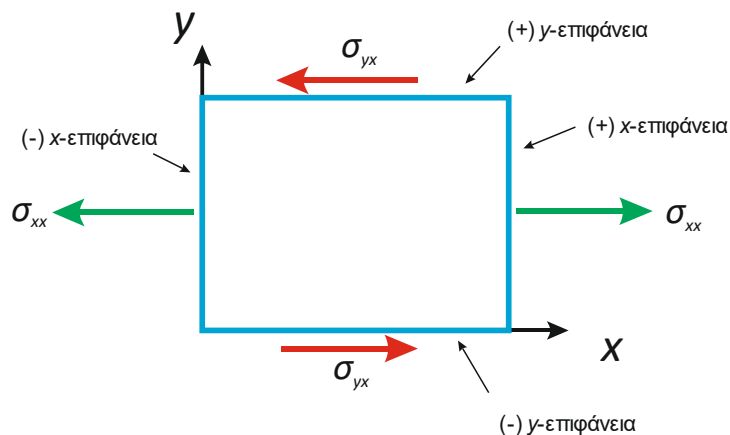
Ένα σωματίδιο ρευστού έχει σχήμα κύβου. Να σχεδιαστούν τα ανύσματα όλων των πιθανών τάσεων οι οποίες ασκούνται πάνω στις επιφάνειες του σωματιδίου και δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\sigma_{yx} = -5 \text{ kPa} \quad \text{και} \quad \sigma_{xx} = 10 \text{ kPa}$$



Παράδειγμα 1 – Λύση

- Η τάση σ_{yx} ασκείται σε μια y -επιφάνεια και έχει φορά κατά τη x -διεύθυνση:
- Επειδή έχει αρνητική τιμή ασκείται:
 - είτε σε μια θετική y -επιφάνεια κατά την αρνητική x -διεύθυνση
 - είτε σε μια αρνητική y -επιφάνεια κατά τη θετική x -διεύθυνση
- Η τάση σ_{xx} ασκείται σε μια x -επιφάνεια και έχει φορά κατά τη x -διεύθυνση:
- Επειδή έχει θετική τιμή ασκείται:
 - είτε σε μια θετική x -επιφάνεια κατά τη θετική x -διεύθυνση
 - είτε σε μια αρνητική x -επιφάνεια κατά την αρνητική x -διεύθυνση



Δυαδικός πίεσης και ιξώδους τάσης

- Ο δυαδικός τάσης είναι το άθροισμα του **δυαδικού πίεσης** και του **δυαδικού ιξώδους τάσης**

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

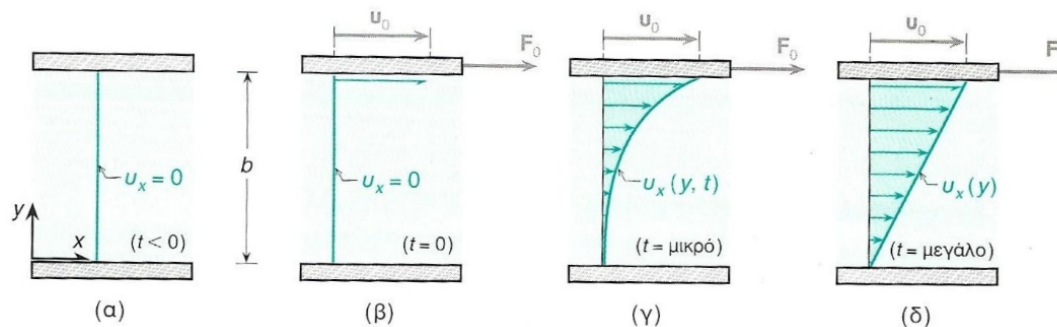
$$\sigma_{ij} = -p + \tau_{ij} \quad \forall i = j \quad \text{Κάθετες τάσεις}$$

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} \quad \forall i \neq j \quad \text{Διατμητικές τάσεις}$$

- Η πίεση είναι **ισοτροπικό** μέγεθος (δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας στην οποία ασκείται)
- Η πίεση ασκείται πάντα **κάθεται** στην επιφάνεια και έχει διεύθυνση **προς το εσωτερικό** του ΟΕ, προκαλώντας συμπίεση του ρευστού
- Οι ιξώδεις τάσεις οφείλονται στο ιξώδες του ρευστού και μπορεί να είναι κάθετες και διατμητικές

Προϋπόθεση ανάπτυξης ιξωδών τάσεων

- Προϋποθέσεις ανάπτυξης ιξωδών τάσεων:
 - **Ιξώδες ρευστό** (τα ιδανικά ρευστά έχουν μηδενικό ιξώδες και δεν εμφανίζουν ιξώδεις τάσεις)
 - Διαφορά ταχύτητας μεταξύ γειτονικών στρωμάτων ρευστού – **βαθμίδα ταχύτητας**



- Δυναμικός βαθμίδας ταχύτητας:

$$\begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x & \partial u_y / \partial x & \partial u_z / \partial x \\ \partial u_x / \partial y & \partial u_y / \partial y & \partial u_z / \partial y \\ \partial u_x / \partial z & \partial u_y / \partial z & \partial u_z / \partial z \end{bmatrix}$$

Πίεση σε ακίνητα και κινούμενα ρευστά

Ακίνητα ρευστά

- Μηδενικές ιξώδεις τάσεις
- Ο δυαδικός τάσης έχει μόνο κάθετες συνιστώσες
- Οι κάθετες τάσεις είναι ίσες μεταξύ τους και αντίθετες με την (στατική) πίεση

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

Κινούμενα ρευστά

- Οι κάθετες τάσεις είναι το άθροισμα των κάθετων ιξωδών τάσεων και της στατικής πίεσης

$$\sigma_{xx} = \tau_{xx} - p \quad \sigma_{yy} = \tau_{yy} - p \quad \sigma_{zz} = \tau_{zz} - p$$

- Η **συνολική πίεση** σε ένα σημείο κινούμενου ρευστού ορίζεται ως:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

Παράδειγμα 2

Υπολογισμός πίεσης και δυαδικού ιξώδους τάσης

Ο πίνακας των συνιστωσών του δυαδικού τάσης ενός ρευστού σε ένα σημείο P δίνεται από:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ -3 & -15 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

- (α) Να υπολογιστεί η πίεση του ρευστού στο σημείο P
- (β) Ποιες είναι οι συνιστώσες του δυαδικού ιξώδους τάσης

Παράδειγμα 2 – Λύση 1/2

(α) Πίεσης ρευστού

Σύμφωνα με τον δυαδικό τάσης, οι κάθετες τάσεις στο σημείο P είναι:

$$\sigma_{xx} = -10 \text{ kPa}, \sigma_{yy} = -15 \text{ kPa}, \sigma_{zz} = -5 \text{ kPa}$$

Επομένως:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = 10 \text{ kPa}$$

(β) Ιζώδεις τάσεις

Ο δυαδικός τάσης στο σημείο P είναι το άθροισμα του δυαδικού πίεσης και του δυαδικού ιζώδους τάσης:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 2/2

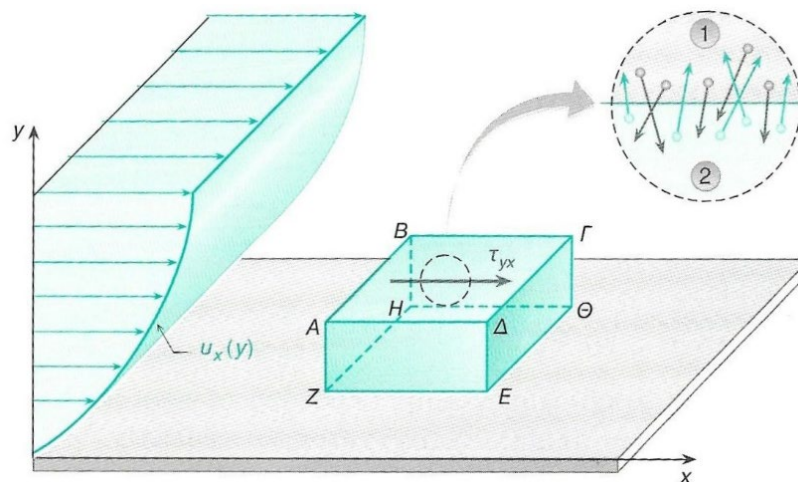
Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Και:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ -3 & -15 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

Μοριακή θεώρηση ιξωδών τάσεων



σ_{ij}

Δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας η οποία ασκείται σε μια i -επιφάνεια κατά τη διεύθυνση j του χώρου

Ρυθμός μεταφοράς j -ορμής ανά μονάδα επιφάνειας κατά τη διεύθυνση i