

Ρευστομηχανική

8^η Διάλεξη

Κινηματική – Ρυθμός ροής και
γραφική απεικόνιση ροής

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Ρυθμός ροής μάζας – Ορισμός

- **Ρυθμός ροής μάζας (παροχή)**

Η ποσότητα του ρευστού που διέρχεται από μια ορισμένη επιφάνεια του πεδίου ροής στη μονάδα του χρόνου

$$\dot{m} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta t} = \frac{dm}{dt} \quad \text{σε} \quad \text{kg/s}$$

- Για τον υπολογισμό του ρυθμού ροής μάζας απαιτείται
 - Η αναλυτική έκφραση **του πεδίου ταχύτητας**
 - Το σχήμα, το μέγεθος και ο προσανατολισμός της **επιφάνειας**

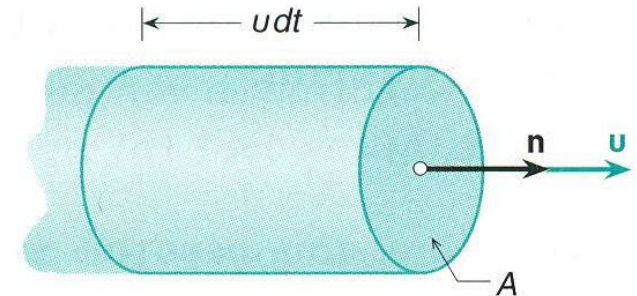
Ρυθμός ροής μάζας – Υπολογισμός 1

- **Ομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας** ($\mathbf{u}$ = σταθερή)
 - Σταθερό μέτρο
 - Σταθερή διεύθυνση
- **Επίπεδη επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση ροής**
 - $\mathbf{n} \equiv$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια
 - $\mathbf{n} \parallel \mathbf{u}$ (παράλληλα διανύσματα)

$$dm = \rho dV = \rho (u dt) A$$



$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho u A$$



Ρυθμός ροής μάζας – Υπολογισμός 2

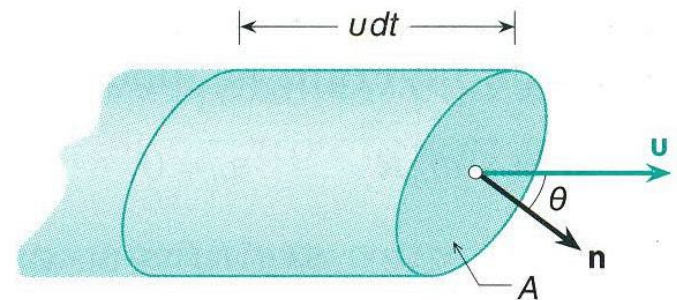
- Ομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας ($\mathbf{u} = \text{σταθερή}$)
- Επίπεδη επιφάνεια σε κλίση ως προς τη διεύθυνση ροής
 - Γωνία μεταξύ $\mathbf{u}$ και $\mathbf{n} = \vartheta$

$$dm = \rho dV = \rho(u dt) A \cos \vartheta$$

$$u \cos \vartheta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n$$



$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho u \cos \vartheta A = \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) A = \rho u_n A$$



- Για $\vartheta = 0^\circ$ $\cos \vartheta = 1 \Rightarrow \dot{m} = \rho u A$
- Για $\vartheta = 90^\circ$ $\cos \vartheta = 0 \Rightarrow \dot{m} = 0$

Ρυθμός ροής μάζας – Υπολογισμός 3

- Ανομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας ($\mathbf{u}$ = μεταβλητή)
- Τυχαία επιφάνεια

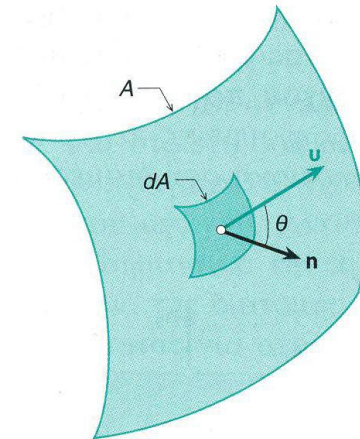
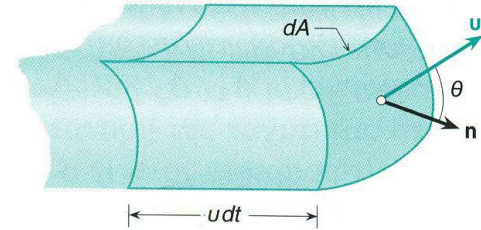
- Στοιχειώδη επιφάνεια dA με κλίση $\mathbf{n}$

$$d\dot{m} = \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dA$$

- Ολοκλήρωση (άθροισμα) σε όλη την επιφάνεια

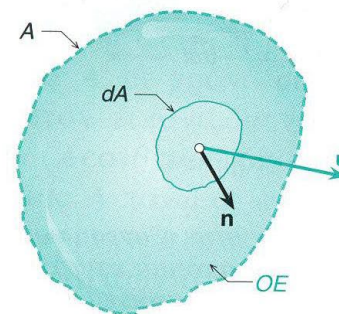
$$\dot{m} = \int_A d\dot{m} = \int_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dA$$

Ποσότητα ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου



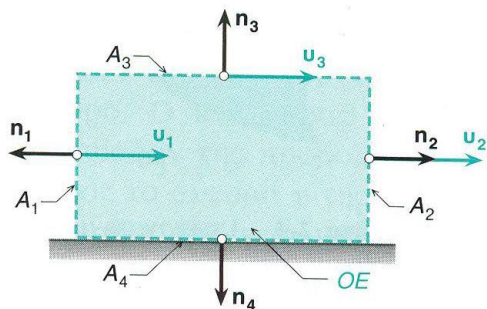
Ρυθμός ροής μάζας σε όγκο ελέγχου (ΟΕ)

- Στοιχειώδη επιφάνεια dA με κλίση $\mathbf{n}$
- Σύμβαση: **Θετική φορά** του $\mathbf{n}$ από το εσωτερικό του ΟΕ προς το περιβάλλον
 - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0 \Rightarrow$ εκροή από τον ΟΕ
 - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0 \Rightarrow$ εισροή στον ΟΕ



$$\dot{m} = \oint_A d\dot{m} = \oint_A \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Ποσότητα καθαρής εκροής μάζας ρευστού από έναν όγκο ελέγχου διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου



- $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 < 0 \Rightarrow$ εισροή στον ΟΕ
- $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 > 0 \Rightarrow$ εκροή από τον ΟΕ
- $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$ ($\mathbf{u}_3$ καθ. $\mathbf{n}_3$)
- $\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{n}_4 = 0$ ($\mathbf{u}_4 = 0$)

Ρυθμός ροής όγκου και μέση ταχύτητα

- **Ρυθμός ροής όγκου** (ογκομετρική παροχή)

$$\dot{V} = \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA \quad \text{σε} \quad \text{m}^3/\text{s}$$

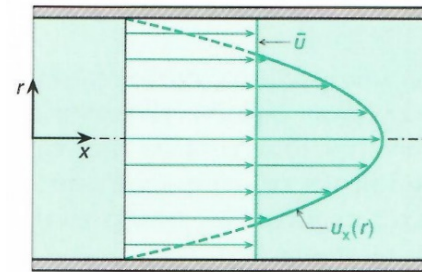
Όγκος ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια στη μονάδα του χρόνου

- Για ασυμπίεστη ροή ($\rho = \text{σταθερή}$)

$$\dot{m} = \rho \dot{V}$$

- **Μέση ταχύτητα** σε επιφάνεια

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA$$



Αν είναι γνωστή η μέση ταχύτητα τότε

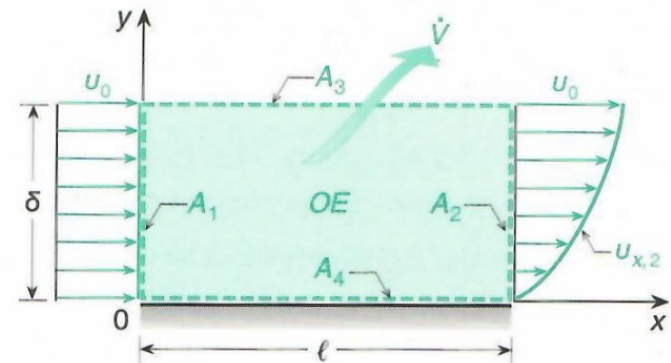
- Ογκομετρική παροχή: $\dot{V} = \bar{u} A$
- Μαζική παροχή (για $\rho = \text{ct}$): $\dot{m} = \rho \bar{u} A$

Παράδειγμα 1

Υπολογισμός ρυθμού ροής σε ΟΕ

Ένα ασυμπίεστο ρευστό ρέει πάνω από οριζόντια πλάκα, μήκους l και πλάτους b . Το ρευστό φτάνει στην πλάκα με ομοιόμορφη ταχύτητα $u_0 (= u_{x,1})$ και την εγκαταλείπει με ταχύτητα $u_{x,2}$, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$u_{x,2} = u_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$



όπου δ το πάχος του οριακού στρώματος στη θέση 2 και y η απόσταση από την επιφάνεια της πλάκας

Αν ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας από τον εικονιζόμενο όγκο ελέγχου είναι μηδέν, να υπολογιστεί ο ανά μονάδα βάθους (b) ογκομετρικός ρυθμός ροής του ρευστού διαμέσου της επίπεδης επιφάνειας στη θέση $y = \delta$ (επιφάνεια 3) ως συνάρτηση των u_0 και δ .

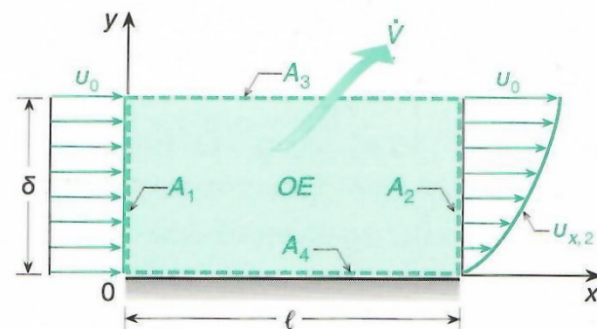
Παράδειγμα 1 – Λύση 1/2

Ανάλυση

Ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας από τον ΟΕ (που είναι ίσος με μηδέν) δίνεται από:

$$\dot{m} = \oint_A \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA = 0$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να αναλυθεί σε κάθε μια από τις τέσσερις επιφάνειες του ΟΕ:



$$\int_{A_1} \rho(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 + \int_{A_2} \rho(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 + \int_{A_3} \rho(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA_4 + \int_{A_4} \rho(\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{n}_4) dA_4 = 0$$

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο ($\rho = \text{σταθερό}$) η παραπάνω γίνεται:

$$\underbrace{\int_{A_1} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1}_{\dot{V}_1} + \underbrace{\int_{A_2} (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2}_{\dot{V}_2} + \underbrace{\int_{A_3} (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA_3}_{\dot{V}_3} + \underbrace{\int_{A_4} (\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{n}_4) dA_4}_{\dot{V}_4} = 0$$

Παράδειγμα 1 – Λύση 2/2

Υπολογισμός γνωστών ρυθμών ροής

Επιφάνεια 4 – μηδενική ταχύτητα:

$$u_4 = 0 \Rightarrow \dot{V}_4 = 0$$

Επιφάνεια 1 – ομοιόμορφη ταχύτητα:

$$u_1 = u_0 \Rightarrow \dot{V}_1 = -u_0 b \delta$$

Επιφάνεια 2 – ανομοιόμορφη ταχύτητα:

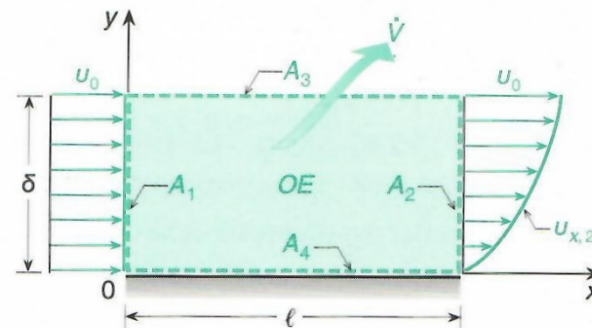
$$\dot{V}_2 = \int_{A_2} (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 = \int_{A_2} u_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) dA_2 = \int_0^\delta u_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) b dy = \frac{2u_0 b \delta}{\pi}$$

Επομένως:

$$\dot{V}_3 = -\dot{V}_1 - \dot{V}_2 - \dot{V}_4 = u_0 b \delta - \frac{2u_0 b \delta}{\pi} = u_0 b \delta \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

και:

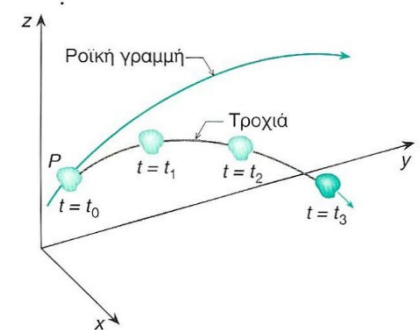
$$\frac{\dot{V}_3}{b} = u_0 \delta \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$



Γραφική παράσταση πεδίων ροής

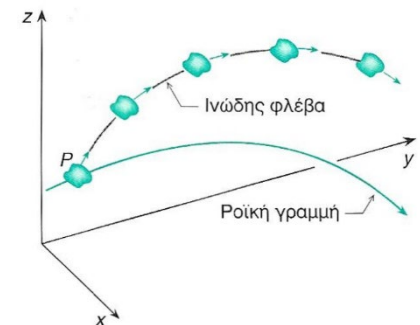
- **Τροχιά:** η διαδρομή που διανύει σωματίδιο του ρευστού στο χώρο για δεδομένο χρονικό διάστημα

Για τον πειραματικό προσδιορισμό χρωματίζεται ένα σωματίδιο ρευστού και αποτυπώνεται (π.χ. με διαδοχικές φωτογραφίες) η θέση του σε διαφορετικές χρονικές στιγμές



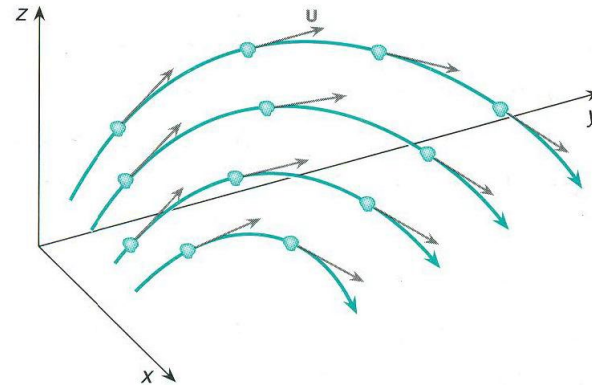
- **Ινώδης φλέβα:** Η νοητή γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται όλα τα σωματίδια που πέρασαν πριν από μία δεδομένη στιγμή από ένα σημείο του πεδίου ροής

Για τον πειραματικό προσδιορισμό εισάγονται χρωματισμένα σωματίδια (π.χ. μια χρωστική ουσία) σε προκαθορισμένο σημείο



Ροϊκές γραμμές

- **Ροϊκή γραμμή:** Η καμπύλη σε κάθε σημείο της οποίας εφάπτεται το διάνυσμα της ταχύτητας σε μια δεδομένη χρονική στιγμή

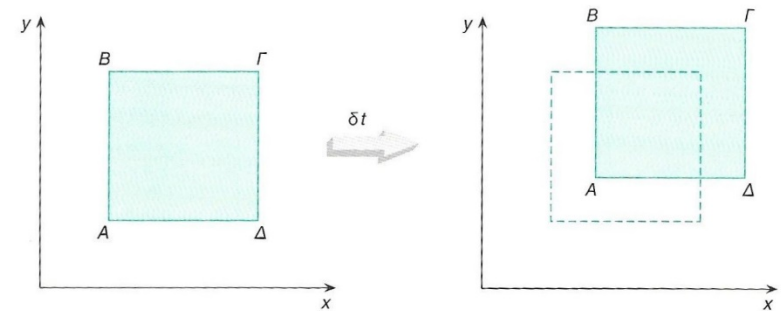


- Είναι «στιγμιαίες» (διαφοροποιούνται σε κάθε χρονική στιγμή)
- Σε μόνιμη ροή μια ροϊκή γραμμή είναι τροχιά και ινώδης φλέβα

Συνιστώσες κίνησης σωματιδίων 1/2

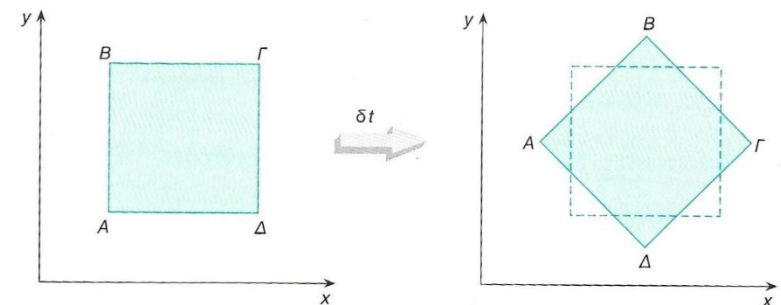
- **Μετάθεση** σωματιδίου

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε το σχήμα και ο προσανατολισμός του να παραμένουν σταθερά



- **Περιστροφή** σωματιδίου

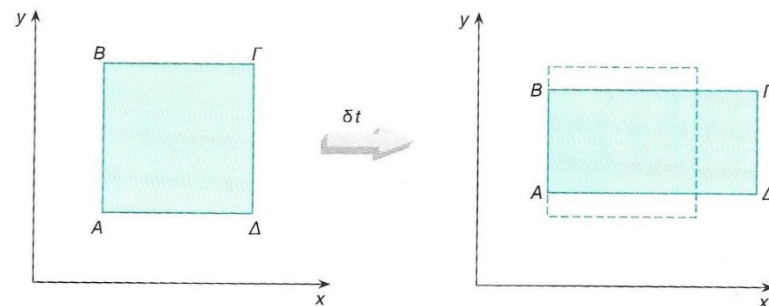
Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε το σχήμα του να παραμένει σταθερό όχι όμως ο προσανατολισμός του



Συνιστώσες κίνησης σωματιδίων 2/2

- Γραμμική παραμόρφωση

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε ο προσανατολισμός του να παραμένει ίδιος όχι όμως το σχήμα του



- Γωνιακή παραμόρφωση

Το σωματίδιο μετατοπίζεται στο χώρο έτσι ώστε να μεταβάλλονται ταυτόχρονα και το σχήμα του και ο προσανατολισμός του

