

Ρευστομηχανική

6^η Διάλεξη

Κινηματική – Πεδία και μέθοδοι περιγραφής

Γεώργιος Αραμπατζής

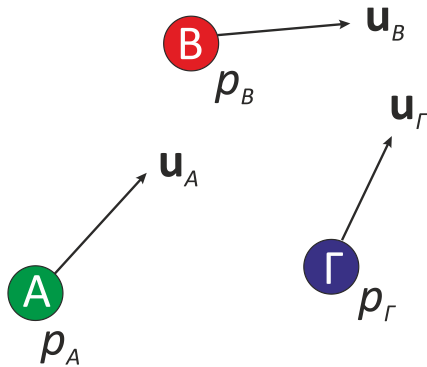
Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Κινηματική ρευστών

- Η κινηματική ασχολείται με τη μελέτη της **κίνησης των ρευστών χωρίς να λαμβάνει υπόψη τις αιτίες που την προκαλούν** (δυνάμεις)
- Η κινηματική των ρευστών ασχολείται με την περιγραφή των μεγεθών που αφορούν στην κίνησή τους
 - **Θέση**
 - **Ταχύτητα**
 - **Επιτάχυνση**
 - **Παραμόρφωση**

Μέθοδοι περιγραφής πεδίων ροής

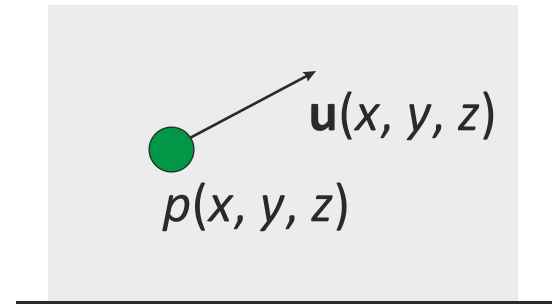
Μέθοδος Lagrange



Κινούμενος παρατηρητής

Ο παρατηρητής παρακολουθεί την κίνηση και τις μεταβολές των ιδιοτήτων συγκεκριμένου σωματιδίου ρευστού

Μέθοδος Euler



Ακίνητος παρατηρητής

Ο παρατηρητής εστιάζει σε συγκεκριμένο σημείο του χώρου και παρακολουθεί τις μεταβολές ιδιοτήτων του ρευστού στο σημείο

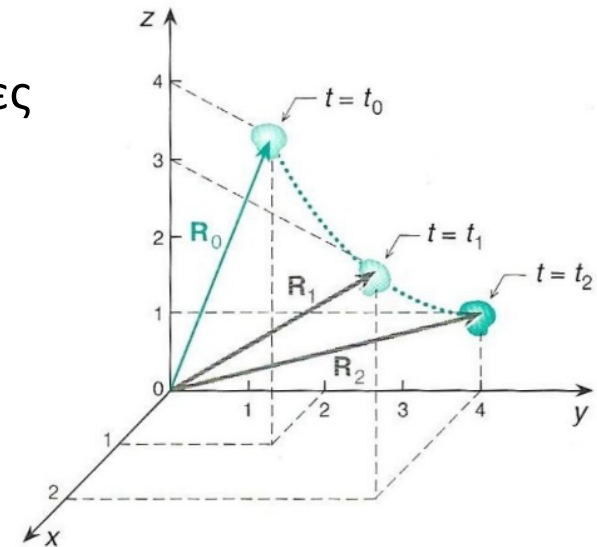
Μέθοδος Lagrange – 1

- Κάθε σωματίδιο ταυτοποιείται από τη θέση που έχει μια χρονική στιγμή t_0 ($=0$)

- **Υλικές συντεταγμένες** x_0, y_0, z_0 : συντεταγμένες της αρχικής θέσης του σωματιδίου
- **Υλικό διάνυσμα** θέσης: $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$



- Κάθε σωματίδιο ταυτοποιείται από το υλικό διάνυσμα θέσης του



- Η θέση του σωματιδίου μια δεδομένη χρονική στιγμή t καθορίζεται από τις συντεταγμένες x, y, z του σημείου του χώρου στο οποίο βρίσκεται (**χωρικές συντεταγμένες**)
- **Χωρικό διάνυσμα** θέσης: $\mathbf{R} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$

Μέθοδος Lagrange – 2

Παράδειγμα: Περιγραφή θερμοκρασίας ενός σωματιδίου

- Θερμοκρασία ενός σωματιδίου που τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}$ (χωρικό διάνυσμα)

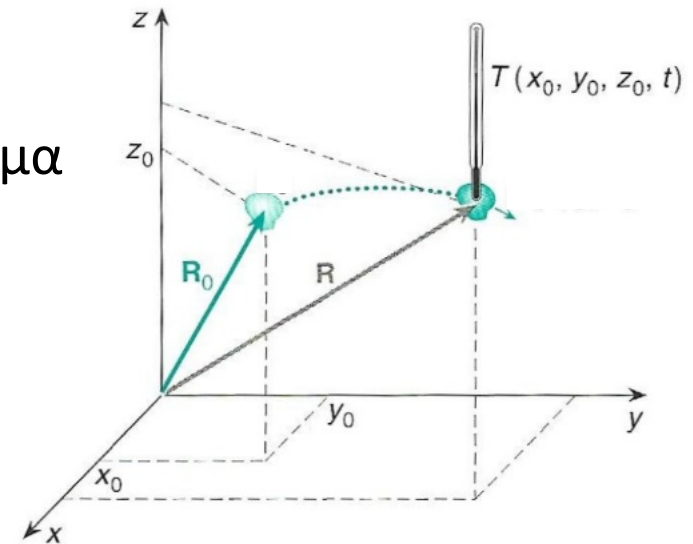
$$T = T(\mathbf{R}, t)$$

- Η θέση $\mathbf{R}$ εξαρτάται από το υλικό διάνυσμα $\mathbf{R}_0$ (το ίδιο το σωματίδιο) και το χρόνο

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t)$$



$$T = T(\mathbf{R}_0, t) = T(x_0, y_0, z_0, t)$$



Στη μέθοδο Lagrange, η θερμοκρασία (όπως και κάθε άλλο μέγεθος) ενός σωματιδίου είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου

Μέθοδος Lagrange – 3

- Αποτελεί την κύρια μέθοδο περιγραφής της κίνησης στερεών σωμάτων
- Δυσχερής η εφαρμογή της σε προβλήματα Ρευστομηχανικής:
 - Δυσκολία ταυτοποίησης και ταυτόχρονης παρακολούθησης του συνόλου των σωματιδίων του ρευστού
 - Οδηγεί σε πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις, η επίλυση των οποίων είναι δύσκολη
- Η εφαρμογή της μεθόδου Lagrange περιορίζεται σε ορισμένα ειδικά προβλήματα:
 - κίνηση σταγόνων υγρού
 - κίνηση φυσαλίδων αερίων σε ετερογενή μίγματα ρευστών

Στα περισσότερα προβλήματα ροής δεν ενδιαφέρει η συμπεριφορά καθενός σωματιδίου ρευστού αλλά τα μεγέθη (παράμετροι ροής, ιδιότητες, κλπ.) σε διάφορα σημεία του ρευστού και οι μεταβολές τους με το χρόνο

Μέθοδος Euler

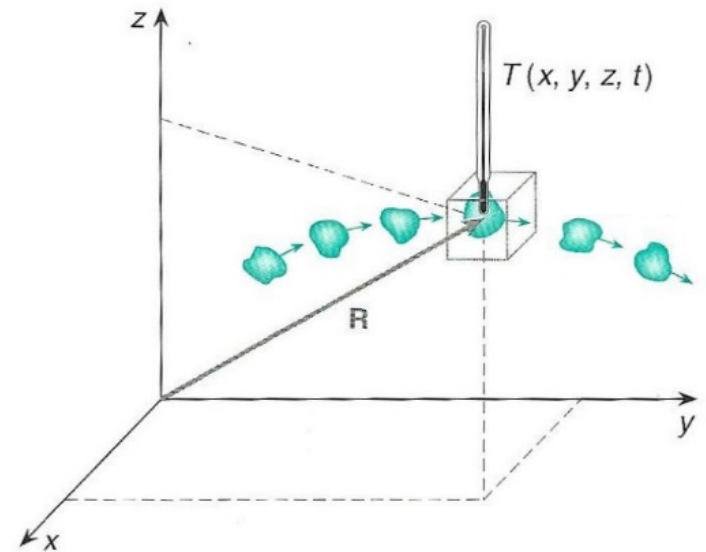
Παράδειγμα: Περιγραφή θερμοκρασίας σε ένα σημείο του χώρου

- Η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή t είναι ίση με τη θερμοκρασία του σωματιδίου που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}$
- Η θέση $\mathbf{R}$ είναι ανεξάρτητη μεταβλητή



Πεδίο Θερμοκρασίας

$$T = T(\mathbf{R}, t) = T(x, y, z, t)$$



Στη μέθοδο Euler, η θερμοκρασία (όπως και κάθε άλλο μέγεθος) ενός σωματιδίου είναι συνάρτηση του χώρου και του χρόνου

Επιλογή μεθόδου

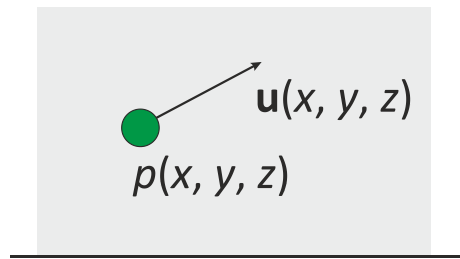
Είδος πληροφορίας

Η τιμή ενός φυσικού μεγέθους σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ροής

π.χ. η ταχύτητα των σωματιδίων ρευστού στην έξοδο ακροφυσίου



Μέθοδος Euler

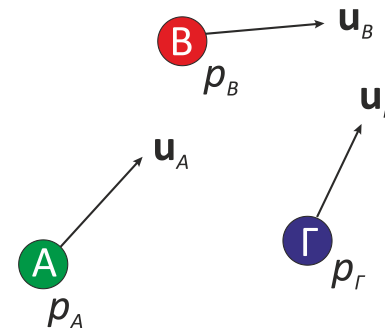


Πως μεταβάλλονται οι ιδιότητες ενός σωματιδίου ρευστού καθώς αυτό κινείται μέσα στο πεδίο ροής

π.χ. η ταχύτητα μιας φουσαλίδας αέρα που ανέρχεται σε ρευστό που βράζει.



Μέθοδος Lagrange



Η έννοια του πεδίου

- Περιοχή του χώρου, σε κάθε σημείο της οποίας, ένα δεδομένο φυσικό μέγεθος έχει μια ορισμένη τιμή, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο

$$\psi = \psi(x, y, z, t)$$

- **Βαθμωτό** ή μονόμετρο μέγεθος (π.χ. θερμοκρασία)

$$T = T(x, y, z, t)$$

- **Διανυσματικό** ή ανυσματικό μέγεθος (π.χ. ταχύτητα)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$$

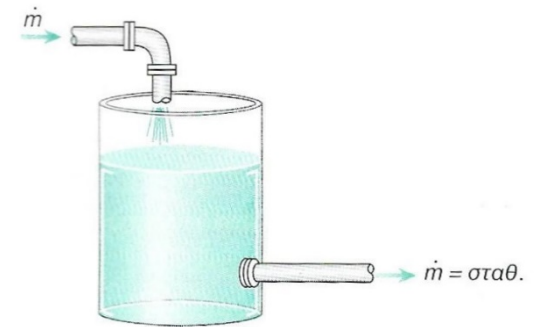
- **Δυναμικό** μέγεθος ή τανυστής (π.χ. ιξώδεις τάσεις)

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x, y, z, t)$$

Μόνιμη και μη-μόνιμη ροή

- **Μόνιμη ροή** (steady flow): Η ταχύτητα σε ένα δεδομένο σημείο του χώρου δε μεταβάλλεται με το χρόνο

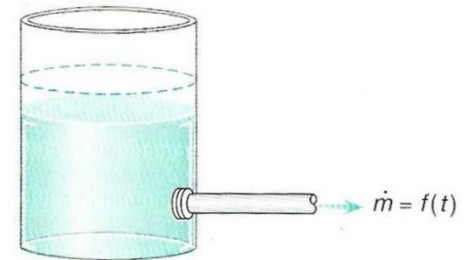
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$$



!! Μόνιμη ροή δε σημαίνει ότι η ταχύτητα είναι ομοιόμορφη. Μπορεί να μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο μέσα στο χώρο

- **Μη-μόνιμη ροή** (unsteady flow):

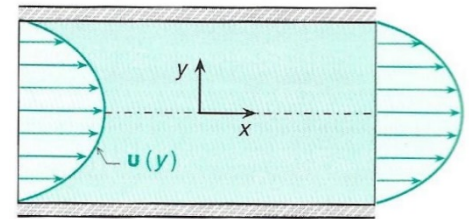
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$$



1Δ, 2Δ και 3Δ ροή

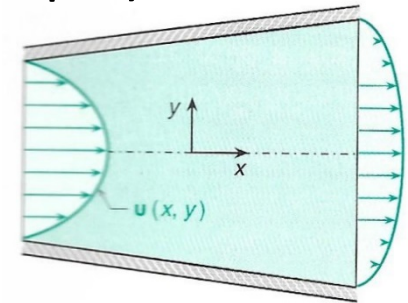
- **Μονοδιάστατη ροή:** Η ταχύτητα μεταβάλλεται μόνο ως προς μια χωρική συντεταγμένη (π.χ. y)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(y, t) \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(y)$$



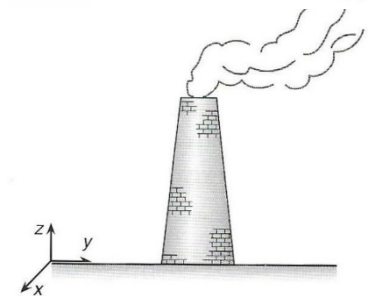
- **Διδιάστατη ροή:** Η ταχύτητα μεταβάλλεται ως προς δύο χωρικές συντεταγμένες (π.χ. x, y)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y)$$



- **Τριδιάστατη ροή**

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad \text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$$



Παράδειγμα 1

- Για τα παρακάτω πεδία ταχύτητας, να καθοριστεί το είδος του αντίστοιχου πεδίου ροής (μόνιμο ή μη-μόνιμο, μόνο- ή δι- ή τριδιάστατο)

$$(\alpha) \quad \mathbf{u} = (ax^2b^{-bt})\mathbf{i} + cx\mathbf{j}$$

$$(\beta) \quad \mathbf{u} = ay^2\mathbf{i} + byz\mathbf{j}$$

$$(\gamma) \quad \mathbf{u} = (ax + t)\mathbf{i} + by^2\mathbf{j}$$

$$(\delta) \quad \mathbf{u} = ax\mathbf{i} + by^2\mathbf{j} + cxz\mathbf{k}$$

Παράδειγμα 1 – Λύση

(α) $\mathbf{u} = (ax^2b^{-bt})\mathbf{i} + cx\mathbf{j}$

- Μη-μόνιμο (εξαρτάται από τον χρόνο t)
- Μονοδιάστατο (εξαρτάται μόνο από τη x συντεταγμένη)

(β) $\mathbf{u} = ay^2\mathbf{i} + byz\mathbf{j}$

- Μόνιμο (δεν εξαρτάται από τον χρόνο)
- Διδιάστατο (εξαρτάται από y και z)

(γ) $\mathbf{u} = (ax + t)\mathbf{i} + by^2\mathbf{j}$

- Μη-μόνιμο (εξαρτάται από τον χρόνο t)
- Διδιάστατο (εξαρτάται από x και y)

(δ) $\mathbf{u} = ax\mathbf{i} + by^2\mathbf{j} + cxz\mathbf{k}$

- Μόνιμο (δεν εξαρτάται από τον χρόνο)
- Τριδιάστατο (εξαρτάται από x , y και z)