

Ρευστομηχανική

4^η Διάλεξη

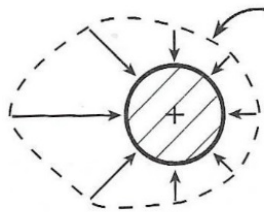
Στατική – Δυνάμεις σε επιφάνειες

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Κατανομή πίεσης και δύναμη σε επιφάνεια

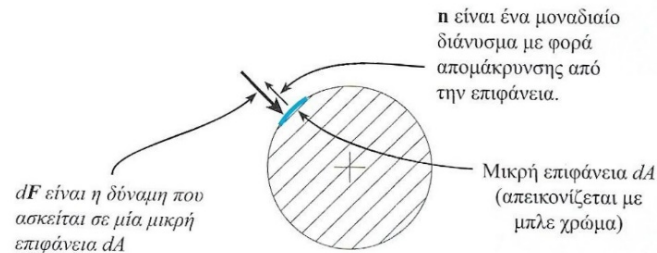
- **Κατανομή πίεσης**: ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλεται η πίεση, από σημείο σε σημείο, κατά μήκος μιας επιφάνειας



Κατανομή πίεσης: Περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η πίεση από σημείο σε σημείο κατά μήκος μιας επιφάνειας (σε αυτό το παράδειγμα η πίεση είναι μεγάλη στο μπροστινό μέρος και μικρή στο πίσω μέρος)

- **Δύναμη** που ασκείται σε **στοιχειώδες τμήμα** της επιφάνειας dA

$$dF = -pndA$$



- **Συνολική δύναμη** που ασκείται στην επιφάνεια A

$$\mathbf{F}_R = \int_A d\mathbf{F} = - \int_A p n dA$$

Η δύναμη ασκείται σε ένα σημείο που ονομάζεται **κέντρο πίεσης**

Δύναμη σε οριζόντια επίπεδη επιφάνεια

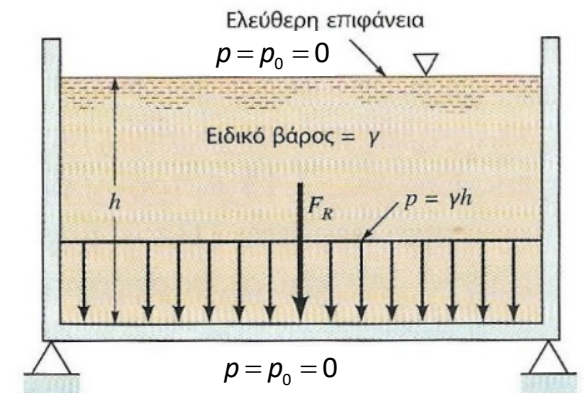
- Σε οριζόντιες επιφάνειες η κατανομή της υδροστατικής πίεσης είναι **ομοιόμορφη**
- Η δύναμη είναι **κατακόρυφη** με φορά προς την επιφάνεια
- **Μέτρο** της δύναμης:

$$F_R = \int_A p dA = p \int_A dA \Rightarrow F_R = p A$$

όπου: $p = p_0 + \gamma h$ ή $p = \gamma h$

- Η δύναμη **ασκείται στο κέντρο βάρους** της επιφάνειας

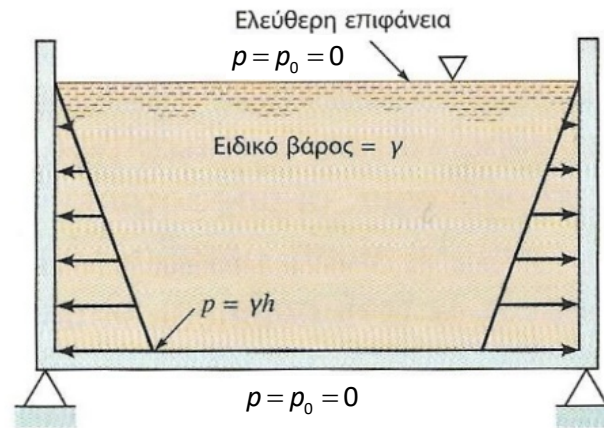
(κέντρο πίεσης = κέντρο βάρους)



Συνήθως η επίδραση της ατμοσφαιρικής πίεσης δε λαμβάνεται υπόψη ($p_0 = 0$) καθώς η ίδια πίεση επενεργεί και στην άλλη όψη της επιφάνειας

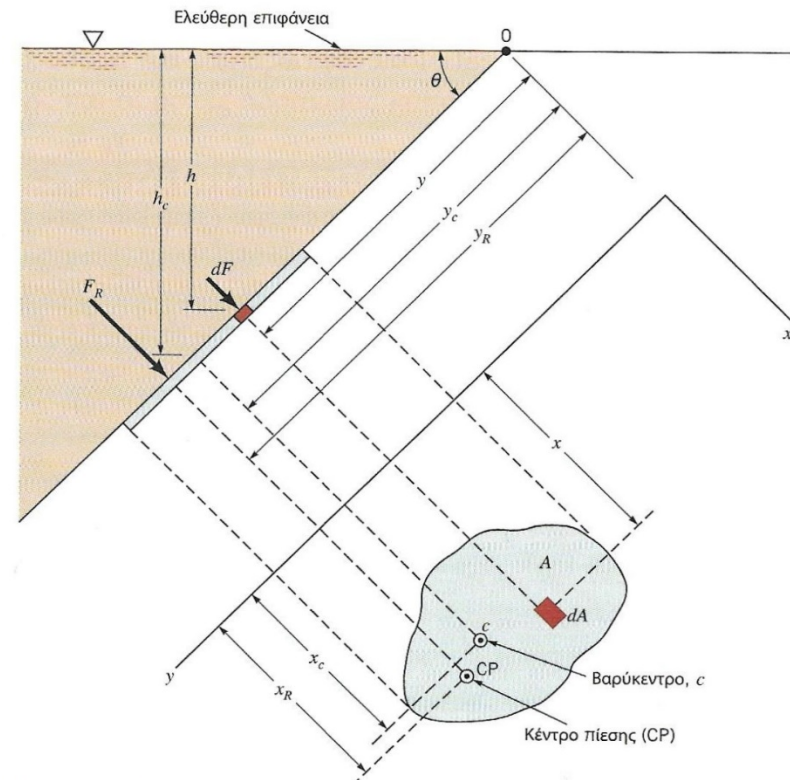
Κατανομή πίεσης σε κατακόρυφη ή πλάγια επιφάνεια

- Η κατανομή της υδροστατικής πίεσης **δεν είναι ομοιόμορφη** (γραμμική με το βάθος h)
- Η δύναμη ασκείται στο κέντρο πίεσης που στη γενική περίπτωση είναι **διαφορετικό** από το κέντρο βάρους της επιφάνειας



Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια – 1

- Επίπεδη επιφάνεια **οποιασδήποτε μορφής και οποιασδήποτε διεύθυνσης** (γωνίας θ)
- Η δύναμη έχει **διεύθυνση κάθετη προς την επιφάνεια και φορά προς την επιφάνεια**
- Το μέτρο της δύναμης εξαρτάται μόνο από το βάθος και είναι ίσο με **την πίεση που ασκείται στο κέντρο βάρους της επιφάνειας επί το εμβαδόν αυτής**



$$F_R = (p_0 + \gamma h_c) A \quad \text{ή} \quad F_R = \gamma h_c A \quad \text{για} \quad p_0 = 0$$

h_c Το βάθος του κέντρου βάρους της επιφάνειας

Δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια – 2

- Για τον υπολογισμό του σημείου που ασκείται η δύναμη (κέντρο πίεσης) εφαρμόζεται το θεώρημα των ροπών:

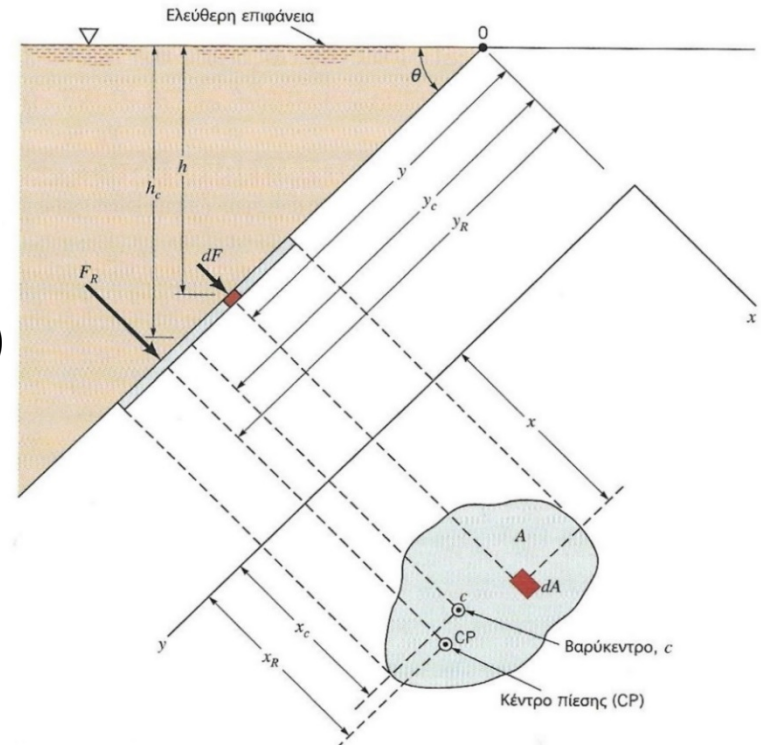
Η ροπή της συνισταμένης δύναμης πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα (ολοκλήρωμα) των ροπών των συνιστωσών (κατανεμημένης πίεσης)

- Συντεταγμένες κέντρου πίεσης

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c A}$$

$$x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c A}$$

για $p_0 = 0$

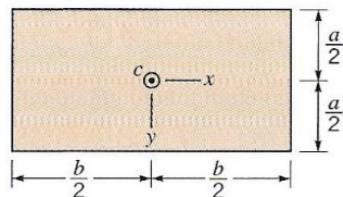


I_{xc} Ροπή αδράνειας ως προς άξονα παράλληλο στον x που περνά από το κ.β.

I_{xyc} Γινόμενο ροπών ως προς άξονες που περνούν από το κ.β.

x_c, y_c Συντεταγμένες κέντρου βάρους επιφάνειας

Γεωμετρικές ιδιότητες συνηθισμένων σχημάτων



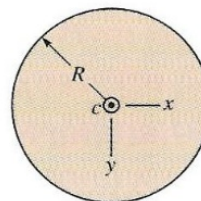
(a) Ορθογώνιο

$$A = ba$$

$$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xyc} = 0$$

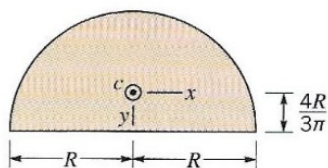


(b) Κύκλος

$$A = \pi R^2$$

$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyc} = 0$$



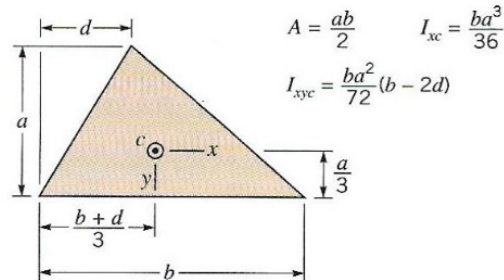
(c) Ημικύκλιο

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xc} = 0.1098R^4$$

$$I_{yc} = 0.3927R^4$$

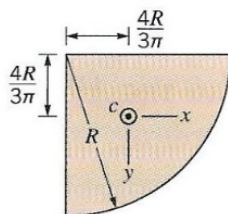
$$I_{xyc} = 0$$



(d) Τρίγωνο

$$A = \frac{ab}{2} \quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b-2d)$$



(e) Τεταρτοκύκλιο

$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$$

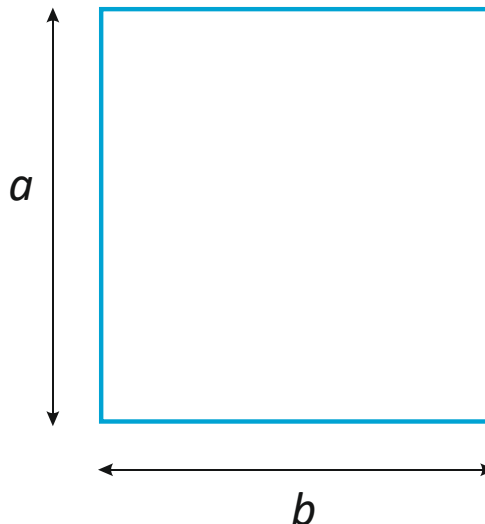
$$I_{xyc} = -0.01647R^4$$

Παράδειγμα 1

Υδροστατική πίεση σε καλούπι

(α) Να υπολογιστεί η υδροστατική δύναμη που ασκείται στη μια πλευρά ενός καλουπιού ύψους $a = 2.44$ m και πλάτους $b = 1.22$ m, στο οποίο εισέρχεται υγρό τσιμέντο για την κατασκευή ενός τοίχου. Το ειδικό βάρος του τσιμέντου είναι $\gamma = 23.6$ kN/m³

(β) Να υπολογιστεί το σημείο εφαρμογής της υδροστατικής δύναμης.



Παράδειγμα 1 – Λύση 1/1

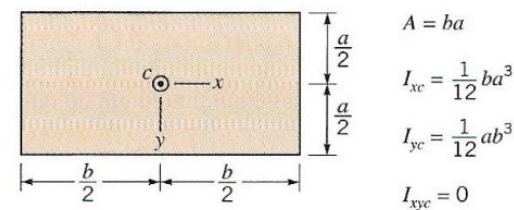
(α) Υπολογισμός δύναμης

$$F = \gamma h_c A$$

$$A = ba = 1.22 \times 2.44 = 2.997 \text{ m}^2$$

$$h_c = \frac{a}{2} = \frac{2.44}{2} = 1.22 \text{ m}$$

$$F = 23.6 \times 1.22 \times 2.997 = 85.7 \text{ kN}$$



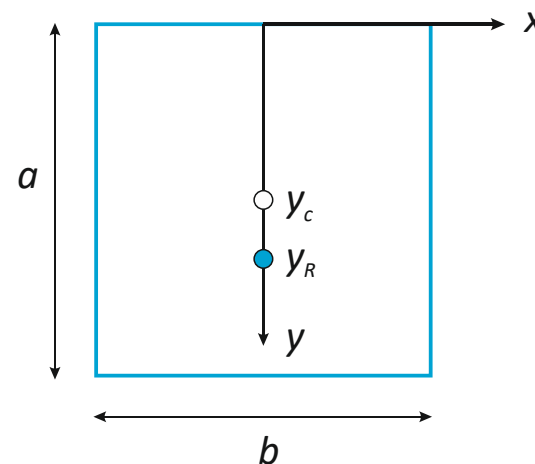
(α) Ορθογώνιο

(β) Υπολογισμός κέντρου πίεσης

$$x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c A} \Rightarrow x_R = x_c = 0 \quad (I_{xyc} = 0)$$

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c A} \Rightarrow \quad (y_c = a/2)$$
$$(I_{xc} = (1/12) ba^3)$$

$$y_R = \frac{2}{3} a = \frac{2}{3} \times 2.44 = 1.627 \text{ m}$$



Πρίσμα πίεσης – 1

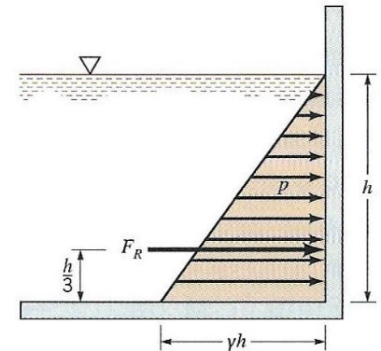
- Δύναμη σε **κατακόρυφη, επίπεδη, ορθογωνική** επιφάνεια

$$F_R = \gamma h_c A = \gamma \left(\frac{h}{2} \right) (b h)$$



$$F_R = \frac{1}{2} (\gamma h) (b h)$$

Το μέτρο της δύναμης είναι ίσο με τον όγκο του πρίσματος πίεσης



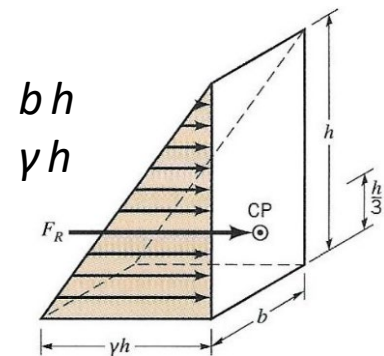
Αποδεικνύεται ότι

Το σημείο επαφής της δύναμης είναι το βαρύκεντρο του πρίσματος (απόσταση $h/3$ από το κάτω μέρος)

Πρίσμα πίεσης

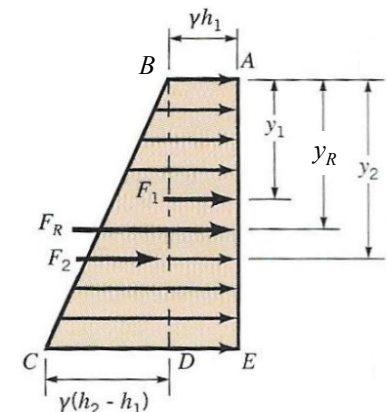
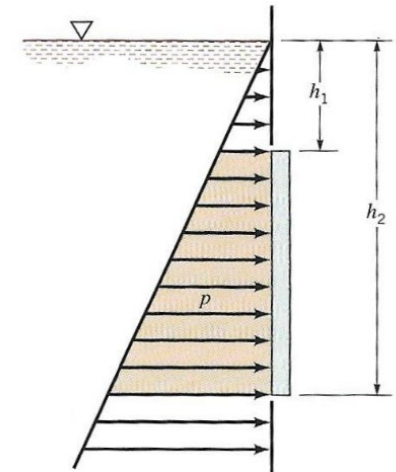
Εμβαδό βάσης: $b h$

Ύψος:



Πρίσμα πίεσης – 2

- Δύναμη σε **βυθισμένη κατακόρυφη, επίπεδη, ορθογωνική** επιφάνεια
- Η συνολική δύναμη είναι ίση με τον όγκο του πρίσματος πίεσης τραπεζοειδούς διατομής
- Το πρίσμα πίεσης «σπάει» σε ένα **ορθογωνικό** (ABDE) και ένα **τριγωνικό** (BCD) τμήμα
- Η συνολική δύναμη είναι ίση με το άθροισμα των όγκων των δύο πρισμάτων



$$F_R = F_1 + F_2$$

- Το σημείο επαφής της δύναμης προσδιορίζεται από το ισοζύγιο ροπών γύρω από κάποιο σημείο (π.χ. A)

$$F_R y_R = F_1 y_1 + F_2 y_2$$

Πρίσμα πίεσης – 3

- Δύναμη σε **κεκλιμένη, επίπεδη, ορθογωνική** επιφάνεια
- Η συνολική δύναμη είναι ίση με τον όγκο του πρίσματος πίεσης τραπεζοειδούς διατομής
- Οι αναπτυσσόμενες πιέσεις εξαρτώνται από τις **κατακόρυφες αποστάσεις** (και όχι από τις αποστάσεις κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας)

