

Ρευστομηχανική

3^η Διάλεξη

Στατική – Μεταβολή πίεσης σε
ρευστά

Γεώργιος Αραμπατζής

Σχολή Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης
Πολυτεχνείο Κρήτης
Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Στατική ρευστών

- Ρευστό σε **ηρεμία**, ή
- Ρευστό που κινείται κατά τρόπο ώστε **να μην υπάρχει σχετική κίνηση** μεταξύ γειτονικών στοιχείων



- **Μηδενικός ρυθμός διάτμησης (παραμόρφωσης)**
- **Απουσία διατμητικών τάσεων**

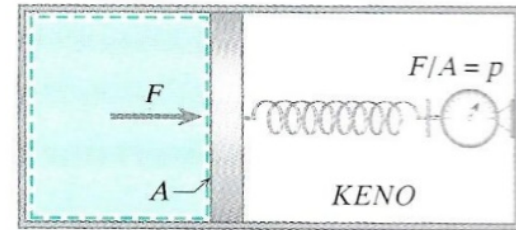


- Η μόνη επιφανειακή δύναμη είναι η **πίεση**
- Ταυτόχρονη παρουσία **σωματικών δυνάμεων** (π.χ. βαρύτητα)

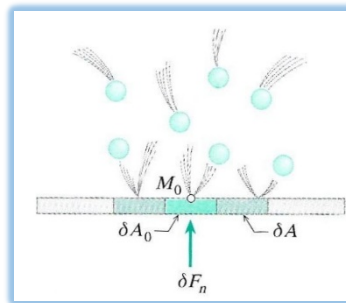
Πίεση

- Ο λόγος της δύναμης που ασκείται από το ρευστό **κάθετα** πάνω σε μια επιφάνεια προς το εμβαδό της επιφάνειας

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{σε Pa} = \text{N/m}^2$$



- Από μοριακή άποψη η πίεση προέρχεται από την πρόσκρουση των μορίων ρευστού στην επιφάνεια και τη μεταβολή της ορμής τους



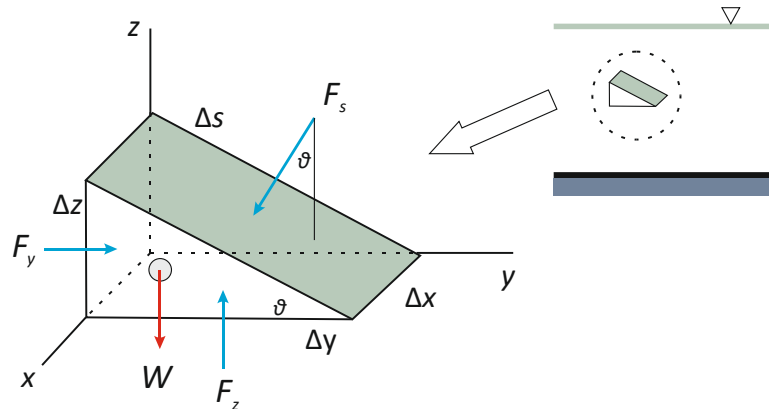
Πίεση σε σημείο 1/4

Ερώτηση

Πως εξαρτάται η πίεση σε ένα σημείο από τον προσανατολισμό της επιφάνειας;

- Στοιχείο ρευστού σχήματος τριγωνικής σφήνας **τυχαίας γωνίας ϑ** και σε τυχαία θέση εντός του ρευστού

Διάγραμμα
ελευθέρου
σώματος



$$F_y = p_y \Delta x \Delta z$$

$$F_z = p_z \Delta x \Delta y$$

$$F_s = p_s \Delta x \Delta s$$

$$W = \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g$$

- Δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό: 
 - Δυνάμεις **πίεσης** F_y , F_z , F_s (επιφανειακές δυνάμεις)
 - Βάρος** του ρευστού W (σωματική δύναμη)

Πίεση σε σημείο 2/4

- 2^{ος} νόμος κίνησης του Newton στη διεύθυνση y

$$(\Sigma F)_y = 0 \Rightarrow F_y - F_s \sin(\vartheta) = 0$$

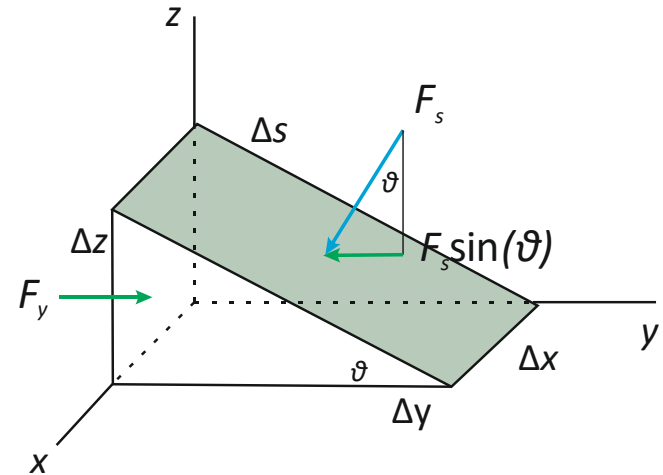
↓ $F_y = p_y \Delta x \Delta z \quad F_s = p_s \Delta x \Delta s$

$$p_y \Delta x \Delta z - p_s \Delta x \Delta s \sin(\vartheta) = 0$$

↓ $\Delta s \sin(\vartheta) = \Delta z$

$$p_y \Delta x \Delta z - p_s \Delta x \Delta z = 0 \Rightarrow p_y = p_s$$

$$\sin(\vartheta) = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_{s,y}}{F_s} = \frac{\Delta z}{\Delta s}$$



Πίεση σε σημείο 3/4

- 2^{ος} νόμος κίνησης του Newton στη διεύθυνση z

$$(\Sigma F)_z = 0 \Rightarrow F_z - F_s \cos(\vartheta) - W = 0$$

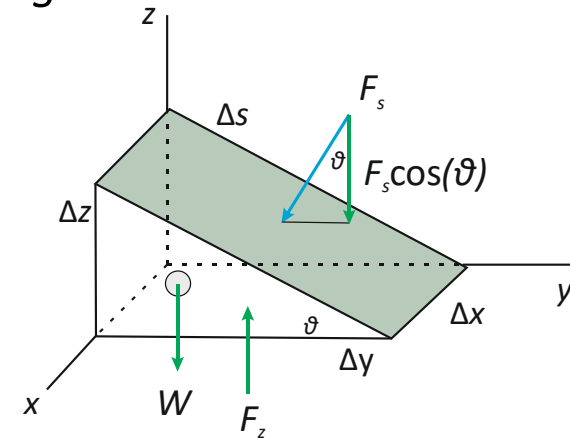
$$\cos(\vartheta) = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{F_{s,x}}{F_s} = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

↓ $F_z = p_z \Delta x \Delta y \quad F_s = p_s \Delta x \Delta s \quad W = \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g$

$$p_z \Delta x \Delta y - p_s \Delta x \Delta s \cos(\vartheta) - \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g = 0$$

↓ $\Delta s \cos(\vartheta) = \Delta y$

$$p_z \Delta x \Delta y - p_s \Delta x \Delta y - \rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2} g = 0 \Rightarrow p_z = p_s + \frac{1}{2} \rho g \Delta z$$



Πίεση σε σημείο 4/4

- Συμπεράσματα

$p_y = p_s$ Η πίεση δε μεταβάλλεται κατά την y (και x) διεύθυνση

$p_z = p_s + \frac{1}{2}\rho g \Delta z$ Η πίεση μεταβάλλεται κατά τη z διεύθυνση ανάλογα με τα ρ , g και το βάθος

- Όταν το πρίσμα γίνεται σημείο ($\Delta x, \Delta y, \Delta z, \rightarrow 0$)

$$p_y = p_z = p_s = p$$

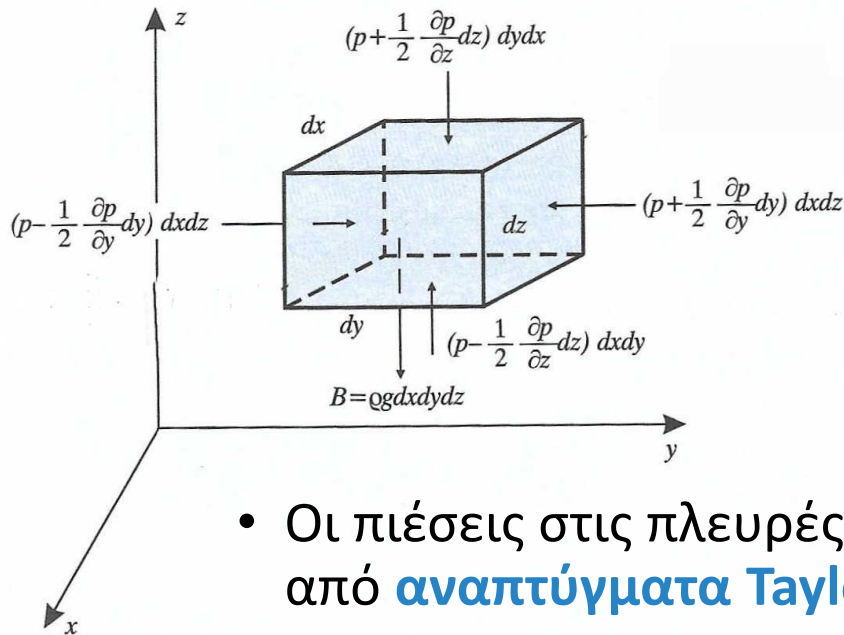
Απάντηση (Νόμος του Pascal)

Σε ένα ρευστό σε στατική ισορροπία, η πίεση σε ένα σημείο είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης της επιφάνειας

Βασική εξίσωση πεδίου πιέσεων 1/3

Ερώτηση

Πως μεταβάλλεται η πίεση από σημείο σε σημείο ενός ακίνητου ρευστού;



- Σωματίδιο ρευστού με διαστάσεις (dx, dy, dz)
- p : πίεση στο κέντρο του σωματιδίου

- Οι πιέσεις στις πλευρές του παραλληλεπιπέδου εκφράζονται από **αναπτύγματα Taylor**, αμελώντας όρους ανώτερης τάξης π.χ. πιέσεις κατά τη διεύθυνση y

$$\text{δεξιά πλευρά: } p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$\text{αριστερή πλευρά: } p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

Βασική εξίσωση πεδίου πιέσεων 2/3

- Ισορροπία δυνάμεων (2^{ος} νόμος Newton) στην y -διεύθυνση

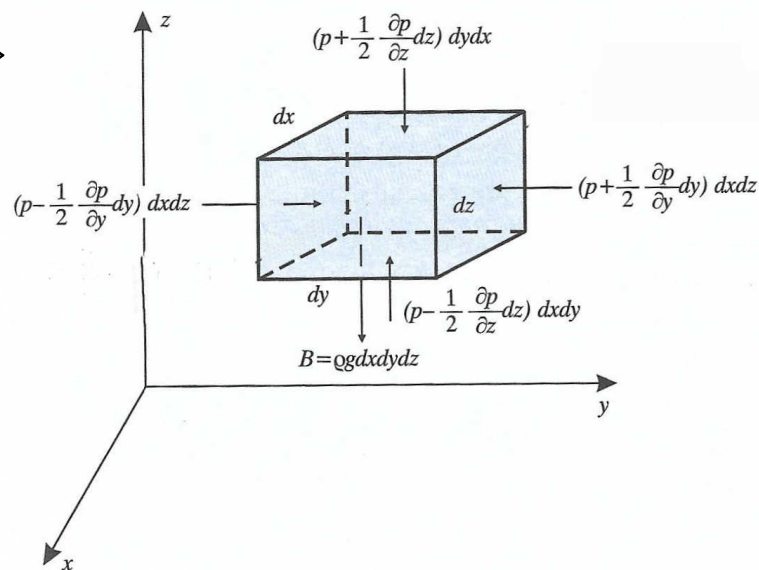
$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

- Ισορροπία δυνάμεων στη z -διεύθυνση

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \rho g dx dy dz = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$



Βασική εξίσωση πεδίου πιέσεων 3/3

- Εξισώσεις μεταβολής της πίεσης

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

εναλλακτικά

$$\nabla p + \rho g \mathbf{k} = 0$$

Απάντηση

- Σε ένα ρευστό που ηρεμεί η πίεση είναι συνάρτηση μόνο του ύψους (διεύθυνση z)
- Η πίεση ελαττώνεται με αύξηση του z (μεγαλύτερη πίεση στα κατώτερα στρώματα του ρευστού)

Κατανομή πίεσης σε ασυμπίεστα ρευστά

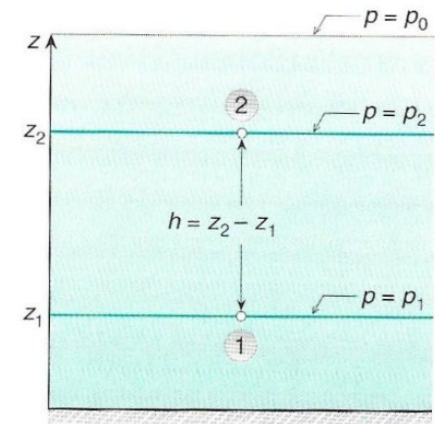
- Ασυμπίεστο ρευστό (**υγρό** σε συνήθεις συνθήκες) $\rho = \text{σταθερή}$
- Ολοκλήρωση της $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ μεταξύ των θέσεων (υψών):

- $z = z_1, \quad p = p_1$

- $z = z_2, \quad p = p_2$

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \Rightarrow dp = -\gamma dz \Rightarrow$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \Rightarrow p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1)$$



Υδροστατική Κατανομή Πίεσης

$$p_1 = p_2 + \gamma(z_2 - z_1) = p_2 + \gamma h$$

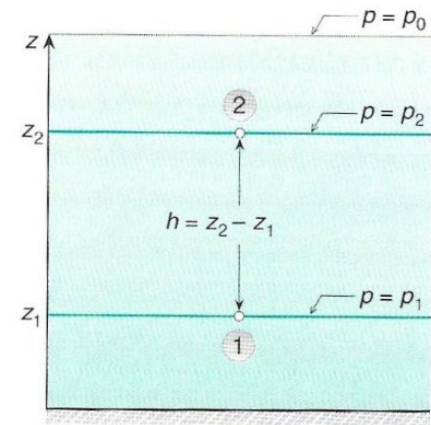
Ύψος πίεσης

- Η διαφορά πίεσης μεταξύ δύο σημείων μπορεί να υπολογιστεί αν είναι γνωστή η διαφορά στάθμης των δύο σημείων

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

- Ύψος πίεσης (pressure head) h

Το ύψος στήλης υγρού ειδικού βάρους γ που απαιτείται για να προκαλέσει διαφορά πίεσης $\Delta p = p_1 - p_2$



π.χ $\Delta p = 70 \text{ kPa}$ εκφράζεται ως $h = 7 \text{ μέτρα στήλης ύδατος (mH}_2\text{O)}$, ή
 $h = 520 \text{ mm στήλης υδραργύρου (mmHg)}$

Αρχή υδροστατικής

- Κατά τη μελέτη υγρών, χρησιμοποιείται ως επίπεδο αναφοράς η ελεύθερη επιφάνεια
- Η πίεση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (p_0) αποτελεί **πίεση αναφοράς**
- Η πίεση σε βάθος h από ελεύθερη επιφάνεια είναι:

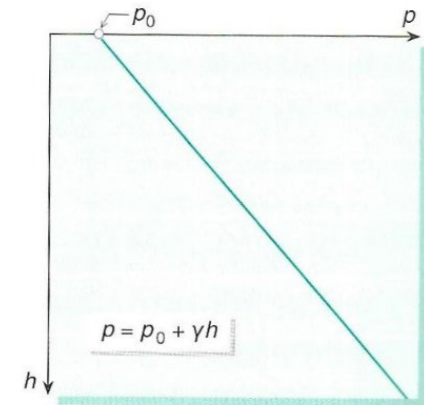
Αρχή Υδροστατικής

Απόλυτη πίεση

$$p = p_0 + \gamma h$$

Σχετική (μανομετρική) πίεση

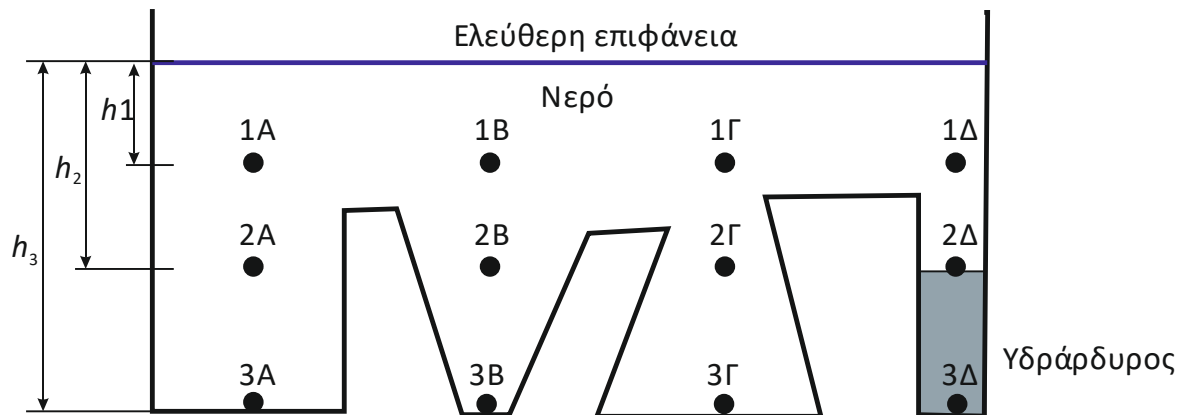
$$p - p_0 = \gamma h$$



Η υδροστατική πίεση εξαρτάται γραμμικά από το βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια και είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος και το σχήμα του δοχείου

Παράδειγμα κατανομής υδροστατικής πίεσης

- Τα σημεία (1Α, 1Β, 1Γ και 1Δ) βρίσκονται στο ίδιο βάθος νερού (h_1) και έχουν την ίδια πίεση
- Τα σημεία (2Α, 2Β, 2Γ και 2Δ) βρίσκονται στο ίδιο βάθος νερού (h_2) και έχουν την ίδια πίεση
- Τα σημεία (3Α, 3Β, και 3Γ) βρίσκονται στο ίδιο βάθος νερού (h_3) και έχουν την ίδια πίεση
- Το σημείο 3Δ αν και βρίσκεται στο ίδιο βάθος με τα 3Α, 3Β, 3Γ δεν έχει τη ίδια πίεση γιατί βρίσκεται σε διαφορετικό ρευστό

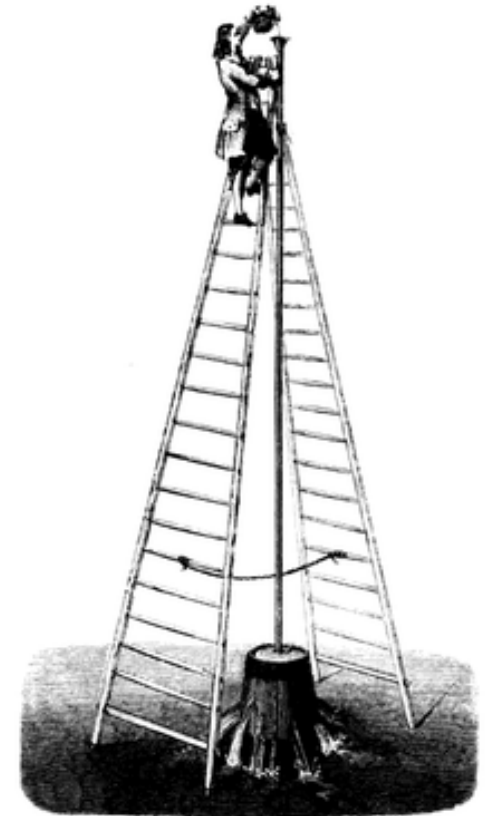


Το βαρέλι του Pascal

Το 1646 ο Blaise Pascal (1623-1662) έκανε ένα εντυπωσιακό για την εποχή πείραμα που χαρακτηρίστηκε ως υδροστατικό παράδοξο:

- Στην πάνω επιφάνεια ενός βαρελιού που περιείχε νερό όγκου 1000 L, άνοιξε μια μικρή τρύπα και προσάρμοσε σε αυτήν ένα λεπτό κατακόρυφο σωλήνα αρκετών μέτρων.
- Όταν γέμισε τον κατακόρυφο σωλήνα με νερό, τα τοιχώματα του βαρελιού άνοιξαν και το νερό χύθηκε έξω.

Το φαινόμενο αυτό λαμβάνοντας υπόψη την αύξηση της πίεσης που προκαλείται σε ένα σημείο της πλευρικής επιφάνειας του βαρελιού λόγω του μεγάλου ύψους του σωλήνα



Υδραυλικές μηχανές

- Η πίεση στα δύο άκρα (έμβολα) είναι ίση

$$p_1 = p_2 = p$$

- Η δύναμη F_1 «μεταβιβάζεται» ως:

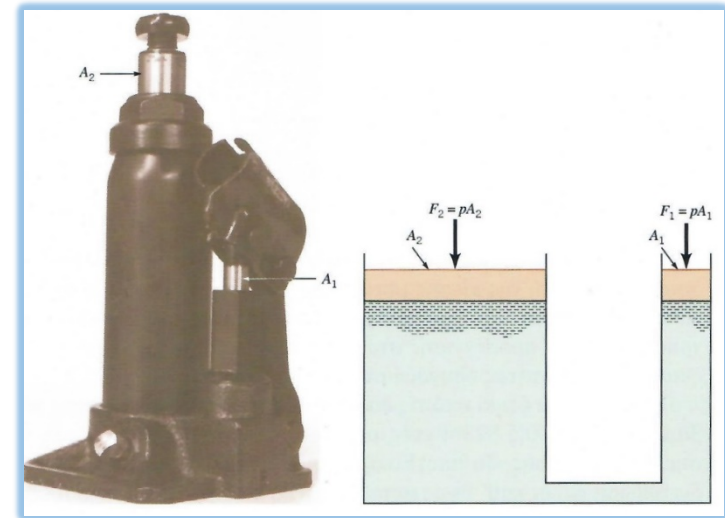
$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

- Παράδειγμα

Αν οι ακτίνες των δύο εμβόλων είναι $r_1 = 2 \text{ cm}$ και $r_2 = 20 \text{ cm}$, πόση δύναμη F_1 απαιτείται για την ανύψωση οχήματος μάζας $m = 1500 \text{ kg}$

$$F_2 = mg, \quad A_1 = \pi r_1^2, \quad A_2 = \pi r_2^2$$

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} = mg \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 1500 \times 9.807 \times \left(\frac{0.02}{0.2} \right)^2 = 147.1 \text{ N} = 15 \text{ kg}_f$$

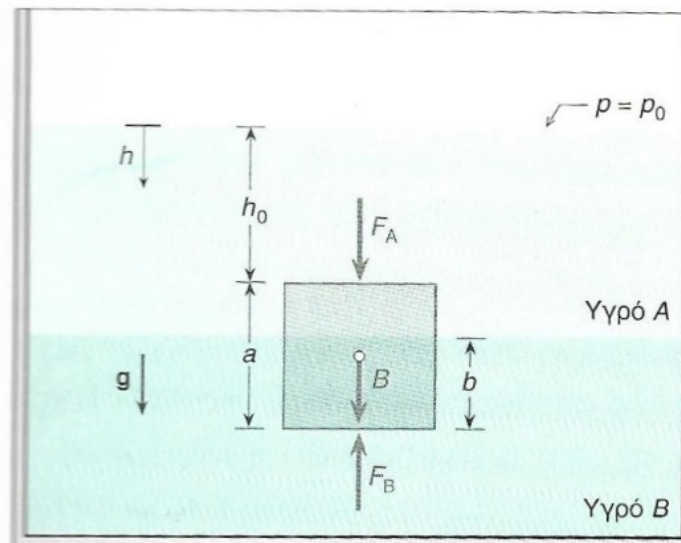


Παράδειγμα 1

Εφαρμογή θεμελιώδους αρχής Υδροστατικής

Ένα στερεό σώμα σε σχήμα κύβου, πλευράς $a = 25 \text{ cm}$ και πυκνότητας $\rho = 1225 \text{ kg/m}^3$, ισορροπεί μεταξύ δύο μη αναμειξιμων υγρών A και B. Οι πυκνότητες των δύο υγρών είναι $\rho_A = 680 \text{ kg/m}^3$ και $\rho_B = 1600 \text{ kg/m}^3$.

Να υπολογιστεί το ύψος b του στερεού σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό B.



Παράδειγμα 1 – Λύση 1/2

Ανάλυση

Το στερεό ισορροπεί κάτω από την επίδραση των δυνάμεων:

- i) Βάρος σώματος B (κατακόρυφη δύναμη)
- ii) Δυνάμεις πίεσης στην πάνω F_A και κάτω πλευρά F_B (κατακόρυφες δυνάμεις)
- iii) Δυνάμεις πίεσης στην αριστερή και δεξιά πλευρά (οριζόντιες δυνάμεις)

Λύση

Εξετάζεται η συνισταμένη των κατακόρυφων δυνάμεων, η οποία πρέπει να είναι 0

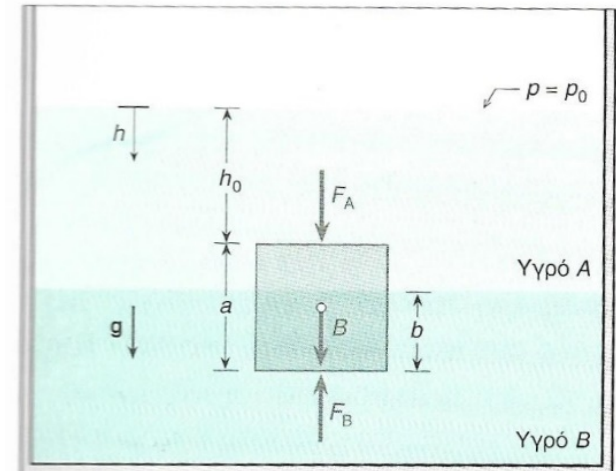
$$F_A + B - F_B = 0$$

Όπου:

$$B = \rho g a^3$$

$$F_A = p_A a^2 = (p_0 + \rho_A g h_0) a^2$$

$$F_B = p_B a^2 = (p_0 + \rho_A g (h_0 + a - b) + \rho_B g b) a^2$$



Παράδειγμα 1 – Λύση 2/2

Αντικαθιστώντας τις επιμέρους δυνάμεις στην έκφραση ισορροπίας και επιλύοντας ως προς b προκύπτει:

$$b = \frac{\rho - \rho_A}{\rho_B - \rho_A} a$$

Με αριθμητική αντικατάσταση

$$b = \frac{1225 - 680}{1600 - 680} \times 0.25 = 0.148 \text{ m}$$

Κατανομή πίεσης σε συμπιεστά ρευστά 1/2

- Συμπιεστά ρευστά (**κυρίως αέρια**), $\rho = f(p, T)$
- Για μικρές τιμές της πυκνότητας (και ειδικού βάρους) η μεταβολή της πίεσης είναι μικρή και για μικρές μεταβολές του ύψους η πίεση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή
- Τέλεια αέρια: $p = \rho R^* T \Rightarrow \rho = \frac{p}{R^* T}$
- Ολοκλήρωση της $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ μεταξύ των θέσεων (υψών):
 - $z = z_1, \quad p = p_1$
 - $z = z_2, \quad p = p_2$
$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g}{R^*} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}\right)$$
- Πρέπει να καθοριστεί ο **τρόπος μεταβολής της θερμοκρασίας με το ύψος**

Κατανομή πίεσης σε συμπιεστά ρευστά 2/2

- Περίπτωση 1: **Σταθερή τιμή της θερμοκρασίας σε όλο το ύψος** ($T = T_0$)

$$p_2 = p_1 \exp\left(-\frac{g(z_2 - z_1)}{R^* T_0}\right)$$

- Περίπτωση 2: **Γραμμική κατανομή** $T = T_0 - az$
 - Ισχύει με μεγάλη ακρίβεια στην **τροπόσφαιρα** (κατώτερο τμήμα ατμόσφαιρας πάχους ≈ 11 km)
 - T_0 : θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας ($z = 0$)
 - a : Ρυθμός μεταβολής θερμοκρασίας με το ύψος (σε K/m)

$$p = p_0 \left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{g/aR^*}$$

- p_0 : Πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας ($z = 0$)
- p : πίεση σε ύψος z

Τυπική ατμόσφαιρα

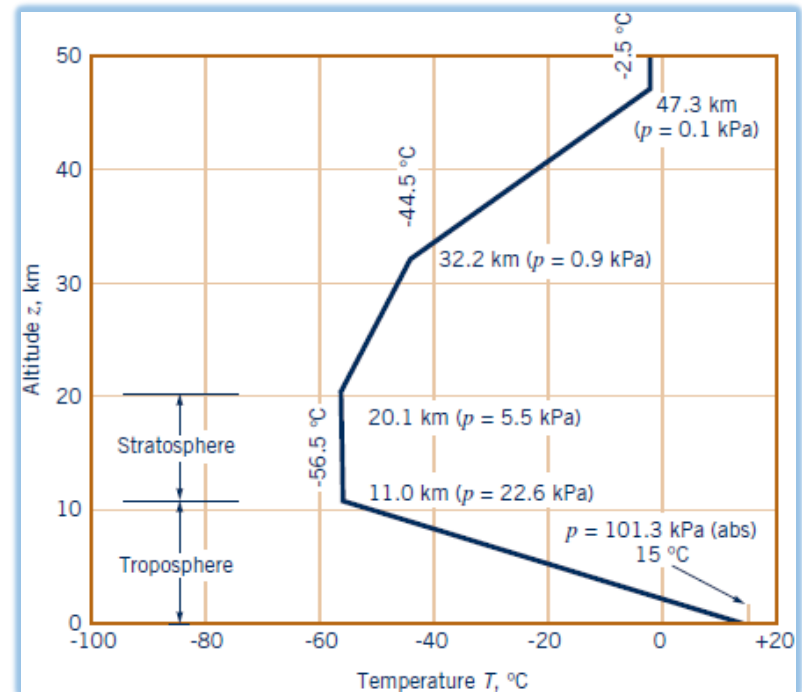
- Οι συνθήκες της ατμόσφαιρας είναι διαφορετικές σε κάθε περιοχή και χρονική περίοδο

Τυπική Ατμόσφαιρα

Ιδεατή αναπαράσταση των συνθηκών στη γήινη ατμόσφαιρα σε ένα μέσο υψόμετρο και όλη τη διάρκεια του έτους

Ιδιότητες τυπικής ατμόσφαιρας στην επιφάνεια της θάλασσας

Μέγεθος	Τιμή
Θερμοκρασία (T_0)	288.15 K (15°C)
Πίεση (p_0)	101.33 kPa (1 atm)
Πυκνότητα (ρ_0)	1.225 kg/m ³
Ιξώδες (μ_0)	1.789×10 ⁻⁵ Pa·s



$$\alpha = 0.0065 \text{ K/m}$$

$$g = 9.807 \text{ m/s}^2$$

$$R^* = 286.9 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$$

Παράδειγμα 2

Πίεση ατμόσφαιρας σε υψόμετρο

- (α) Να υπολογιστεί η θερμοκρασία και η πίεση του ατμοσφαιρικού αέρα σε υψόμετρο $z = 4000 \text{ m}$.
- (β) Ο ανθρώπινος οργανισμός, προκειμένου να υποστηρίξει τις διεργασίες μεταβολισμού, χρειάζεται σταθερή ποσότητα (μάζα) αέρα ανά μονάδα χρόνου. Αν ένας άνθρωπος εισπνέει 16 φορές το λεπτό στην επιφάνεια της θάλασσας, πόσος πρέπει να είναι ο ρυθμός αναπνοής όταν βρίσκεται σε υψόμετρο 4000 m .

Παράδειγμα 2 – Λύση 1/2

(α) Θερμοκρασία και πίεση σε υψόμετρο

Η θερμοκρασία σε υψόμετρο z δίνεται από:

$$T_z = T_0 - \alpha z \quad \begin{array}{l} T_0 = 288.15 \text{ K} \\ \alpha = 0.0065 \text{ K/m} \end{array}$$

Με αντικατάσταση:

$$T_z = 288.15 - 0.0065 \times 4000 = 262.15 \text{ K} \quad (= -11^\circ\text{C})$$

Η πίεση σε υψόμετρο z δίνεται από:

$$p_z = p_0 \left(1 - \frac{\alpha z}{T_0} \right)^{g/\alpha R^*} \quad \begin{array}{l} p_0 = 101.33 \text{ kPa} \\ g = 9.807 \text{ m/s}^2 \\ R^* = 286.9 \text{ J/kg}\cdot\text{K} \end{array}$$

Με αντικατάσταση:

$$p_z = 101.33 \times \left(1 - \frac{0.0065 \times 4000}{288.15} \right)^{9.807/0.0065 \times 286.9} = 61.64 \text{ kPa} \quad (= 0.608 \text{ atm})$$

Παράδειγμα 2 – Λύση 2/2

(β) Ρυθμός αναπνοής σε υψόμετρο

Ρυθμός εισπνοής μάζας αέρα (kg/min):

$$\dot{m}_a = b V \rho$$

b = ρυθμός αναπνοής (αναπνοές/min)
 V = όγκος αέρα ανά αναπνοή (m³/αναπνοή)
 ρ = πυκνότητα αέρα (kg/m³)

- Ο όγκος του αέρα ανά αναπνοή παραμένει σταθερός (V)
- Η πυκνότητα του αέρα μεταβάλλεται με το ύψος ($\rho_0 \rightarrow \rho_z$)
- Για να παραμένει σταθερός ο ρυθμός εισπνοής μάζας αέρα πρέπει να αλλάζει ο ρυθμός αναπνοής ($b_0 \rightarrow b_z$)

$$b_0 V \rho_0 = b_z V \rho_z \Rightarrow b_z = b_0 \frac{\rho_0}{\rho_z}$$

$0 \rightarrow$ επιφάνεια θάλασσας
 $z \rightarrow$ υψόμετρο

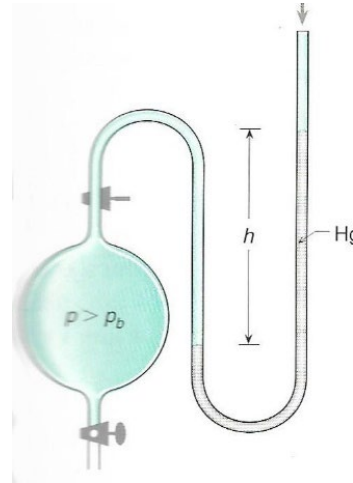
$$b_z = b_0 \frac{\rho_0 / R^* T_0}{\rho_z / R^* T_z} = b_0 \frac{\rho_0}{\rho_z} \frac{T_z}{T_0} = 16 \times \frac{101.33}{61.64} \times \frac{262.15}{288.15} = 23.9 \approx 24 \text{ αναπνοές / min}$$

Όργανα μέτρησης στατικής πίεσης

- Ανοιχτό Μανόμετρο

Μέτρηση **σχετική πίεσης**

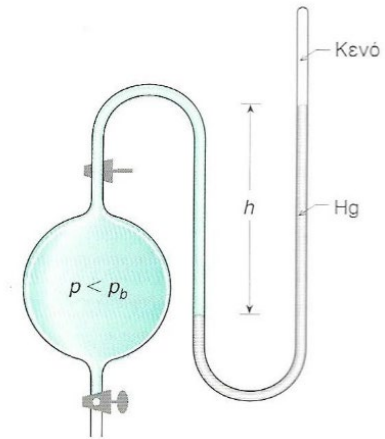
$$p - p_0 = \rho g h = \gamma h$$



- Κλειστό Μανόμετρο

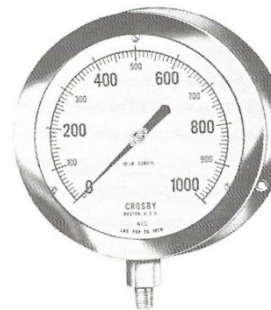
Μέτρηση **απόλυτης πίεσης**

$$p = \rho g h = \gamma h$$



- Ηλεκτρονικοί Μετρητές

«Έξυπνοι μετρητές» με αυτόματη αποθήκευση μετρήσεων

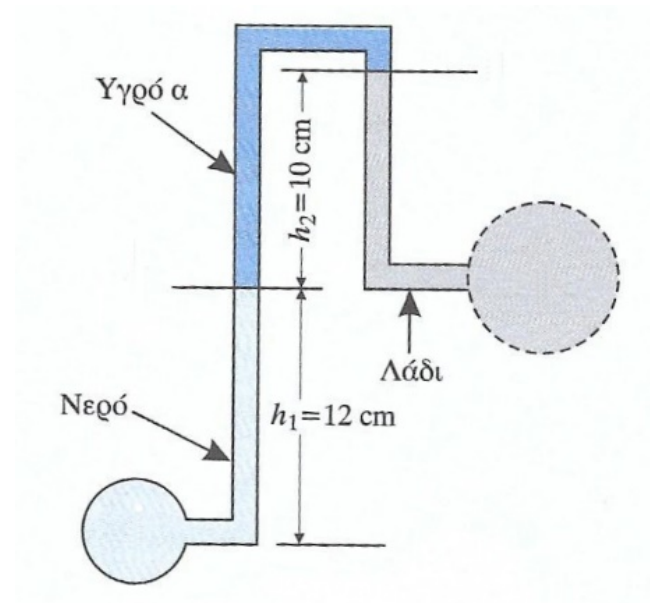


Παράδειγμα 3

Πίεση σωλήνα

Να υπολογιστεί η πίεση στο σωλήνα λαδιού όταν η πίεση στο δοχείο νερού είναι 10 kPa.

Δίνονται: $\gamma_{\text{νερού}} = 9810 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{\text{λαδιού}} = 8436 \text{ N/m}^3$, $\gamma_a = 6670 \text{ N/m}^3$

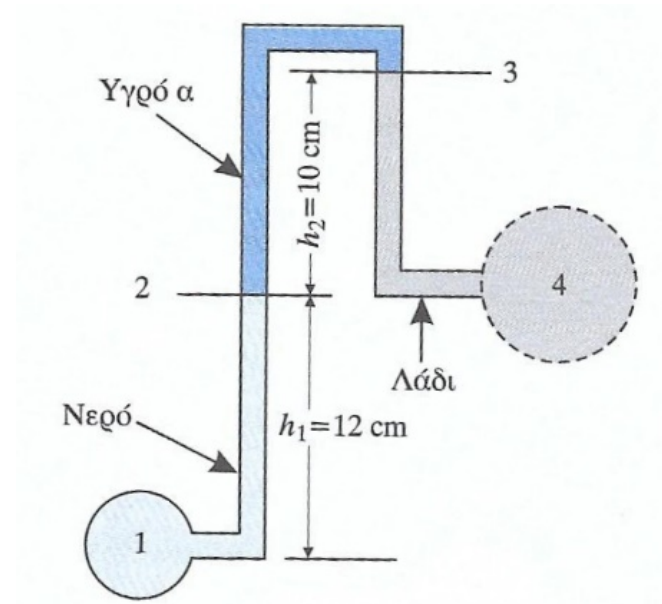


Παράδειγμα 3 – Λύση 1/3

Βήμα 1 – Ορισμός σημείων

Ορίζονται σημεία όπου

- (i) ζητείται ή είναι γνωστή η πίεση (1, 4) ($p_1 = 10 \text{ kPa}$, $p_4 = ?$)
- (ii) υπάρχει διαχωριστική επιφάνεια ρευστών (2, 3)



Παράδειγμα 3 – Λύση 2/3

Βήμα 2 – Υπολογισμός πίεσης (Α τρόπος)

Υπολογίζουμε τη διαφορά πίεσης διαδοχικών σημείων, ξεκινώντας από τη γνωστή και τελειώνοντας στην άγνωστη, και αθροίζουμε

$$p_1 - p_2 = \gamma_{\text{νερού}} h_1$$

$$p_2 - p_3 = \gamma_a h_2$$

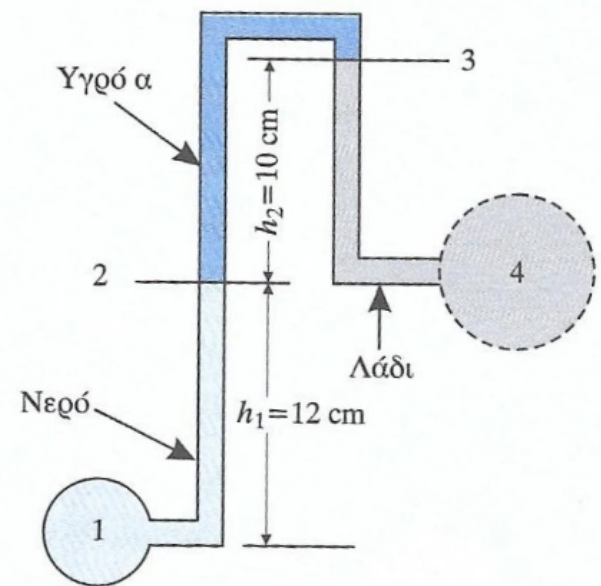
$$p_3 - p_4 = -\gamma_{\text{λαδιού}} h_2 \quad (+)$$

$$p_1 - p_4 = \gamma_{\text{νερού}} h_1 + \gamma_a h_2 - \gamma_{\text{λαδιού}} h_2 \Rightarrow$$

$$p_4 = p_1 - \gamma_{\text{νερού}} h_1 - \gamma_a h_2 + \gamma_{\text{λαδιού}} h_2$$



$$p_4 = 10000 \text{ Pa} - 9810 \times 0.12 - 6670 \times 0.1 + 84436 \times 0.1 = 9000 \text{ Pa} = 9 \text{ kPa}$$



Παράδειγμα 3 – Λύση 3/3

Βήμα 2 – Υπολογισμός πίεσης (B τρόπος)

Αρχίζουμε από τη γνωστή πίεση και

- προσθέτουμε πίεση όταν η στήλη είναι προς τα κάτω
- αφαιρούμε πίεση όταν η στήλη είναι προς τα πάνω

μέχρι να φτάσουμε στην άγνωστη πίεση

$$p_1 - \gamma_{\text{νερού}} h_1 - \gamma_a h_2 + \gamma_{\text{λαδιού}} h_2 = p_4$$

