

Θέμα 1

(α)[10] Χωρίς να λύσετε τη Δ.Ε. $y'(t) = 1 - y(t)^2$, ζωγραφίστε το πεδίο κλίσεων της για $t, y \in [-3, 3]$, βρείτε τα σημεία ισορροπίας και κατατάξτε τα σε ασταθή και ευσταθή. Ποιά είναι η συμπεριφορά της λύσης για $y(0) = -2$ καθώς $t \rightarrow \infty$;

(β)[12] Ένας συγκεκριμένος πληθυσμός ικανοποιεί το Π.Α.Τ.

$$y' = r(t)y - k, \quad y(0) = y_0,$$

όπου $r(t) = (1 + \sin(t))/5$ είναι ο ρυθμός αύξησής του και $k = 1/5$ ο ρυθμός μείωσής του. Να εκτιμηθεί η κρίσιμη αρχική τιμή $y_0 = y_c$ κάτω από την οποία ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί στο χρόνο. (Δίνεται ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{(\cos(s)-s)/5} ds \approx 5.09$)

Θέμα 2

(α)[12] Να λυθεί η Δ.Ε. $y'(2t - ye^y) + y = 0$.

(β)[9] Να λυθεί η Δ.Ε. $y' = \alpha y - \beta y^3$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

Θέμα 3

(α)[10] Έστω το Π.Α.Τ. $y'' + ay' + by = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ με $y(0) = 1, y'(0) = \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$. Αν μία λύση της Δ.Ε. είναι η $y_1(t) = e^{-3t}$ και ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$, βρείτε τις σταθερές $a, b, \tilde{y}_0$.

(β)[12] Να λυθεί η Δ.Ε. $y''t^2 + ty' + 4y = \sin(\ln t)$.

Θέμα 4

Έστω το παρακάτω μη-ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x(t)$ και $y(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= -y + 2x + e^t, \\ y' &= -2y + 3x + t. \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(α)[10] Υπολογίστε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος που προκύπτει από το παραπάνω και δώστε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων.

(β)[5] Δώστε μια σύντομη περιγραφή (γράφημα) του πεδίου διευθύνσεων του ομογενούς συστήματος και της ευστάθειας των κρίσιμων σημείων (όποιον υπάρχουν).

(γ)[10] Να βρεθεί η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος.

Θέμα 5

[20] Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,

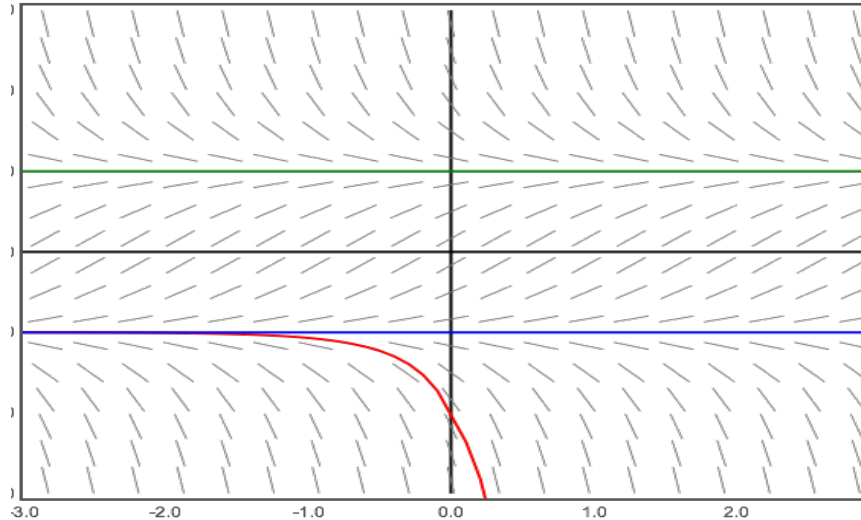
$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad g(t) = \begin{cases} t/2, & \text{για } 0 \leq t < 6 \\ 3, & \text{για } t \geq 6 \end{cases},$$

όπου η $g(t)$ λειτουργεί σαν μια συνάρτηση εξαναγκασμού.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη συνάρτηση μοναδιαίου βήματος Heaviside, να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Θέμα 1

(α) Οι κλίσεις Δ.Ε. δεν εξαρτώνται από το t , και λύνοντας $1 - y^2 = 0$ το $y = 1$ (ευσταθές γιατί οι κλίσεις συγκλίνουν σε αυτό στο χρόνο για κάθε αρχική τιμή) και $y = -1$ (ασταθές) είναι τα σημεία ισορροπίας (με πράσινο και μπλέ). Για $y(0) = -2$ καθώς $t \rightarrow \infty$ η $y(t) \rightarrow -\infty$ (κόκκινη γραμμή).



(β) Η Δ.Ε. $y' - r(t)y = -k$, είναι γραμμική και μπορεί να λυθεί με ολοκληρωτικό παράγοντα δηλ. $\mu(t) = e^{-\int r(t)dt} = e^{(\cos(t)-t)/5}$, άρα $(\mu y)' = -k\mu(t)$ και ολοκληρώνοντας η λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t) = \left(-k \int_0^t \mu(s)ds + C \right) / \mu(t) \quad \text{όπου η σταθερά υπολογίζεται απο την αρχ. συνθήκη } y(0) = y_0$$

συνεπώς

$$y(t) = \left(-\frac{1}{k} \int_0^t \mu(s)ds + y_0\mu(0) \right) / \mu(t) = \left(-\frac{1}{5} \int_0^t \mu(s)ds + y_0e^{1/5} \right) / \mu(t) \quad (1)$$

Οτι ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί στο χρόνο σημαίνει ότι $y(t) = 0$ (για $t \rightarrow \infty$) δηλ. από (1) έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{(\cos(s)-s)/5} ds = 5e^{1/5}y_0 \implies 5.09 = 5e^{1/5}y_0 \implies y_0 = y_c \approx 0.833$$

Θέμα 2

(α) Ελεγχουμε αν η μη-γραμμική Δ.Ε. είναι πλήρης (ακριβής) με $M(t, y) = y, N(t, y) = 2t - ye^y$ και βλέπουμε ότι $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ και $\frac{\partial N}{\partial t} = 2$, συνεπώς δεν είναι.

Βλέπουμε ότι $\frac{1}{M(x,y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{1}{y}$ άρα ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι συνάρτηση του y

$$f(y) = e^{\int \frac{1}{M(x,y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \right) dy} = e^{\int 1/y dy} = e^{\ln(y)} = y.$$

Άρα η ΔΕ $y'(2t - ye^y)y + y^2 = 0$ είναι ακριβής. Άρα

$$\partial u(t, y)/\partial t = y^2 \implies u(t, y) = \int y^2 dt = ty^2 + g(y) \implies$$

$$\partial u(t, y)/\partial y = 2ty - y^2e^y = 2ty + g'(y) \implies g'(y) = -y^2e^y \implies g(y) = -y^2e^y + 2ye^y - 2e^y.$$

Άρα η (πελεγμένη) λύση της ΔΕ είναι $u(t) = ty^2 - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y = C$

(β) Η μη-γραμμική Δ.Ε. $y' = \alpha y - \beta y^3$, $\alpha > 0, \beta > 0$ είναι της μορφής Bernoulli όπου με αλλαγή μεταβλητής $u = y^{1-3} = y^{-2}$ παίρνουμε τη γραμμική Δ.Ε.

$$u' + 2\alpha u = 2\beta \quad \text{όπου με ολοκληρωτικό παράγοντα } \mu(t) = e^{2\alpha t} \implies$$

$$u(t) = e^{-2\alpha t} \int e^{2\alpha t} 2\beta dt + C e^{-2\alpha t} = \beta/2\alpha + C e^{-2\alpha t}$$

Άρα η λύση από την αλλαγή μεταβλητής είναι $y(t) = \left(\frac{\beta}{2\alpha} + C e^{-2\alpha t}\right)^{-1/2}$.

Θέμα 3

(α) Για το δοσμένο Π.Α.Τ. $y'' + ay' + by = 0$ γνωρίζουμε, από υπέρθεση, ότι η γενική λύση είναι $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ και ότι η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι $r^2 + ar + b = 0$ και εφόσον $y_1(t) = e^{-3t}$ μια ρίζα της χαρ. εξίσωσης είναι $r = -3$, άρα $(-3)^2 + a(-3) + b = 0 \implies -3a + b = -9$.

Εφόσον ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$ (δηλ. σταθερή τιμή και $y_1(t) \rightarrow 0$) η δευτερή ρίζα είναι η $r = 0$ και $C_2 = 2$. Άρα από τη χαρ. εξίσωση $0^2 + a \cdot 0 + b = 0 \implies b = 0$ και $a = 3$. Τέλος, εφόσον $y(0) = 1$ από τη γεν. λύση έχουμε $C_1 + 2 = 1 \implies C_1 = -1$. Άρα $y(t) = -e^{-3t} + 2$ και $y'(t) = 3e^{-3t}$, συνεπώς $y'(0) = 3 = \tilde{y}_0$.

(β) Η Δ.Ε. $y''t^2 + ty' + 4y = \sin(\ln t)$ είναι μη-ομογενής μορφής Euler. Η λύση της ομογενούς μπορεί να λυθεί με αλλαγή μεταβλητής $y = t^m$ όπου η χαρ. εξίσωση είναι $m^2 + 4 = 0 \implies m_{1,2} = \pm 2i$ όπου για να πάρω πραγματικές λύσεις με χρήση της ταυτότητας $t = e^{\ln t}$ και τον τυπο του Euler

$$t^{m_1} = t^0(\cos(2 \ln t) + i \sin(2 \ln t)) \quad \text{και} \quad t^{m_2} = t^0(\cos(2 \ln t) - i \sin(2 \ln t))$$

προσθέτοντας και αφαιρώντας τις παραπάνω η λύση της ομογενούς είναι

$$y_c = C_1 \cos(2 \ln t) + C_2 \sin(2 \ln t).$$

Με τη μέθοδο απροσδιορίστων συντελεστών "μαντεύω" ότι $y_p = A \sin(\ln t) + B \cos(\ln t)$ (που δεν περιέχεται στη λύση της ομογενούς). [Θα μπορούσα επίσης να μαντέψω $y_p = A \sin(\ln t)$ για λιγότερες πράξεις]. Υπολογίζοντας τις y'_p και y''_p και αντικαθιστώντας στη ΔΕ βρίσκω $A = 1/3, B = 0$ συνεπώς $y_p = \frac{1}{3} \sin(\ln t)$. Άρα η γενική λύση

$$y(t) = C_1 \cos(2 \ln t) + C_2 \sin(2 \ln t) + \frac{1}{3} \sin(\ln t)$$

[Παρατήρηση: Η Δ.Ε. θα μπορούσε να λυθεί και με αλλαγή μεταβλητής $t = e^x$ όπως επίσης και με χρήση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων για τον υπολογισμό της y_p]

Θέμα 4

(α) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διανυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Εδώ μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος ιδιοτιμών (εφόσον η άσκηση ζητάει να μη μετασχηματιστεί το σύστημα). Άρα υπολογίζω την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \implies \lambda^2 = 1 \implies \lambda_{1,2} = \pm 1$, οι ιδιοτιμές. Λύνοντας για τα ιδιοδιανύσματα τα συστήματα $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})z_i = 0, i = 1, 2$, παίρνουμε τα ιδιοδιανύσματα $z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, άρα η λύση του ομογενούς είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}$$

(β) Το ομογενές σύστημα έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο το $(x, y) = (0, 0)$ (από τη λύση του $\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) και εφόσον οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές με αντίθετο πρόσημο αυτό είναι σαγματικό (το οποίο είναι πάντα ασταθές). Για το γράφημα βλ. Διάλεξη 8 σελ. 30.

(γ) Για τη λύση του μη-ομογενούς βλ. Διάλεξη 9 σελ. 18-19 (ακριβώς ίδια περίπτωση!)

[Παρατήρηση: Τα (α) και (γ) μπορούν να λυθούν και με εκθετικά πινάκων]

Θέμα 5

Η συνάρτηση $g(t) = \frac{t}{2}(1 - u(t-6)) + 3u(t-6) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}(t-6)u(t-6)$, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Heaviside. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace αριστερά και δεξιά στη Δ.Ε. έχουμε

$$s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + F(s) = \frac{1}{2s^2} - \frac{e^{-6s}}{2s^2} \implies$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{2s^2(s^2 + 1)} + \frac{e^{-6s}}{2s^2(s^2 + 1)} \quad (A)$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα το

$$\frac{1}{2s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} \right),$$

τότε με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (σε κάθε κλάσμα) στην (A), και την ιδιότητα της t -μετατόπισης, έχουμε τη λύση

$$y(t) = \sin t + \frac{1}{2}(t - \sin t) - \frac{1}{2}[(t-6) - \sin(t-6)]u(t-6).$$