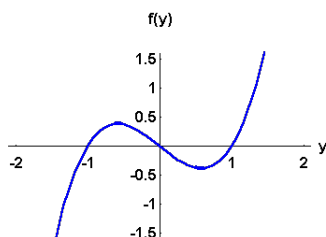


Θέμα 1

(α)[10] Έστω η Διαφορική Εξίσωση $y'(t) = f(y)$, με το γράφημα της $f(y)$ όπως δίνεται παρακάτω:



Σχεδιάστε το πεδίο κλίσεων της Δ.Ε. για $t \in [-3, 3], y \in [-3, 3]$, βρείτε τα σημεία ισορροπίας και κατατάξτε τα σε ασταθή και ευσταθή. Σχεδιάστε τις λύσεις της Δ.Ε. για $y(0) = 1/2$ και $y(0) = -1/2$ και δώστε τη συμπεριφορά αυτών των λύσεων καθώς $t \rightarrow \infty$;

(β)[8] Η μοναδική λύση του Π.Α.Τ. $ty' - \alpha y = 0, y(1) = y_0$, ικανοποιεί τα σημεία $(2, 1)$ και $(4, 4)$. Βρείτε τις τιμές των α και y_0 .

(γ)[12] Βρείτε τη λύση του Π.Α.Τ.

$$y' + p(t)y = 0, \quad y(0) = 3 \quad \text{όπου} \quad p(t) = \begin{cases} 2t - 1 & \text{αν } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{αν } 1 < t \leq 3, \\ -\frac{1}{t} & \text{αν } 3 < t \leq 4. \end{cases}$$

Θέμα 2

(α)[15] Μία δεξαμενή περιέχει 100 λίτρα(l) αλατισμένου νερού περιεκτικότητας 0.05 κιλών αλατιού/λίτρο (kg/l). Στο χρόνο $t = 0$, καθαρό νερό (χωρίς αλάτι) εισέρχεται στη δεξαμενή με ρυθμό 2 λίτρα/λεπτό (l/min) και την ίδια στιγμή εξέρχονται 3 λίτρα/λεπτό (μίγματος αλατισμένου) νερού από το δοχείο. Ποιά θα είναι η ποσότητα αλατιού (σε kg) που θα περιέχεται στη δεξαμενή όταν αυτή θα έχει ακριβώς 50 λίτρα αλατισμένου νερού;

(β)[10] Για τη Δ.Ε. $ye^{2ty} + t + \beta te^{2ty}y' = 0$, υπολογίστε για ποιά τιμή του β αυτή είναι ακριβής και λύστε τη Δ.Ε. για αυτή τη τιμή του β .

(γ)[15] Σε μία (απομονωμένη) πανεπιστημιούπολη 1000 φοιτητών ένας φοιτητής εμφανίζει συμπτώματα του ιού της γρίπης. Η εξάπλωση του ιού δίνεται από τη Δ.Ε.

$$\frac{dS}{dt} = 1000k \left(1 - \frac{S}{1000} \right) S, \quad \text{όπου } S(t) = \text{φοιτητές που ασθενούν στο χρόνο.}$$

Αν μετά από 4 ημέρες 50 φοιτητές έχουν ασθενήσει, πόσοι φοιτητές θα είναι άρρωστοι σε 6 ημέρες;

Θέμα 3

(α)[10] Για το Π.Α.Τ. $y'' - \frac{1}{t}y' - \frac{3}{t^2}y = 0, y(1) = 4, y'(1) = 8, t > 0$, δείξτε ότι $y_1(t) = t^3$ και $y_2(t) = t^{-1}$ είναι θεμελιώδεις λύσεις του Π.Α.Τ. και υπολογίστε τη μοναδική λύση του.

(β)[8] Βρείτε την ομογενή δεύτερης τάξης Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές που έχει γενική λύση την $y(t) = C_1 e^{2t} \cos(3t) + C_2 e^{2t} \sin(3t)$.

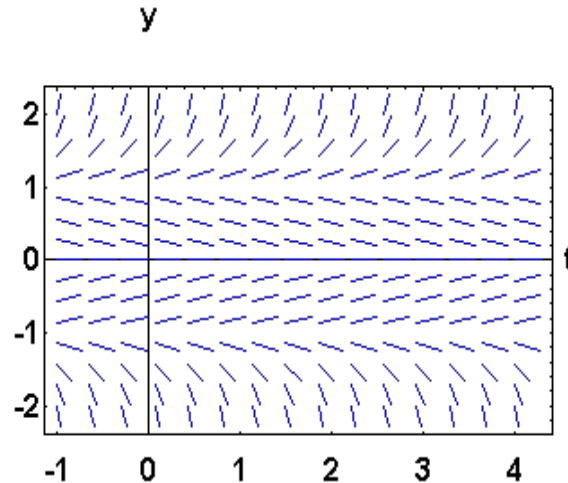
(γ)[12] Ένα σώμα μάζας $4kg$ είναι συνδεδεμένο με ένα ελατήριο σταθεράς $4N/m$. Αν η απόσβεση είναι $8Nm/s$ και το ελατήριο επιμηκύνεται αρχικά σε απόσταση $0.5m$ από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται να κινηθεί δίνοντάς του αρχική ταχύτητα $0.1m/s$, να περιγραφεί η κίνηση του σώματος (σε βάθος χρόνου) με βάση τη λύση του Π.Α.Τ που περιγράφει την κίνησή του.

Θέμα 1

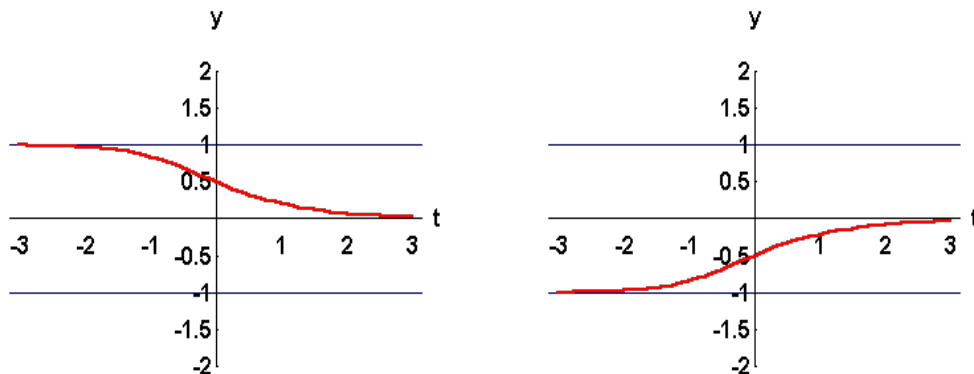
(α) Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται εκεί όπου η $f(y) = 0$ δηλ. τα $-1, 0, 1$ και η ευστάθεια τους



Το πεδίο κλίσεων (ανεξάρτητο του t)



Οι δύο λύσεις, όπου και για τις δύο $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$,



(β) Το Π.Α.Τ γίνεται $y' - \frac{\alpha}{t}y = 0$, $y(1) = y_0$ και με $p(t) = -\frac{\alpha}{t}$ και $\int -\frac{\alpha}{t} = -\alpha \ln |t| = \ln |t|^{-\alpha}$ και ολοκλ. παράγοντα, η λύση της Δ.Ε. είναι $y(t) = Ce^{-\ln |t|^{-\alpha}} = C|t|^{\alpha}$. Από $y(2) = 1$ και $y(4) = 4$, έχουμε $C2^{\alpha} = 1$ και $C4^{\alpha} = 4$ από όπου $\alpha = 2$ και $C = 2^{-\alpha} = 0.25$. Τελικά, $y_0 = y(1) = 0.25(1)^2 = 0.25$.

(γ) Πρώτα λύνουμε το Π.Α.Τ.

$$y' + (2t - 1)y = 0, \quad y(0) = 3, \quad 0 \leq t \leq 1$$

με ολοκλ. παράγοντα $\mu(t) = e^{(t^2-t)}$ άρα η γενική λύση είναι $y_1(t) = Ce^{(t^2-t)}$ και εφόσον $y_1(0) = 3$, $C = 3$. Στη συνέχεια λύνουμε το Π.Α.Τ.

$$y' = 0, \quad y(1) = 3, \quad 1 < t \leq 3$$

που έχει γενική λύση $y_2 = C$ και απο $y_2(1) = 3$, $C = 3$. Τελικά λύνουμε το Π.Α.Τ.

$$y' - \frac{1}{t} = 0, \quad y(3) = 3, \quad 3 < t \leq 4$$

με ολοκλ. παράγοντα $\mu(t) = \frac{1}{t}$ που έχει γενική λύση $y_3 = Ct$ και απο $y_3(3) = 3$, $C = 1$. Τελικά,

$$y(t) = \begin{cases} 3e^{(t^2-t)} & \text{αν } 0 \leq t \leq 1, \\ 3 & \text{αν } 1 < t \leq 3, \\ t & \text{αν } 3 < t \leq 4, \end{cases}$$

Θέμα 2

(α) Έστω $y(t)$ η ποσότητα αλατιού στη δεξαμενή στο χρόνο t . Τότε $y(0) = 100 \text{ l} \times 0.05 \text{ kg/l} = 5 \text{ kg}$ αλατιού αρχικά τη δεξαμενή. Εφόσον

$$\frac{dy}{dt} = \text{ρυθμός εισαγωγής} - \text{ρυθμός εξαγωγής} = 2 \text{ l/min} \times 0 \text{ kg/l} - 3 \text{ l/min} \times \frac{y}{100-t} \text{ kg/l}$$

όπου $100 - t$ ό όγκος, σε l , του νερού στη δεξαμενή στο χρόνο t (100 τα αρχικά λίτρα $+ 2$ που μπαίνουν $- 3$ που βγαίνουν ανά λεπτό). Τότε το Π.Α.Τ. δίνεται ως

$$y' = \frac{3}{t-100}, \quad y(0) = 5.$$

Η Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών και η λύση της είναι $y(t) = C(t-100)^3$ και για $y(0) = 5$ το $C = -1/200000$. Αρα,

$$y(t) = -\frac{(t-100)^3}{200000}$$

Εφόσον η δεξαμενή χάνει νερό με ρυθμό 1 l/min , μετά από 50 λεπτά θα υπάρχουν 50 λίτρα, συνεπώς

$$y(50) = -\frac{(-50)^3}{200000} = 0.625 \text{ kg}.$$

(β) Έχουμε $M(t, y) = ye^{2ty} + t$ και $N(t, y) = \beta te^{2ty}$. Για ακριβή Δ.Ε. πρέπει $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ δηλ.

$$e^{2ty} + 2tye^{2ty} = \beta e^{2ty} + 2t\beta ye^{2ty} \Rightarrow 1 + 2ty = \beta + 2\beta yt = \beta(1 + 2ty) \Rightarrow \beta = 1.$$

Τότε,

$$\frac{\partial \phi(t, y)}{\partial t} = ye^{2ty} + t \Rightarrow \phi(t, y) = \int (ye^{2ty} + t) dt = \frac{1}{2}e^{2ty} + \frac{t^2}{2} + g(y)$$

και

$$\frac{\partial \phi(t, y)}{\partial y} = te^{2ty} = te^{2ty} + g'(y) \Rightarrow g(y) = C$$

Άρα η (πεπλεγμένη) λύση είναι

$$\frac{1}{2}e^{2ty} + \frac{t^2}{2} = C.$$

(γ) Έχουμε να λύσουμε το Π.Α.Τ. (εφόσον αρχικά, για $t = 0$, ένας φοιτητής ήταν άρρωστος)

$$\frac{dS}{dt} = 1000k \left(1 - \frac{S}{1000}\right) S, \quad S(0) = 1$$

Η Δ.Ε. μπορεί να λυθεί είτε σαν χωριζομένων μεταβλητών είτε σαν Bernoulli, η γενική λύση της είναι

$$S(t) = \frac{1000Ce^{1000kt}}{1 - Ce^{1000kt}}$$

Απο $S(0) = 1$ έχουμε $C = \frac{S(0)}{S(0) - 1000}$ συνεπώς,

$$S(t) = \frac{1000S(0)}{S(0) + (1000 - S(0))e^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$$

όπου πρέπει να υπολογίζουμε το k (σταθερά μεταβολής). Απο $S(4) = 50$ (στις 4 μέρες 50 φοιτητές άρρωστοι) έχουμε

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}} \Rightarrow k \approx 0.0009906$$

Τελικά (στις 6 ημέρες),

$$S(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906 \cdot 6}} \approx 276 \text{ φοιτητές αναμένεται να αρρωστήσουν σε 6 ημέρες.}$$

Θέμα 3

(α) Αρχικά αντικαθιστούμε τις λύσεις στη Δ.Ε. και βλέπουμε ότι κάθε μία την ικανοποιεί και στη συνέχεια υπολογίζουμε την ορίζουσα του Wronski στο $t_0 = 1$

$$W(y_1(t_0), y_2(t_0)) = \begin{vmatrix} t^3 & t^{-1} \\ 3t^2 & -t^{-2} \end{vmatrix}_{t=t_0=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

άρα οι y_1, y_2 είναι θεμελιώδεις λύσεις.

Η γενική λύση είναι $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ (από υπέρθεση) και από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{cases} C_1 y_1(1) + C_2 y_2(1) = 4 \\ C_1 y_1'(1) + C_2 y_2'(1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 3C_1 - C_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3, C_2 = 1.$$

(β) Η Δ.Ε. που ψάχνουμε είναι η $ay'' + by' + cy = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ που έχει χαρ. εξίσωση $ar^2 + br + c = 0$. Από τη λύση που μας δίνεται καταλαβαίνουμε ότι η χαρακτ. εξίσωση της Δ.Ε. έχει μιγαδικές ρίζες, τις $r_{1,2} = 2 \pm 3i$. Συνεπώς (ιδιότητες ριζών τριωνύμου: $r_1 + r_2 = -b/a, r_1 \cdot r_2 = c/a$) η Δ.Ε. είναι

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

(γ) Η Δ.Ε. για την κίνηση (μεταβολή απόστασης $x(t)$)

$$mx'' + cx' + kx = 4x'' + 8x' + 4x = 0$$

έχει χαρακτ. εξίσωση $4r^2 + 8r + 4 = (r + 1)^2 = 0$ δηλ. έχει διπλή ρίζα $r_{1,2} = -1$ άρα η γενική λύση της Δ.Ε. για την κίνηση του σώματος είναι

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

Για την ειδική λύση, από αρχ. τιμές, $x(0) = 0.5$ και $x'(0) = 0.1$ υπολογίζουμε τις σταθερές C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 x_1(0) + C_2 x_2(0) = 0.5 \\ C_1 x_1'(0) + C_2 x_2'(0) = 0.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0.5 \\ C_2 = 0.6 \end{cases}.$$

Εφόσον, $x_1(t) = e^{-t} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0 \text{ (κανόνας L'Hopital),}$$

η γενική λύση $x(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$, δηλ. κίνηση με απόσβεση.