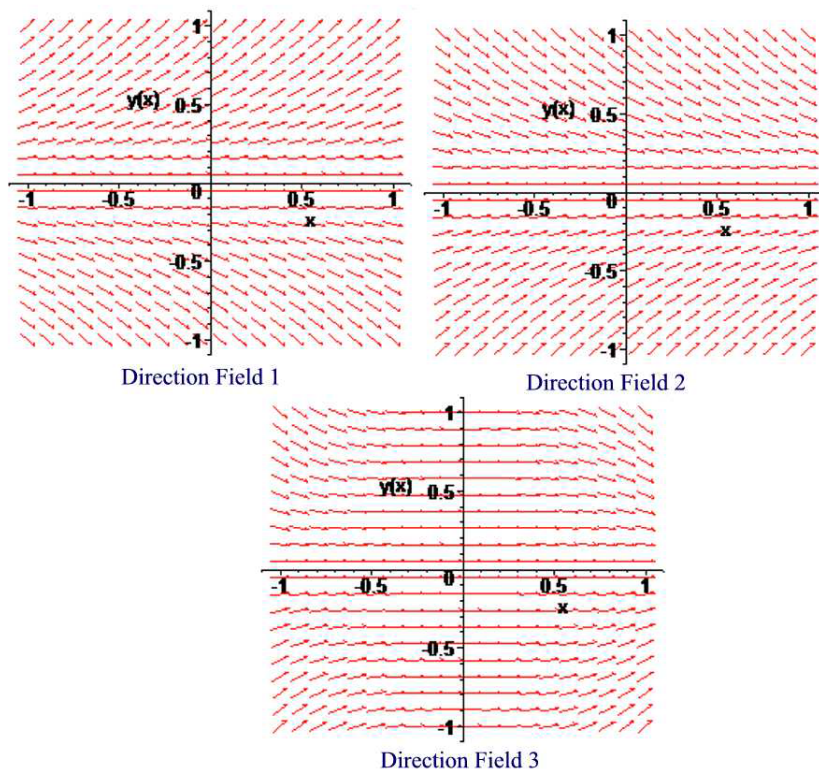


Θέμα 1

(α) [6] Ταιριάξτε τα παρακάτω πεδία κλίσεων (Direction Fields) με τις Διαφορικές Εξισώσεις (Δ.Ε.):
 (i) $y' + y = 0$, (ii) $y' = -x^2y$ και (iii) $y' - y = 0$.



(β) [10] Για τη Δ.Ε. $y' = 2y(1 - y)$, σχεδιάστε το πεδίο κλίσεων για $t, y \in [0, 3]$, βρείτε τα σημεία ισορροπίας και κατατάξτε τα σε ασταθή και ευσταθή. Αν $y(0) = 2$, ποιά είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά στο χρόνο (δηλ. καθώς $t \rightarrow \infty$) της λύσης;

(γ) [14] Σώμα, του οποίου η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι 100° τοποθετείται μέσα σε υγρό σταθερής θερμοκρασίας 10° . Αν μετά από 4 λεπτά η θερμοκρασία του σώματος μειώνεται στους 60° , να βρεθεί η χρονική στιγμή την οποία η θερμοκρασία του σώματος μειώνεται στους 20° .

Θέμα 2

[20] Ο ρυθμός αύξησης ενός πληθυσμού ζώων $p(t)$ δίνεται από τη Δ.Ε.

$$\frac{dp}{dt} = kp(a - p), \quad k, a \text{ γνωστές σταθερές.}$$

Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο πληθυσμός είναι P_0 , να βρεθεί το μέγεθός του τη χρονική στιγμή t .

Θέμα 3

Να λυθούν οι παρακάτω Δ.Ε.

(α) [15] $y' - \frac{1}{3t}y = \frac{t}{3y}, \quad t > 0$

(β) [15] $y' = -\frac{2t \cos(y) + 3t^2y}{t^3 - t^2 \sin(y) - y}, \quad y(0) = 2$

Θέμα 4

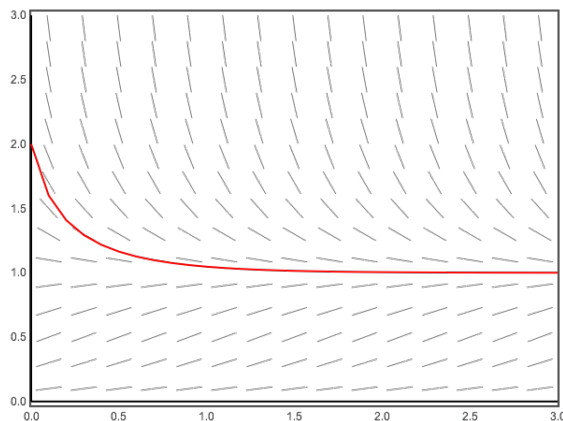
(α)[18] Έστω το Π.Α.Τ. $y'' + ay' + by = 0, a, b \in \mathbb{R}$ με $y(0) = 3, y'(0) = 5 \in \mathbb{R}$ και δύο θεμελιώδεις λύσεις της $\{y_1, y_2\}$. Αν γνωρίζουμε ότι η $y_1 = e^{-t}$ και ότι η Wronskian των $\{y_1, y_2\}$ είναι $W(t) = 4e^{2t}$,
 (i) βρείτε τη y_2 , (ii) βρείτε τις σταθερές a, b και (iii) λύστε το Π.Α.Τ.

(β) [12] Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y'' + 4\pi^2y = 0, \quad y(1) = 2, y'(1) = 1$.

Θέμα 1

(α) Δεν χρειάζεται να λυθούν οι Δ.Ε., οι (i) και (iii) δέν εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή x , άρα το πεδίο κλίσεων 1 αντιστοιχεί στη ΔΕ (iii), το 2 στην (i) (και το 3 στη (ii))

(β) Τα σημεία ισορροπίας από $2y(1-y) = 0$ είναι $y = 0$ και $y = 1$. Από το πεδίο κλίσεων βλέπουμε ότι το $y = 1$ είναι ευσταθές και το $y = 0$ ασταθές. Για $y(0) = 2$ η λύση $y(t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$.



(γ) Από το νόμο μεταφοράς θερμότητας του Νεύτωνα (βλέπε πρόβλημα του καφέ) προκύπτει ότι

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-10) \implies \frac{dT}{T-10} = -k \implies \int \frac{dT}{T-10} = \int -k dt \implies \ln(T-10) = -kt + \ln(C)$$

$$\implies \ln\left(\frac{T-10}{C}\right) = -kt \implies \frac{T-10}{C} = e^{-kt} \implies T(t) = Ce^{-kt} + 10$$

Επειδή $T(0) = 100^\circ$ προκύπτει ότι $100 = Ce^{-k \cdot 0} + 10 \implies C = 90$ άρα $T(t) = 90e^{-kt} + 10$ και εφόσον στο χρόνο $t = 4$ $T(4) = 60^\circ$ έχουμε

$$60 = 90e^{-k \cdot 4} + 10 \implies e^{-4k} = \frac{50}{90} \implies -4k = \ln(5/9) \implies k = 0.467$$

Επομένως η θερμοκρασία μειώνεται στους 20° στο χρόνο t^* ,

$$20 = 90e^{-0.467t^*} + 10 \implies -0.467t^* = \ln(10/90) \implies t^* = 4,7 \text{ λεπτά.}$$

Θέμα 2

Η Δ.Ε. μπορεί να λυθεί και ως χωριζομένων μεταβλητών (αλλά και ως Bernoulli)

$$\frac{dp}{dt} = kp(a-p) \implies \int \frac{dp}{p(a-p)} = \int k dt + C \text{ αναλύοντας σε απλά κλάσματα}$$

$$\int \frac{1}{a} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{a-p} \right) dp = kt + C \implies \ln(p) - \ln(a-p) = akt + aC \implies \ln\left(\frac{p}{a-p}\right) = akt + D$$

Επειδή $p(0) = P_0$ προκύπτει ότι $\ln\left(\frac{P_0}{a-P_0}\right) = ak \cdot 0 + D \implies D = \ln\left(\frac{P_0}{a-P_0}\right)$, επομένως

$$\ln\left(\frac{p}{a-p}\right) = akt + D \implies \ln\left(\frac{p}{a-p}\right) - \ln\left(\frac{P_0}{a-P_0}\right) = akt \implies \frac{\frac{p}{a-p}}{\frac{P_0}{a-P_0}} = e^{akt}$$

$$\implies \frac{p}{a-p} = \frac{P_0}{a-P_0} e^{akt} \implies \frac{1}{\frac{a}{p} - 1} = \frac{1}{\frac{a}{P_0} - 1} e^{akt} \implies \frac{a}{p} - 1 = \frac{\frac{a}{P_0} - 1}{e^{akt}} \implies$$

$$p(t) = \frac{a}{1 + \left(\frac{a}{P_0} - 1\right) e^{-akt}}$$

Θέμα 3

(α) ΔΕ Bernoulli με $n = -1$, άρα θέτοντας $u = y^{1-(-1)} = y^2$ έχουμε $u' = 2yy'$ όποτε η ΔΕ γίνεται

$$\frac{1}{2}u' - \frac{1}{3t}u = \frac{t}{3} \quad \text{ή} \quad u' - \frac{2}{3t}u = \frac{2t}{3} \quad \text{γραμμική}$$

Με χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\int -\frac{2}{3t} dt} \left(\int \frac{2t}{3} e^{\int -\frac{2}{3t} dt} + C \right) = e^{\frac{2}{3} \ln(t)} \left(\frac{2}{3} \int t e^{\frac{2}{3} \ln(t)} dt + C \right) = t^{2/3} \left(\frac{2}{3} \int t t^{-2/3} dt + C \right) = \\ &= t^{2/3} \left(\frac{2}{3} \int t^{1/3} dt + C \right) = t^{2/3} \left(\frac{1}{2} t^{4/3} + C \right) \end{aligned}$$

όποτε από $u = y^2$ έχουμε

$$y^2 = Ct^{2/3} + \frac{t^2}{2}$$

(β) Η ΔΕ είναι (μη-γραμμική) της μορφής $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ όπου $M(t, y) = 2t \cos(y) + 3t^2y$ και $N(t, y) = t^3 - t^2 \sin(y) - y$, άρα ελέγχω αν είναι ακριβής (πλήρης)

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = 2t(-\sin(y)) + 3t^2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} = 3t^2 - 2t \sin(y) \quad \implies \quad \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}$$

άρα πλήρης, και ψάχνουμε συνάρτηση $u(t, y)$ τέτοια ώστε $\frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = M(t, y)$ και $\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} = N(t, y)$, άρα

$$u(t, y) = \int M(t, y) dt + g(y) = t^2 \cos y + t^3 y + g(y) \quad \text{και}$$

$$N(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \implies t^3 - t^2 \sin(y) - y = -t^2 \sin(y) + t^3 + g(y)' \implies g(y)' = -y$$

άρα $g(y) = -\frac{y^2}{2}$ και άρα $u(t, y) = t^2 \cos(y) + t^3 y - \frac{y^2}{2} = C$ είναι (η γενική) πεπλεγμένη λύση της ΔΕ. Για $y(0) = 2$ έχουμε για τη λύση του Π.Α.Τ.

$$0^2 \cos(2) + 2^3 - \frac{2^2}{2} = C \implies C = -2$$

Θέμα 4

(α) (i) Η δεύτερη λύση θα είναι της μορφής $y_2(t) = e^{rt}$ και τότε η Wronskian είναι

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{rt} \\ -e^{-t} & r e^{rt} \end{vmatrix} = (r+1)e^{(r-1)t} \quad \text{αλλα δίνεται ότι} \quad W(t) = 4e^{2t} \implies r = 3 \implies y_2(t) = e^{3t}$$

(ii) Εφόσον $r_1 = -1$ και $r_2 = 3$ μπορώ να βρώ τη χαρακτηριστική εξίσωση, η οποία είναι:

$(r+1)(r-3) = r^2 - 2r - 3 = 0$ άρα η ΔΕ που αντιστοιχεί είναι $y'' - 2y' - 3y = 0$, άρα $a = -2$ και $b = -3$.

(iii) Οι δοσμένες αρχικές συνθήκες και το ότι $y'(t) = -C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t}$ μας δίνουν ότι $C_1 + C_2 = 3$ και $-C_1 + 3C_2 = 5$, άρα $C_1 = 1$ και $C_2 = 2$, άρα η (μοναδική) λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(t) = e^{-t} + 2e^{3t}$$

(β) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + \pi^2 = 0$ και έχει ρίζες $r_{1,2} = \pm i\frac{\pi}{3}$ άρα η (γενική) λύση είναι

$$y(t) = C_1 \cos(t\pi/3) + C_2 \sin(t\pi/3)$$

Από τις αρχ. συνθήκες και ότι $y'(t) = \frac{\pi}{3} C_2 \cos(t\pi/3) - \frac{\pi}{3} C_1 \sin(t\pi/3)$ έχουμε $-C_1 = 2$ και $-\frac{\pi}{3} C_2 = \pi$ δηλ. $C_1 = 2$ και $C_2 = 3$, άρα η μοναδική λύση του Π.Α.Τ είναι

$$y(t) = -2 \cos(t\pi/3) + 3 \sin(t\pi/3)$$