

Θέμα 1

(α)[8] Υπολογίστε τη λύση του Π.Α.Τ. $(t^2 + 1)y' + 4ty = 8t$, $y(0) = 1$.

(β)[8] Έστω $P(t) > 0$ ο πληθυσμός κάποιου είδους, σε χρόνο $t > 0$, που ικανοποιεί τη Δ.Ε.:
 $P' = -0.001(P - 100)(P - 2100)$. Για $P(0) = 100$, $P(0) = 500$ και $P(0) = 2500$ και *χωρίς να ρύσει*
 τη Δ.Ε., σχεδιάστε τις αντίστοιχες λύσεις και υπολογίστε το όριο τους καθώς $t \rightarrow \infty$.

(γ)[10] Υπολογίστε τη λύση της Δ.Ε. $y' = \frac{y}{t - y}$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y(t) = tu(x)$.

Θέμα 2

(α)[8+7] Η μετατόπιση $y(t)$ σε ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας περιγράφεται από το Π.Α.Τ.

$$my'' + cy' + ky = f(t), \text{ με } y(0) = y_0 \text{ και } y'(0) = v_0$$

(i) Αν για $m = 5 \text{ kg}$ και $f(t) = 0$ η λύση του Π.Α.Τ. είναι $y_c(t) = 2e^{-t} \cos(\sqrt{3}t - 1.0472)$, υπολογίστε τις τιμές των c , k , y_0 και v_0 . [Δίνεται ότι $\cos(1.0472) = 0.5$].

(ii) Αν $f(t) = 10 \sin(2t)$ υπολογίστε μια ειδική λύση του προβλήματος.

(β)[12] Υπολογίστε τη γενική λύση της παρακάτω Δ.Ε. για την $y(t)$

$$t^2 y'' - (2\alpha - 1)ty' + \alpha^2 y = t^{\alpha+1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 3

Έστω το παρακάτω μη-ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x(t)$ και $y(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= 6y + 5x - 2e^{2t}, \\ y' &= -2x - 2y + e^{2t}. \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(α)[10] Υπολογίστε την γενική λύση του ομογενούς συστήματος που προκύπτει από το παραπάνω και δώστε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων.

(β)[7] Σχεδιάστε το γράφημα του διανυσματικού πεδίου (επίπεδο φάσης) και αντίστοιχες τροχιές των λύσεων του ομογενούς συστήματος και χαρακτηρίστε την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου.

(γ)[10] Να βρεθεί η γενική λύση του παραπάνω *μη-ομογενούς* συστήματος με αρχικές συνθήκες $x(0) = 2$ και $y(0) = -1$.

Θέμα 4

(α)[10] Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{αν } 0 \leq t < 2, \\ 8 - 2t & \text{αν } 2 \leq t < 4, \\ 0 & \text{αν } t \geq 4. \end{cases}$

(β)[10] Με χρήση μετασχηματισμών Laplace υπολογίστε τη λύση του παρακάτω Π.Α.Τ.

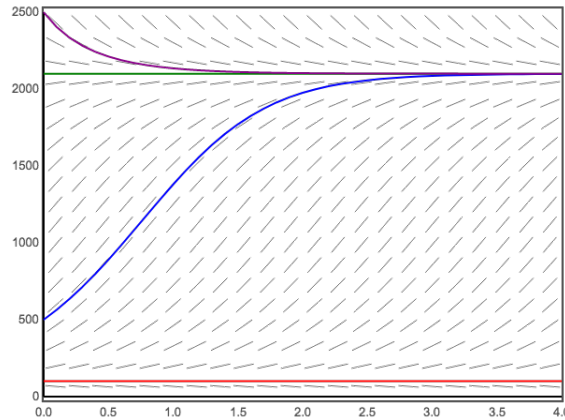
$$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Λύνεται εύκολα με ολοκληρωτικό παράγοντα ή ως χωριζομένων μετα βλητών. Η λύση:
 $y(t) = 2 - (t^2 + 1)^{-2}$

(β) Κάνουμε το πεδίο κλίσεων



(γ) Απάντηση $-\frac{t}{y} - \ln y = C$

Θέμα 2

(α) (i) $c = 10, k = 20, y(0) = 1$ και $v_0 = 2$ και (ii) $y_p = -\frac{1}{2} \cos(2t)$

(β) Δ.Ε. Euler και μετά με Lagrange

$y(t) = c_1 t^\alpha + c_2 t^\alpha \ln t + t^{\alpha+1}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Θέμα 3

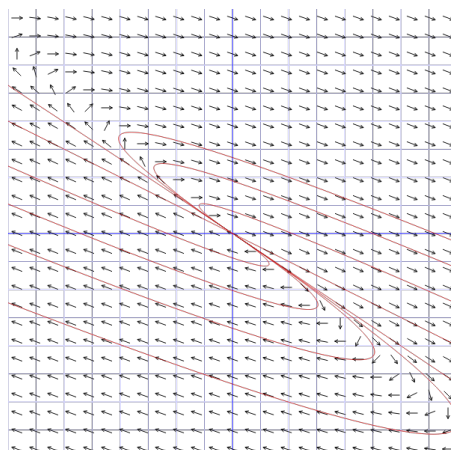
(α) Η λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} e^t$$

Ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων, με βάση την παραπάνω λύση, είναι τ.ω. $\vec{x}_c = \mathbf{X}(t)\vec{c}$, δηλ.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & 3e^t \\ -e^{2t} & -2e^t \end{bmatrix}.$$

(β) Με βάση τη λύση που βρήκαμε στο (α) οι τροχιές των λύσεων είναι



ασταθής κόμβος.

(γ) Εφόσον γνωρίζουμε τον πίνακα θεμελιωδών λύσεων μπορούμε να βρούμε μια ειδική λύση για το μη-ομογενές σύστημα (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 23) ως

$$\vec{x}_p = \mathbf{X}(t) \int \mathbf{X}(t)^{-1} \vec{f}(t) dt = -t \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος είναι $\vec{x} = \mathbf{X}(t)\vec{c} + \vec{x}_p$ και για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0$$

Θέμα 4

(α) $F(s) = \frac{2}{s^3} + e^{-2s} \left(-\frac{2}{s^3} - \frac{6}{s^2} \right) + e^{-4s} \left(\frac{2}{s^2} \right).$

(β) Η Δ.Ε. γίνεται

$$s^2 F(s) - s + 2 + 4(sF(s) - 1) = \frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^4}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνει

$$y(t) = e^{-2t} + \frac{1}{6} t^3 e^{-2t}$$