

Θέμα 1

(α)[6+4] Για το Π.Α.Τ. $y' = y - y^2, y(0) = y_0$ υπολογίστε τη λύση του, $y(t)$, και βρείτε το $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ όταν $y_0 > 0$. Στη συνέχεια σχεδιάστε το πεδίο κλίσεων στο $[t, y] \in [0, 4] \times [-3, 3]$ της Δ.Ε. και δώστε την ευστάθεια των κρίσιμων σημείων της αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(β)[10] Ένας καταθέτης έχει στην τράπεζα το ποσό των $P(t)$ ευρώ στο χρόνο t το οποίο τοκίζεται συνεχώς με επιτόκιο E . Αν κάνει κάθε χρόνο ανάληψη A ευρώ, τότε το $P(t)$ ικανοποιεί το Π.Α.Τ. $P(t)' = EP(t) - A, P(0) = P_0$. Βρείτε τη λύση του Π.Α.Τ. και υπολογίστε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το αρχικό ποσό P_0 ώστε με επιτόκιο $E = 6\%$ να μπορεί να κάνει ο καταθέτης ανάληψη $A = 16.000$ ευρώ/χρόνο για 20 χρόνια.

(γ)[12] Λύστε την παρακάτω Δ.Ε.

$$y'(3t^2y^2 + 4y) + 2ty^3 - 2t^3y^3 - 4ty^2 = -2t$$

Θέμα 2

(α)[10] Για τη Δ.Ε. $y'' + \frac{1}{t}y' + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right)y = 0, t \neq 0$, δείξτε ότι η $y_1(t) = t^{-1/2} \sin t$ είναι μία λύση της και υπολογίστε μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση της, $y_2(t)$.

(β)[12] Υπολογίστε τη γενική λύση της παρακάτω Δ.Ε.

$$y'' + \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 5t + 5, t > 0$$

Θέμα 3

Έστω το παρακάτω μη-ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x(t)$ και $y(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= y + \sin(t), \\ y' &= -x + \cos(t). \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(α)[10] Υπολογίστε τη **πραγματική** γενική λύση του *ομογενούς συστήματος* που προκύπτει από το παραπάνω και δώστε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων.

(β)[6] Σχεδιάστε το γράφημα του διανυσματικού πεδίου (επίπεδο φάσης) και τις αντίστοιχες τροχιές των λύσεων του ομογενούς συστήματος και χαρακτηρίστε την ευστάθεια του κρίσιμου σημείου.

(γ)[10] Να βρεθεί η γενική λύση του παραπάνω *μή-ομογενούς* συστήματος με αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$ και $y(0) = 0$.

Θέμα 4

(α)[8] Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του $F(s) = \frac{1 - s(5 + 3s)}{s[(s + 1)^2 + 1]}$.

(β)[12] Με χρήση μετασχηματισμών Laplace και της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος Heaviside, υπολογίστε τη λύση του παρακάτω Π.Α.Τ. η οποία λύση όμως **δεν** θα πρέπει να περιέχει τη συνάρτηση Heaviside,

$$y'' + y = \begin{cases} t/\pi, & 0 \leq t < \pi, \\ 1, & t \geq \pi, \end{cases} \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

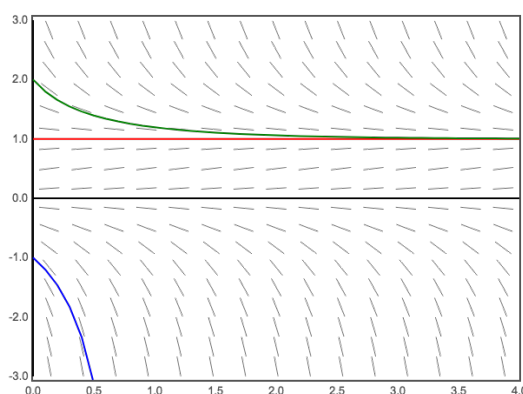
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Η Δ.Ε. μπορεί να επιλυθεί ως χωριζομένων μεταβλητών, συνεπώς

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y-y^2} &= \int 1 dt \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \right) dy = t + C \Rightarrow \ln \left| \frac{y}{y-1} \right| = t + C \Rightarrow \left| \frac{y}{y-1} \right| = e^{t+C} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{y}{y-1} = De^t \Rightarrow y = \frac{De^t}{De^t - 1} = \frac{D}{D - e^{-t}} \text{ και από την αρχ. συνθήκη } y(0) = y_0 \\ y(0) &= \frac{D}{D-1} = y_0 \Rightarrow D = \frac{y_0}{y_0 - 1} \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)e^{-t}} \text{ και άρα} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= 1, \text{ για } y_0 > 0 \end{aligned}$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι το $y = 0$ και $y = 1$ τα οποία είναι ασταθές και ευσταθές αντίστοιχα.



(β) Η Δ.Ε. μπορεί να γραφεί ως $P' - EP = -A$ και με χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu = e^{-\int E dt} = e^{-Et}$ έχουμε

$$P(t) = \frac{A}{E} + Ce^{Et}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ και από αρχ. συνθήκη } P(0) = C + \frac{A}{E} = P_0 \text{ άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι}$$

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{A}{E} \right) e^{Et} + \frac{A}{E}$$

Για να μπορεί ο καταθέτης να κάνει αναλήψεις για $t = 20$ χρόνια αρκεί το ποσό να εξαντληθεί στο τέλος των 20 αυτών χρόνων, δηλ. $S(20) = 0$. Συνεπώς με $E = 0.06$ και $A = 16 \cdot 10^3$ έχουμε

$$\left(P_0 - \frac{A}{E} \right) e^{20E} + \frac{A}{E} = 0 \Rightarrow P_0 = \frac{A}{E} (1 - e^{20E}) = \frac{16 \cdot 10^3}{0.06} (1 - e^{20 \cdot 0.06}) = 186.348, 21 \text{ ευρώ.}$$

(γ) Η μη-γραμμική αυτή Δ.Ε. μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι της μορφής $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ με $N = 3t^2y^2 + 4y$ και $M = 2ty^3 - 2t^3y^3 - 4ty^2 + 2t$. Όμως $\frac{\partial M}{\partial y} = 6ty^2 - 6t^3y^2 - 8ty \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 6ty^2$ άρα δεν είναι πλήρης. Όμως η ποσότητα

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = -2t \text{ (ανεξαρτητη του } y)$$

Συνεπώς υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας που μετατρέπει τη Δ.Ε. σε πλήρη, ο $e^{\int 2tdt} = e^{-t^2}$ και πολλαπλασιάζοντας με αυτόν τη Δ.Ε. έχουμε τη πλήρη Δ.Ε.

$$y'(3t^2y^2 + 4y)e^{-t^2} + (2ty^3 - 2t^3y^3 - 4ty^2 + 2t)e^{-t^2} = 0$$

όπου γαι τη λύση της ψάχνουμε συνάρτηση $u(t, y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2ty^3 - 2t^3y^3 - 4ty^2 + 2t)e^{-t^2} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = (3t^2y^2 + 4y)e^{-t^2}$$

Άρα ολοκληρώνοντας τη δεύτερη σχέση ως προς y έχουμε

$u(t, y) = (t^2 y^3 + 2y^2)e^{-t^2} + \phi(t)$ όπου παραγωγίζοντάς ως προς t και συγκρίνοντας με την πρώτη πάνω σχέση, έχουμε

$$\phi'(t) = 2te^{-t^2} \Rightarrow \phi(t) = -e^{-t^2}$$

Συνεπώς η (πεπλεγμένη) λύση της Δ.Ε. μας εξίσωσης είναι

$$e^{-t^2}(y^2(t^2 y + 2) - 1) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Η ίδια λύση θα βγει και αν πρώτα ολοκληρώσουμε ως προς t και παραγωγίσουμε στη συνέχεια ως προς y .

Θέμα 2

(α) Το ότι η $y_1(t)$ είναι λύση της Δ.Ε. αποδεικνύεται εύκολα με απλή αντικατάσταση στη Δ.Ε.

Η δεύτερη λύση μπορεί να βρεθεί με βάση το Θ. Abel (υποβιβασμός της τάξης). Υπολογίζοντας τη Wronskian $W(t)$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 5 σελ. 10) από

$$W' + \frac{1}{t}W = 0 \Rightarrow W = \frac{C}{t} \quad \text{συνεπώς (από τον ορισμό της Wronskian)} \quad y_2' y_1 - y_1' y_2 = \frac{C}{t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Είτε λύνοντας την $(*)$ ως προς y_2 , είτε με χρήση του τύπου στη σελ. 11 της ΔΙΑΛΕΞΗΣ 5, έχουμε

$$y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dt \Rightarrow y_2 = t^{-1/2} \sin t \int \frac{C}{t} \frac{1}{t^{-1} \sin^2 t} \Rightarrow y_2 = Ct^{-1/2} \sin t \int \frac{1}{\sin^2 t} \Rightarrow y_2 = -Ct^{-1/2} \cos t$$

Άρα θέτωντας π.χ. $C = -1$ μια γραμμικά ανεξάρτητη δεύτερη λύση της Δ.Ε. είναι η

$$y_2 = t^{-1/2} \cos t.$$

(β) Από τη δοσμένη Δ.Ε.

$$y'' + \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 5t + 5 \Rightarrow t^2 y'' + ty' + y = 5t^3 + 5t^2 \quad (\text{δηλ. έχουμε μια μη-ομογενή Δ.Ε. Euler-Cauchy})$$

Για την ομογενή Δ.Ε. και με αντικατάσταση $y = t^m$ παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$. Συνεπώς η λύση της ομογενούς είναι (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 6 σελ. 27)

$$y_c = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Για να υπολογίσουμε μια λύση της μη-ομογενούς χρησιμοποιούμε μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών "μαντεύοντας" ότι $y_p = At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Αντικαθιστώντας τις y_p , $y_p' = 3At^2 + 2Bt + C$ και $y_p'' = 6At + 2B$ στη μη ομογενή Δ.Ε. και εξισώνοντας τους ομοιοβάθμιους συντελεστές παίρνουμε

$$A = 1/2, B = 1, C = D = 0$$

Άρα $y_p = \frac{1}{2}t^3 + t^2$ και συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y = y_c + y_p = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t) + \frac{1}{2}t^3 + t^2.$$

Θέμα 3

(α) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διάνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδος ιδιοτιμών (εφόσον η άσκηση ζητάει να μη μετασχηματιστεί το σύστημα), υπολογίζουμε την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$.

Λύνοντας για το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = [v_1, v_2]^T$ το σύστημα $(\mathbf{A} - 2i \cdot \mathbf{I})\vec{v} = 0$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 1/i \\ 1 \end{bmatrix}$$

και θέτωντας $v_2 = i$ (για απλοποίηση) παίρνουμε $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Από τη λύση $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^i$ (και χρήση του τύπου Euler), έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} (\cos(t) + i \sin(t)) = \begin{bmatrix} \cos(t) + i \sin(t) \\ i \cos(t) - \sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

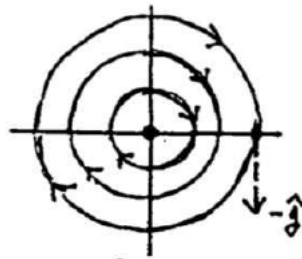
συνεπώς, η πραγματική λύση του ομογενούς συστήματος είναι (υπέρθεση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους)

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = c_1 \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων, με βάση την παραπάνω λύση, είναι τ.ω. $\vec{x}_c = \mathbf{X}(t)\vec{c}$, δηλ.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

(β) Με βάση τη λύση που βρήκαμε στο (α) ερώτημα, οι τροχιές των λύσεων είναι **κύκλοι** με κέντρο το $(0, 0)$, γιατί $x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2 = C^2$. Άρα το κρίσιμο σημείο αποτελεί ευσταθές κέντρο. Για να προσδιορίσουμε τη φορά του πεδίου αρκεί να επιλέξουμε ένα σημείο στο xy -επίπεδο, έστω το $[x, y] = [1, 0]$ και άρα $[x', y'] = [0, -1] = -\hat{j}$ (η κίνηση κατά τη φορά του ρολογιού).



(γ) Εφόσον γνωρίζουμε τον πίνακα θεμελιωδών λύσεων μπορούμε να βρούμε μια ειδική λύση για το μη-ομογενές σύστημα (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 23) ως

$$\vec{x}_p = \mathbf{X}(t) \int \mathbf{X}(t)^{-1} \vec{f}(t) dt \quad \text{όπου}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t)^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \int \mathbf{X}(t)^{-1} \vec{f}(t) dt = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} dt = \\ &= \int \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος είναι

$$\vec{x} = \mathbf{X}(t)\vec{c} + \vec{x}_p \quad \text{και για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες έχουμε}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0$$

Άρα η λύση στο μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) + t \sin(t) \\ -\sin(t) + t \cos(t) \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση Η $\vec{x}_p$ μπορεί να βρεθεί και με τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών θέτοντας όμως $\vec{x}_p = \vec{a}t \sin(t) + \vec{b}t \cos(t)$, γιατί αν επιλέξουμε $\vec{x}_p = \vec{a} \sin(t) + \vec{b} \cos(t)$, αυτή είναι λύση του ομογενούς συστήματος.

Θέμα 4

(α) Από απλά κλάσματα έχουμε

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 1} \Rightarrow F(s) = \frac{A[(s+1)^2 + 1] + Bs^2 + Cs}{s[(s+1)^2 + 1]} = \frac{1 - s(5 + 3s)}{s[(s+1)^2 + 1]}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των αριθμητών έχουμε τις σχέσεις $2A = 1$, $A + B = -3$ και $2A + C = -5$ που δίνουν $A = 1/2$, $B = -7/2$ και $C = -6$, συνεπώς

$$F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{-\frac{7}{2}s - 6}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{2s} - \frac{7}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{5}{2} \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

όπου για την τελευταία ισότητα δεξ και ΔΙΑΛΕΞΗ 10 σελ. 30. Άρα ό

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}e^{-t} \cos t - \frac{5}{2}e^{-t} \sin t.$$

(β) Η Δ.Ε. με χρήση συνάρτησης Heaviside γίνεται

$$y'' + y = (1 - u(t - \pi)) \frac{t}{\pi} + u(t - \pi) = \frac{t}{\pi} - \frac{1}{\pi} u(t - \pi)[t - \pi] \quad \text{άρα με Laplace}$$

$$(s^2 + 1)F(s) = \frac{1}{\pi s^2} - \frac{1}{\pi s^2} e^{-\pi s} \Rightarrow F(s) = \frac{1 - e^{-s\pi}}{(s^2 + 1)\pi s^2} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} \right) (1 - e^{-s\pi}) \quad (\text{από ανάλ. σε απλά κλάσματα})$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $Y(s) = \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} \right)$ είναι

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = t - \sin t \quad \text{άρα}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{\pi}(t - \sin t) - \frac{1}{\pi}u(t - \pi)[(t - \pi) - \sin(t - \pi)]$$

Συνεπώς για $0 \leq t < \pi$ η $y(t) = \frac{1}{\pi}(t - \sin t)$ και για $t \geq \pi$

$$y(t) = \frac{t}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sin t - \frac{1}{\pi}(t - \pi) - \frac{1}{\pi} \sin t, \quad \text{εφόσον } \sin(t - \pi) = -\sin t, \quad \text{άρα}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(t - \sin t), & 0 \leq t < \pi, \\ 1 - \frac{2}{\pi} \sin t, & t \geq \pi \end{cases}$$