

Θέμα 1

(α)[4+4] Για το Π.Α.Τ. $y' = t - y$, $y(0) = 0$, σχεδιάστε το πεδίο κλίσεων στο $[t, y] \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ και με βάση το πεδίο προσεγγίστε το $y(2)$. Στη συνέχεια λύστε το Π.Α.Τ για να υπολογίσετε τη ακριβή τιμή $y(2)$.

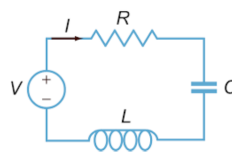
(β)[10] Έστω ότι κάποιος ανοίγει έναν τραπεζικό λογαριασμό συνταξιοδότησης σε ηλικία 25 ετών με αρχικό κεφάλαιο 2000€ και κάθε χρόνο καταθέτει σε αυτόν 2000€. Εάν το ετήσιο επιτόκιο είναι 3%, ποιο θα είναι το υπόλοιπο του λογαριασμού στην ηλικία των 65;

(γ)[12] Λύστε τη Δ.Ε.: $y' \sin y = t - \cos y$.

Θέμα 2

(α)[12] Για τη μη-ομογενή Δ.Ε.: $ty'' - (t + 1)y' + y = t^2$, $t \neq 0$, δίνεται ότι η $y_1(t) = e^t$ είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Υπολογίστε τη γενική λύση της παραπάνω Δ.Ε.

(β)[8] Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις μπορούν να διεγερθούν σε ένα κύκλωμα που περιέχει αντίσταση R , πηνίο επαγωγής L , πυκνωτή χωρητικότητας C και τάση πηγής $V(t)$. Η μεταβολή του φορτίου $I(t)$ στο κύκλωμα μπορεί να περιγραφεί από τη Δ.Ε. $LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = V(t)$. Αν $L = 5/3$, $R = 10$, $C = 1/30$ και $V(t) = 300$, με $I(0) = 0$, $I'(0) = 9$, υπολογίστε τη λύση του Π.Α.Τ. και ποιο θα είναι το φορτίο στο κύκλωμα σε βάθος χρόνου.



Θέμα 3

Έστω το παρακάτω μη-ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x_1(t)$ και $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + \frac{3}{2}x_2, \\ x_2' &= -\frac{1}{6}x_1 - 2x_2 - 9e^{-3t} \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης:

(α)[12] Υπολογίστε τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος που προκύπτει από το παραπάνω και δώστε τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων.

(β)[8] Σχεδιάστε το γράφημα του διανυσματικού πεδίου (επίπεδο φάσης) και τις αντίστοιχες τροχιές των λύσεων.

(γ)[8] Να βρεθεί η γενική λύση του παραπάνω μη-ομογενούς συστήματος με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1$ και $x_2(0) = 0$.

Θέμα 4

(α)[6] Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του $F(s) = \frac{se^{-3s}}{(s^2 + 4)^2}$.

(β)[8+8] Με χρήση μετασχηματισμών Laplace υπολογίστε τη λύση των παρακάτω Π.Α.Τ.

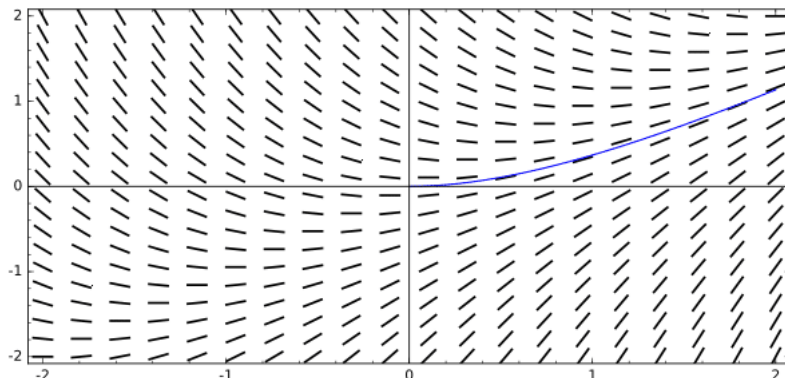
(i) $3y' + 2y = u(t - 2)$, $y(0) = 1$ (όπου u η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος),

(ii) $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Με βάση το πεδίο κλίσεων και την αρχική τιμή, η $y(2) \approx 1.1$



Η Δ.Ε. λύνεται με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα

$$y' + y = t \Rightarrow e^t y' + e^t y = te^t \Rightarrow ye^t = \int te^t + C \Rightarrow ye^t = e^t(t-1) + C \Rightarrow y(t) = Ce^{-t} + t - 1.$$

Από την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$ έχουμε $C = 1$ συνεπώς $y(2) = e^{-2} + 2 - 1 = 1.135$.

(β) Η Δ.Ε. που μοντελοποιεί το πρόβλημα, αν $P(t)$ το υπόλοιπο του λογαριασμού και E το επιτόκιο, είναι

$$P' = E \cdot P + 2000$$

και λύνεται είτε με χρήση ολοκληρωτικού παράγοντα είτε σαν χωριζομένων μεταβλητών (το αποτέλεσμα είναι το ίδιο φυσικά). Σαν χωριζομένων μεταβλητών έχουμε

$$\int \frac{dP}{0.03P + 2000} = t + C \Rightarrow \frac{1}{0.03} \ln(0.03P + 2000) = t + C \Rightarrow \ln(0.03P + 2000) = 0.03t + 0.03C = 0.03t + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow 0.03P + 2000 = e^{0.03t} e^{\tilde{C}} = De^{0.03t} \Rightarrow P(t) = \frac{D}{0.03} e^{0.03t} - \frac{2000}{0.03} \Rightarrow P(t) = \tilde{D} e^{0.03t} - \frac{2000}{0.03}, \tilde{D} \in \mathbb{R}$$

Η αρχική συνθήκη είναι $P(0) = 2000$ συνεπώς, $P(0) = \tilde{D} - \frac{2000}{0.03} \Rightarrow \tilde{D} \approx 68667$. Το υπόλοιπο του λογαριασμού στην ηλικία των 65 ετών (δηλ μετά από 40 χρόνια) θα είναι

$$P(40) = 68667e^{0.03 \cdot 40} - \frac{2000}{0.03} \approx 161.315\text{€}.$$

(γ) Η μη-γραμμική αυτή Δ.Ε. μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι της μορφής $M(t, y) + N(t, y)y' = 0$ με $N = -\sin y$ και $M = t - \cos y$. Όμως $\frac{\partial M}{\partial y} = \sin y \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 0$ άρα δεν είναι πλήρης. Ελεγχοντας το

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\sin y}{-\sin y} = -1 \quad (\text{μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξαρτητη του } y)$$

Συνεπώς υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας που μετατρέπει τη Δ.Ε. σε πλήρη, ο $e^{-\int dt} = e^{-t}$ και πολλαπλασιάζοντας με αυτόν τη Δ.Ε. έχουμε τη πλήρη Δ.Ε.

$$e^{-t}(t - \cos y) - e^{-t} \sin yy' = 0,$$

όπου γαι τη λύση της ψάχνουμε συνάρτηση $u(t, y)$ τ.ω.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-t}(t - \cos y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-t} \sin y$$

Άρα ολοκληρώνοντας τη δεύτερη σχέση ως προς y έχουμε

$$u(t, y) = \int -e^{-t} \sin y dy = e^{-t} \cos y + \phi(t)$$

παραγωγίζοντάς τώρα ως προς t και συγκρίνοντας με την πρώτη πάνω σχέση, έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[e^{-t} \cos y + \phi(t)] = e^{-t}(t - \cos y) \Rightarrow \phi(t)' = te^{-t}$$

Άρα

$$\phi(t) = \int te^{-t} dt = -te^{-t} - \int (-e^{-t}) dt = -te^{-t} - e^{-t}$$

Συνεπώς η (πεπλεγμένη) λύση της Δ.Ε. μας εξίσωσης είναι

$$e^{-t} \cos y - te^{-t} - e^{-t} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 2

(α) Για να βρούμε της γενική λύση της Δ.Ε. χρειαζόμαστε πρώτα μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση της ομογενούς η οποία μπορεί να βρεθεί με βάση το Θ. Abel (υποβιβασμός της τάξης). Υπολογίζοντας τη Wronskian $W(t)$ (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 5 σελ. 10) από

$$W' + \frac{t+1}{t}W = 0 \Rightarrow W = Cte^t \text{ συνεπώς (από τον ορισμό της Wronskian) } y_2'y_1 - y_1'y_2 = Cte^t, \quad C \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Είτε λύνοντας την $(*)$ ως προς y_2 , είτε με χρήση του τύπου στη σελ. 11 της ΔΙΑΛΕΞΗΣ 5, έχουμε

$$y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dt \Rightarrow y_2 = e^t \int \frac{C}{e^2} te^t dt \Rightarrow y_2 = Ce^t \int te^{-t} dt \Rightarrow y_2 = -C(t+1)$$

Άρα θέτοντας π.χ. $C = -1$ μια γραμμικά ανεξάρτητη δεύτερη λύση της Δ.Ε. είναι η $y_2 = t+1$.

Για να βρούμε στη συνέχεια μία ειδική λύση της μη-ομογενούς μπορούμε να εφαρμόσουμε είτε τη μέθοδο Lagrange είτε τη μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών.

Lagrange Με βάση το Θεώρημα (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 7, σελ. 25) υπολογίζουμε πρώτα τη Wronskian

$$W = \begin{vmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = e^t - e^t(t+1) = -te^t$$

και κανονιστώντας τη ΔΕ έχουμε $f = t$ και

$$y_p = -e^t \int \frac{(t+1)t}{-te^t} dt + (t+1) \int \frac{te^t}{-te^t} dt = e^t \int (t+1)e^{-t} dt - (t+1) \int 1 dt = -t^2 - 2t - 2.$$

Άρα η γενική λύση δίνεται ως

$$y(t) = c_1 e^t + c_2(t+1) - t^2 - 2t - 2 = c_1 e^t + \tilde{c}_2(t+1) - t^2, \quad c_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}.$$

Απροσδιόριστων Συντελεστών. “Μαντεύουμε” ότι $y_p = At^2 + Bt + C$, άρα $y_p' = 2At + B$ και $y_p'' = 2A$ και αντικαθιστώντας στη ΔΕ

$$2At = -(t+1)(2At + B) + At^2 + Bt + C = t^2 \Rightarrow A = -1, B = C = 0 \Rightarrow y_p = -t^2$$

Άρα πάλι η γενική λύση δίνεται ως $y(t) = c_1 e^t + c_2(t+1) - t^2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

(β) Από τη δοσμένη Δ.Ε. έχουμε

$$I'' = 6I' + 18I = 180 \Rightarrow \text{η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς Δ.Ε. } r^2 + 6r + 18 = 0$$

Έχουμε ρίζες $r_{1,2} = -3 \pm 3i$ άρα η λύση της ομογενούς $I_c = e^{-3t}[c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)]$.

Μαντεύουμε ότι η $I_p = A$ και έχουμε, αντικαθιστώντας στη Δ.Ε., ότι $A = 10$ άρα η γενική λύση είναι

$$I(t) = e^{-3t}[c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)] + 10$$

Με βάση της αρχικές συνθήκες παίρνουμε $c_1 = -10$ και $c_2 = -7$ άρα

$$I(t) = e^{-3t}[-10 \cos(3t) - 7 \sin(3t)] + 10$$

η οποία σε βάθος χρόνου $t \rightarrow \infty$ γίνεται $I(t) = 10$.

Θέμα 3

(α) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διάνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδος ιδιοτιμών υπολογίζουμε την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow (\lambda + \frac{3}{2})^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2}$ (διπλή).

Λύνοντας για τα ιδιοδιάνυσμα $\vec{\eta} = [\eta_1, \eta_2]^T$ το σύστημα $(\mathbf{A} + \frac{3}{2} \cdot \mathbf{I})\vec{\eta} = 0$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \eta_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και θέτοντας $\eta_2 = 1$ (για απλοποίηση) παίρνουμε $\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Άρα ατελής ιδιοτιμή.

Για να βρούμε το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, $\vec{\rho} = [\rho_1, \rho_2]^T$, λύνουμε το

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\rho} = \begin{bmatrix} -6 - 3\rho_2 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\rho} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

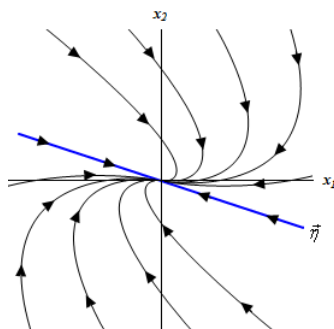
Άρα η λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$\vec{x}_c(t) = c_1 e^{-\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left(t e^{-\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων, με βάση την παραπάνω λύση, είναι τ.ω. $\vec{x}_c = \mathbf{X}(t)\vec{c}$, δηλ.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} -3e^{-3t/2} & -3te^{-3t/2} - 6e^{-3t/2} \\ e^{-3t/2} & te^{-3t/2} \end{bmatrix}.$$

(β) Με βάση το κυρίαρχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{\eta}$ και τη λύση, που βρήκαμε στο (α) ερώτημα, οι τροχιές των λύσεων είναι



(γ) Εφόσον έχουμε απλό εκθετικό στον μη ομογενή όρο, “μαντεύουμε” ότι

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{-3t} \quad \text{όπου αντικαθιστώντας στο σύστημα βρίσκουμε } a_1 = -6, a_2 = 8$$

άρα η γενική λύση του μη-ομογενούς είναι

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{-\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left(t e^{-\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

όπου από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι $c_1 = -8$ και $c_2 = -17/6$.

Θέμα 4

(α) Έχουμε (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 10 σελ. 18)

$$F(s) = \frac{s e^{-3s}}{(s^2 + 4)^2} = \frac{s e^{-3s}}{(s^2 + 2^2)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + 2^2)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 2^2} \right) \right] = -\frac{1}{2} (-t) \frac{1}{2} \sin(2t) = \frac{t}{4} \sin(2t)$$

Άρα

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = u(t-3) \frac{t-3}{4} \sin(2(t-3)).$$

(β) Ο μετασχηματισμός Laplace δίνει για το (i) με $\mathcal{L}\{y\} = F(s)$,

$$3(sF(s) - y(0)) + 2F(s) = \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow (3s+2)F(s) = 3 + \frac{e^{-2s}}{s} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{3}{3s+2} + e^{-2s} \frac{1}{s(3s+2)} = \frac{1}{s+2/3} + \frac{e^{-2s}}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{3}{3s+2} \right) =$$
$$\frac{1}{s+2/3} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{1}{2} \frac{e^{-2s}}{s+2/3} \Rightarrow$$

με βάση τους αντιστροφους μετασχηματισμούς η λύση είναι

$$y(t) = e^{-2/3t} + \frac{1}{2} u(t-2) - \frac{1}{2} u(t-2) e^{-2(t-2)/3}.$$

Για το (ii) με το μετασχηματισμό Laplace για την 4η παράγωγο (ιδιοτητες Διαλεξη 10 σελ. 14) και με τις αρχικές συνθήκες που δίνονται έχουμε ,

$$F(s) = \frac{s^3 y(0) + s^2 y(0)' + s y(0)'' + y'''(0)}{s^4 - 1} = \frac{s}{s^4 - 1}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{s}{s^4 - 1} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \Rightarrow A = 1/4, B = 1/4, C = -1/2, D = 0$$

$$\frac{s}{s^4 - 1} = \frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s+1)} - \frac{s}{2(s^2+1)}$$

τότε με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, $\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$, σε κάθε κλάσμα, η λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^t}{4} - \frac{\cos(t)}{2}.$$