

Θέμα 1

(α)[10] Υπολογίστε τη λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.: $ty' + ty^2 - y = 0$, $t > 0$, $y(1) = -2$.

(β)[12+6] Έστω ότι στο χρόνο, $t > 0$, ο πληθυσμός, $P(t)$, ενός είδους ικανοποιεί το Π.Α.Τ.

$$P' = 0.2P \left(1 - \frac{P}{200} \right), P(0) = 150. \text{ Αποδείξτε ότι η λύση του Π.Α.Τ. είναι της μορφής}$$

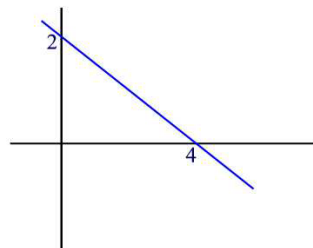
$P(t) = \frac{e^{0.2t}}{A + Be^{0.2t}}$ (υπολογίζοντας τα A και B). Προσδιορίστε την τιμή του $P(t)$ για $t \rightarrow \infty$ και με βάση το πεδίο κλίσεων της Δ.Ε.

Θέμα 2

(α)[12] Να λυθεί η Δ.Ε. $ty'' + 2(t+1)y' + 2y = 0$, $t > 0$, γνωρίζοντας ότι επιδέχεται μια λύση της μορφής $y_1(t) = t^a$, $a \in \mathbb{R}$.

(β)[10] Ένα εξάρτημα μιας μηχανής αποτελείται από ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας στο οποίο ασκείται μια εξωτερική δύναμη και η μετατόπιση, $x(t)$, της μάζας στο χρόνο, t , περιγράφεται από το Π.Α.Τ. $2000x'' + 2 \cdot 10^5 x = 2000 \sin(10t)$, $x(0) = 0.1m$, $x'(0) = 0$. Χαρακτηρίστε την κίνηση που κάνει η μάζα και υπολογίστε την $x(t)$.

(γ)[8] Το παρακάτω γράφημα δείχνει τη λύση της Δ.Ε. $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = \tilde{y}_0$. Υπολογίστε τις σταθερές α , y_0 και $\tilde{y}_0$ καθώς και τη λύση $y(t)$.



Θέμα 3

[20] Έστω το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις $x(t)$ και $y(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= y + \sin(2t), \\ y' &= -4x + 2 \cos(2t) \end{aligned}$$

Χωρίς να μετασχηματίσετε το σύστημα σε διαφ. εξισώσεις δεύτερης τάξης: να βρεθεί η πραγματική γενική λύση του παραπάνω συστήματος με αρχικές συνθήκες $x(0) = 2$ και $y(0) = 0$.

Θέμα 4

(α)[5+5] Υπολογίστε: (i) τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = e^{-2t}(3t^4 + 5 \cos(3t))$ και (ii) τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13}$

(β)[12] Με χρήση μετασχηματισμών Laplace υπολογίστε τη λύση του παρακάτω Π.Α.Τ.

$$y'' + 4y = k(t) \text{ με } k(t) = \begin{cases} t & \text{αν } 0 \leq t < \pi/2, \\ \pi/2 & \text{αν } t \geq \pi/2, \end{cases} \text{ και } y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Θέμα 1

(α) Η Δ.Ε. γράφεται ως $y' + y^2 - \frac{1}{t}y = 0$ άρα Δ.Ε. Bernoulli και για $u = y^{-1}$ έχουμε $u' = -y^{-2}y'$ και άρα έχουμε τη γραμμική Δ.Ε.

$$u' + \frac{1}{t}u - 1 = 0 \Rightarrow u' + \frac{1}{t}u = 1 \text{ και με ολοκληρωτικό παράγοντα } e^{\int \frac{1}{t} dt} = t \text{ έχουμε}$$

$$(tu)' = t \Rightarrow tu = \int t dt + C \Rightarrow u = \frac{1}{2}t + \frac{C}{t}$$

$$\text{Συνεπώς } y(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}t + \frac{C}{t}} \text{ και } y(1) = -2 \Rightarrow C = -1.$$

(β) Η Δ.Ε. είναι (και) διαχωρίσιμη, άρα

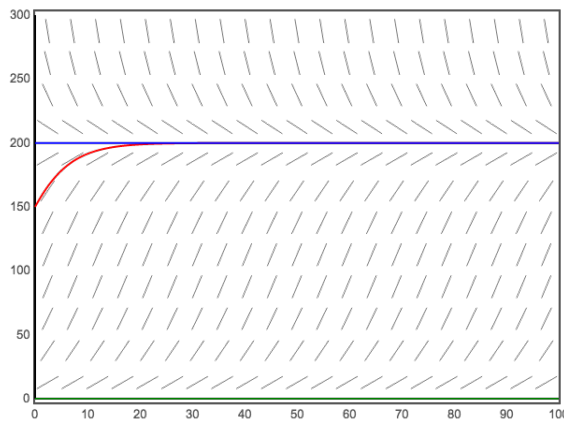
$$\frac{P'}{P(1 - \frac{P}{200})} = 0.2 \Rightarrow \int \frac{P'}{P(1 - \frac{P}{200})} dt = \int 0.2 dt \Rightarrow \int (\frac{1}{P} + \frac{1}{200 - P}) dP = 0.2t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{P}{200 - P} \right| = 0.2t + C \Rightarrow \frac{P}{200 - P} = De^{0.2t}, D = e^C \Rightarrow P(t) = \frac{200De^{0.2t}}{1 + De^{0.2t}}$$

$$\text{Από } P(0) = 150 \Rightarrow D = 3 \text{ συνεπώς}$$

$$P(t) = \frac{600e^{0.2t}}{1 + 3e^{0.2t}} \Rightarrow P(t) = \frac{e^{0.2t}}{A + Be^{0.2t}}, \text{ με } A = 1/600, B = 1/200$$

Το $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{0.2t}}{A + Be^{0.2t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0.2e^{0.2t}}{0.2Be^{0.2t}} = 200$ και το πεδίο κλίσεων και η ασυμπτωτική λύση για $P(0) = 150$ δίνει (και) γραφικά $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 200$.



Θέμα 2

(α) Εφόσον η $y_1(t)$ είναι λύση, και με $y_1'(t) = at^{a-1}$, $y_1''(t) = a(a-1)t^{a-2}$, ικανοποιεί τη Δ.Ε. άρα

$$t[a(a-1)t^{a-2}] + 2(t+1)at^{a-1} + 2t^a = 0 \Rightarrow t^{a-1}[a(a-1) + 2a] + t^a(2a+2) = 0$$

εφόσον $t > 0$ πρέπει $2a + 2 = 0$ και $a(a-1) + 2a = 0$ συνεπώς $a = -1$.

Εφόσον γνωρίζουμε τώρα την $y_1(t) = t^{-1}$ μπορούμε να υπολογίσουμε μια δεύτερη γραμ. ανεξάρτητη λύση (Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 5 σελ. 10-11) ως

$$y_2 = y_1 \int \left(\frac{C}{y_1^2} e^{-\int p(t) dt} \right) dt, \text{ με } p(t) = \frac{2(t+1)}{t}, \text{ συνεπώς,}$$

$$y_2 = Ct^{-1} \int (t^2 e^{-2t-2\ln t}) dt = Ct^{-1} \int (e^{-2t}) dt = -Ct^{-1} \frac{1}{2} e^{-2t}$$

Άρα τελικά η λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1} e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση: Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με τη μέθοδο υποβιβασμού της τάξης θέτωντας $y_2 = y_1 u$ και αντικατάσταση στη Δ.Ε.

(β) Με βάση τη Δ.Ε. έχουμε ένα σύστημα ελατηρίου-μάζας χωρίς απόσβεση και παρατηρούμε ότι η γωνιακή συχνότητα (του συστήματος) είναι $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{2000}} = 10 \text{ rad/s}$ η οποία είναι ίδια με αυτή της δύναμης εξαναγκασμού $2000 \sin(10t)$, $\omega_0 = \omega$ και θα έχουμε συντονισμό (Βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 7 σελ. 12-16).

Για να λύσουμε το Π.Α.Τ. βρίσκουμε πρώτα τη λύση της ομογενούς η οποία είναι από τη χαρ. εξίσωση $r^2 + 100 = 0$ δηλ. $r = \pm 10i$ η

$$x_c(t) = c_1 \cos(10t) + c_2 \sin(10t)$$

Για την ειδική λύση της μη-ομογενούς (λόγω συντονισμού) μαντεύουμε ότι

$$x_p(t) = At \cos(10t) + Bt \sin(10t) \quad \text{και βάζοντάς την στη Δ.Ε. βρίσκουμε } A = -1/20, \quad B = 0$$

Συνεπώς η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$x(t) = x_c + x_p = c_1 \cos(10t) + c_2 \sin(10t) - \frac{t}{20} \cos(10t)$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 0.1 \text{ m}$, $x'(0) = 0$ βρίσκουμε από τη γενική λύση, $c_1 = 0.1$ και $c_2 = 1/200$ άρα η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$x(t) = \frac{1}{10} \cos(10t) + \frac{1}{200} \sin(10t) - \frac{t}{20} \cos(10t)$$

(γ) Από το γράφημα καταλαβαίνουμε ότι η $y(t)$ είναι γραμμική συνάρτηση (ευθεία γραμμή) δηλ. $y(t) = mt + b$, άρα $y'' = 0$. Συμπεπώς, από τη Δ.Ε. έχουμε $\alpha = 0$. Από το γράφημα έχουμε ότι $b = 2$ και $m = -\frac{1}{2}$. Άρα, η λύση $y(t) = -\frac{t}{2} + 2$ και $y(0) = y_0 = 2$ και $\tilde{y}_0 = y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Θέμα 3

(α) Το ομογενές σύστημα σε μορφή πίνακα-διάνυσμα είναι

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδος ιδιοτιμών (εφόσον η άσκηση ζητάει να μη μετασχηματιστεί το σύστημα), υπολογίζουμε την ορίζουσα $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \implies \lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_1 = 2i$ και $\lambda_2 = -2i$.

Λύνοντας για το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v} = [v_1, v_2]^T$ το σύστημα $(\mathbf{A} - 2i \cdot \mathbf{I})\vec{v} = 0$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} -2i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_2 \begin{bmatrix} 1/2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

και θέτωντας $v_2 = 2i$ (για απλοποίηση) παίρνουμε $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$. Από τη λύση $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2i}$ (και χρήση του τύπου Euler), έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} (\cos(2t) + i \sin(2t)) = \begin{bmatrix} \cos(2t) + i \sin(2t) \\ 2i \cos(2t) - 2 \sin(2t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

συνεπώς, η πραγματική λύση του ομογενούς συστήματος είναι (υπέρθυση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους)

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_c = c_1 \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(t) \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων, με βάση την παραπάνω λύση, ε.τ.ω. $\vec{x}_c = \mathbf{X}(t)\vec{c}$, δηλ.

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -2 \sin(t) & 2 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε μια ειδική λύση για το μη-ομογενές σύστημα (βλ. ΔΙΑΛΕΞΗ 9 σελ. 23) ως

$$\vec{x}_p = \mathbf{X}(t) \int \mathbf{X}(t)^{-1} \vec{f}(t) dt \quad \text{όπου}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t)^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 2 \sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \int \mathbf{X}(t)^{-1} \vec{f}(t) dt = \frac{1}{2} \int \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 2 \sin(t) & \cos(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 2 \cos(t) \end{bmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα

$$\vec{x}_p = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -2 \sin(t) & 2 \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Συνεπώς η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος είναι

$$\vec{x} = \mathbf{X}(t)\vec{c} + \vec{x}_p \quad \text{και για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες έχουμε}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2, c_2 = 0$$

Άρα η λύση στο μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos(2t) + t \sin(2t) \\ -4 \sin(t) + 2t \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Θέμα 4

(α) (i) Με βάση τις ιδιότητες για $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\}$ και $\mathcal{L}\{e^{at} \cos(bt)\}$,

$$F(s) = 3 \frac{4!}{(s+2)^5} + 5 \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

(ii) Για τον αντίστροφο της $F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13}$ έχουμε

$$F(s) = \frac{2s+5}{(s+2)^2+9} = \frac{2s+4+1}{(s+2)^2+9} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+9} + \frac{1}{(s+2)^2+9} \quad \text{άρα}$$

$$y(t) = 3e^{-2t} \cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t)$$

(β) Το αριστερό μέρος της Δ.Ε. γίνεται

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y\} = s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + 4F(s) = (s^2 + 4)F(s)$$

Για το δεξί έχουμε

$$k(t) = t - u(t - \pi/2)t + u(t - \pi/2)\frac{\pi}{2} = t - u(t - \pi/2)(t - \pi/2) \quad \text{άρα}$$

$$\mathcal{L}\{k(t)\} = \frac{1}{s^2} - e^{-(\pi/2)s} \frac{1}{s^2} = (1 - e^{-(\pi/2)s}) \frac{1}{s^2}$$

Συνεπώς

$$F(s) = (1 - e^{-(\pi/2)s}) \frac{1}{(s^2 + 4)s^2}$$

Από

$$\frac{1}{(s^2 + 4)s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4} \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{4}, D = -\frac{1}{4}, C = 0, \quad \text{άρα}$$

$$F(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{8} \frac{2}{s^2 + 2^2} - \frac{1}{4} e^{-(\pi/2)s} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{8} e^{-(\pi/2)s} \frac{2}{s^2 + 2^2} \quad \text{απο τον αντίστροφο μετασχηματισμό}$$

$$y(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} \sin(2t) - \frac{1}{4}u(t - \pi/2)(t - \pi/2) + \frac{1}{8}u(t - \pi/2) \sin(2[t - \pi/2]).$$